

УДК 539.4

**ВЛИЯНИЕ НЕУПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ НА ТЕМПЕРАТУРУ  
НАЧАЛА ОБРАТНОГО ТЕРМОУПРУГОГО ПРЕВРАЩЕНИЯ  
В СПЛАВАХ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ  
Часть 2. Термодинамическая модель\***

Мовчан А.А., Казарина С.А., Сильченко А.Л.

*ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия***АННОТАЦИЯ**

В первой части статьи приведены экспериментальные данные, свидетельствующие о том, что температура начала обратного мартенситного или ромбоэдрического фазового превращения в никелиде титана в отсутствие напряжений увеличивается с ростом начальной фазово-структурной деформации материала. Данный эффект не может быть описан в рамках известной модели нелинейного деформирования сплавов с памятью формы (СПФ) при фазовых и структурных превращениях, поскольку согласно определяющим соотношениям этой теории изменение температуры начала обратного превращения пропорционально свертке девиаторов напряжений и начальных фазово-структурных деформаций, которая обращается в нуль при равных нулю напряжениях. Не описывается этот эффект и в рамках большинства известных феноменологических моделей термомеханического поведения СПФ.

В данной работе для описания рассматриваемого эффекта предлагается добавить в выражение для потенциала Гиббса СПФ неаддитивное слагаемое, являющееся функцией инварианта тензора фазово-структурной деформации. Исходя из этого предположения, с помощью формализма, принятого в рациональной термодинамике, как следствие первого и второго законов термодинамики, получены выражения для температуры начала обратного термоупругого фазового перехода, содержащие слагаемое, не обращающееся в нуль при нулевых напряжениях. Анализируется вопрос о знаке этого слагаемого. Получена также формулировка связанного уравнения энергетического баланса, учитывающая изменение в выражении для потенциала Гиббса. Путем сравнения с экспериментальными данными определен знак производной дополнительного слагаемого потенциала Гиббса и значение дополнительных констант предлагаемой модели. Обсуждается вопрос о влиянии предлагаемого изменения модели на величины характерных температур прямого термоупругого фазового превращения.

**Ключевые слова:** сплавы с памятью формы; потенциал Гиббса; неаддитивная часть; фазово-структурная деформация; обратное превращение; характерные температуры; деформированное состояние; модель

**THE INFLUENCE OF INELASTIC DEFORMATIONS  
ON THE REVERSE THERMOELASTIC TRANSFORMATION START  
TEMPERATURE IN SHAPE MEMORY ALLOYS  
Part 2. Thermodynamic model**

Movchan A.A., Kazarina S.A., Silchenko A.L.

*Institute of Applied Mechanics Russian Academy of Science, Moscow, Russia*

\* Работа выполнена в рамках Государственного задания ИПРИМ РАН (номер гос.регистрации темы АААА-А19-119012290118-3) при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 17-01-00216\_а).

The first part of the article presents experimental data indicating that the temperature of the onset of reverse martensitic or rhombohedral phase transformation in titanium nickelide in the absence of stresses increases with increasing initial phase-structural deformation of the material. This effect can not be described in the framework of the known model of nonlinear deformation of shape memory alloys in phase and structural transformations, since according to the constitutive relations of this theory, the change in the temperature of the onset of the reverse transformation is proportional to the convolution of stress deviators and initial phase-structural deformations, which turns into zero at zero stress. This effect is not described in the framework of most known phenomenological models of SMAs thermomechanical behavior.

In this paper, to describe the effect under consideration, it is proposed to add to the expression for the Gibbs potential of the SMA a nonadditive term that is a function of the invariant of the phase-structure deformation deviator. According to this assumption, using the formalism adopted in rational thermodynamics, as a consequence of the first and second laws of thermodynamics, expressions were obtained for the temperature of the onset of an inverse thermoelastic phase transition containing a term that does not vanish at zero stress. The question of the sign of this term is analyzed.

The formulation of the coupled energy balance equation taking into account the change in the expression for the Gibbs potential is also obtained. By comparison with the experimental data, the sign of the Gibbs potential additional term derivative and the values of the additional constants of the proposed model are determined. The question of the effect of the proposed change in the model on the values of the characteristic temperatures of direct thermoelastic phase transformation is discussed.

**Keywords:** alloys with shape memory; Gibbs potential; nonadditive part; phase - structural deformation; inverse transformation; characteristic temperatures; deformed state; model

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В первой части настоящей статьи [1] на основании анализа экспериментальных данных [2-4] установлено, что характерные температуры обратного термоупругого мартенситного фазового превращения в никелиде титана возрастают с ростом накопленных в СПФ фазово - структурных деформаций даже при условии отсутствия механических напряжений. Этот эффект не описывается в рамках известного термодинамического замыкания модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях [5-7], которое опирается на гипотезу об аддитивности потенциала Гиббса СПФ. В [8] обсужден вопрос о возможном знаке неаддитивной части потенциала Гиббса в случае, если базовыми состояниями двухфазного СПФ являются аустенит и полностью сдвойникованный мартенсит, причем аддитивная часть потенциала Гиббса представляет собой сумму упругих выражений этого потенциала для аустенита и хаотического мартенсита. С использованием микромеханической модели деформирования представительного объема СПФ [9] и формализма [10] для описания энергии взаимодействия включений, образующихся в деформируемом твердом теле, в [8] предложено выражение для неаддитивной добавки к потенциалу Гиббса СПФ, в виде квадратичной формы от компонент девиатора фазово-структурной деформации. В данной работе, в рамках упрощающего предположения об изотропном характере тензора этой квадратичной формы построено соответствующее термодинамическое замыкание теории нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях. Получена теоретическая зависимость характерной температуры

начала обратного фазового превращения от интенсивности накопленной фазово-структурной деформации в случае отсутствия напряжений.

## 2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НЕАДДИТИВНОЙ ЧАСТИ ПОТЕНЦИАЛА ГИББСА

Температура  $T$  является важнейшим параметром, управляющим фазовым составом и механическим поведением СПФ. В силу сложных теплофизических свойств СПФ (выделение и поглощение латентного тепла фазовых переходов, диссипативные явления) температурный режим элемента из СПФ не может быть корректно определен путем решения стандартного уравнения теплопроводности. Требуется формулировка уравнения энергетического баланса, учитывающего специфические особенности поведения СПФ. Кроме того, возникает проблема термодинамической состоятельности модели поведения СПФ, проверки выполнения в рамках этой модели законов термодинамики.

Обе эти проблемы могут быть корректно решены в рамках подходов рациональной термодинамики. Здесь, прежде всего, следует выбрать термодинамический потенциал, в рамках которого удобно рассматривать поведение СПФ, и соответствующую совокупность параметров состояния. Известно, что плотность энтропии для аустенитного состояния СПФ существенно выше, чем для мартенситного. Мартенситная часть представительного объема обладает по сравнению с аустенитной некоторой деформацией. Таким образом, энтропия и деформация аустенитной и мартенситной частей представительного объема СПФ различаются. Удобно выбирать для описания двухфазного состояния СПФ такой потенциал, основные параметры состояния которого могут иметь одинаковые значения для мартенситной и аустенитной компонент. Исходя из этих соображений удобно использовать потенциал Гиббса  $\psi$ , причем ту его разновидность, которая получается из свободной энергии с помощью преобразования Лежандра с применением термоупругих  $\varepsilon_{ij}^{eT}$ , а не полных  $\varepsilon_{ij}$  деформаций. В качестве независимых параметров состояния будут рассматриваться напряжения  $\sigma_{ij}$ , температура  $T$ , параметр фазового состава  $q$  и девиатор фазово-структурной деформации  $\varepsilon_{ij}^{phst}$ . Потенциал Гиббса СПФ складывается из двух частей – аддитивной  $\psi_1$  и неаддитивной  $\psi_2$

$$\psi(\sigma_{ij}, T, q, \varepsilon_{ij}^{phst}) = \psi_1(\sigma_{ij}, T, q) + \psi_2(\varepsilon_{ij}^{phst}) \quad (2.1)$$

Для неаддитивной части потенциала в предположении о справедливости аналога постулата изотропии А.А. Ильюшина [11] принято простейшее представление

$$\psi_2(\varepsilon_{ij}^{phst}) = -\varphi(\varepsilon_i^{phst}) \quad (2.2)$$

где  $\varepsilon_i^{phst} = \sqrt{\frac{2}{3} \varepsilon_{ij}^{phst} \varepsilon_{ij}^{phst}}$  – интенсивность фазово-структурной деформации. Для представления (2.2) справедлива формула

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial \varepsilon_{ij}^{phst}} = -\frac{2}{3} \varphi'(\varepsilon_i^{phst}) \frac{\varepsilon_{ij}^{phst}}{\varepsilon_i^{phst}} \quad (2.3)$$

В частности, возможна квадратичная зависимость

$$\psi_2(\varepsilon_{ij}^{phst}) = -\frac{1}{2} k \varepsilon_{ij}^{phst} \varepsilon_{ij}^{phst} = -\frac{3}{4} k (\varepsilon_i^{phst})^2 = -\varphi(\varepsilon_i^{phst}) \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial \varepsilon_{ij}^{phst}} = -k \varepsilon_{ij}^{phst},$$

Здесь и ниже для сокращения записи используются объемные плотности термодинамических потенциалов, параметр  $k$  измеряется в МПа.

### 3. ФОРМУЛИРОВКИ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ЗАКОНОВ ТЕРМОДИНАМИКИ

Первый и второй законы термодинамики для квазистатических процессов записываются в форме

$$\dot{U} = \dot{A} + \dot{Q} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - q_{i,i} \quad (3.1)$$

$$D = T \dot{S} + T \left( \frac{q_i}{T} \right)_{,i} \geq 0 \quad (3.2)$$

Здесь  $\dot{A}$ ,  $\dot{Q}$  – мощность работы внешних сил и скорость притока тепла к единице объема тела,  $q_i$  – вектор теплового потока,  $D$  – скорость диссипации,  $U$ ,  $S$  – объемные плотности внутренней энергии и энтропии. Проводя обычные преобразования в (3.2) и опираясь на закон теплопроводности Фурье  $q_i = -k_q T_{,i}$ , можно из (3.2) получить формулировку второго закона термодинамики в форме

$$D_1 = T \dot{S} + q_{i,i} \geq 0 \quad (3.3)$$

где  $D_1 = D - k_q T_{,i} T_{,i} / T$  – скорость механической диссипации,  $k_q$  – коэффициент теплопроводности. Исключая из (3.3) дивергенцию вектора теплового потока с помощью первого начала термодинамики (3.1), переходя в полученном неравенстве от плотности внутренней энергии  $U$  к плотности потенциала Гиббса  $\Psi$  можно получить

$$D_1 = \left( \sigma_{ij} + \frac{2}{3} \Phi'(\varepsilon_i^{phst}) \frac{\varepsilon_{ij}^{phst}}{\varepsilon_i^{phst}} \right) \dot{\varepsilon}_{ij}^{phst} - \left( S + \frac{\partial \Psi}{\partial T} \right) \dot{T} - \left( \varepsilon_{ij}^{eT} + \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_{ij}} \right) \dot{\sigma}_{ij} - \frac{\partial \Psi}{\partial q} \dot{q} \geq 0 \quad (3.4)$$

Процессы, не сопровождающиеся фазовыми и структурными переходами в СПФ, считаются обратимыми. Для таких процессов  $D_1 = 0$ ,  $\dot{\varepsilon}_{ij}^{phst} = 0$ ,  $\dot{q} = 0$ , и из справедливости неравенства (3.4) для произвольных значений  $\dot{T}$ ,  $\dot{\sigma}_{ij}$  следует

$$S = -\frac{\partial \Psi}{\partial T}, \quad \varepsilon_{ij}^{eT} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.5)$$

### 4. ДИССИПАТИВНОЕ НЕРАВЕНСТВО И УРАВНЕНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО БАЛАНСА

Принимается гипотеза о том, что соотношения (3.5), соответствующие обычным упругим выражениям для термоупругих деформаций и энтропии, справедливы и в случае процессов в СПФ, сопровождающихся фазовыми и структурными переходами. В результате неравенство (3.4) и выражение для  $D_1$  существенно упрощаются. После несложных преобразований вместо (3.4) можно получить

$$D_1 = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^{phst} - \frac{\partial \Psi}{\partial q} \dot{q} + \dot{\varphi}(\varepsilon_i^{phst}) \geq 0 \quad (4.1)$$

Последнее слагаемое левой части (4.1) отличает полученную формулировку диссипативного неравенства от варианта, соответствующего аддитивному представлению потенциала Гиббса [5-7].

Подставляя полученное для  $D_1$  выражение (4.1) в правое равенство (3.3) и учитывая, что в силу закона теплопроводности Фурье  $q_{i,i} = -k_q \Delta T$ , можно получить формулировку связного уравнения энергетического баланса

$$k_q \Delta T = T \dot{S} - \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^{phst} + \frac{\partial \Psi}{\partial q} \dot{q} - \dot{\varphi}(\varepsilon_i^{phst}) \quad (4.2)$$

которое отличается от варианта, соответствующего аддитивному потенциалу Гиббса только последним слагаемым правой части.

Дальнейшая конкретизация соотношений (4.1) и (4.2) требует формулировки выражения для потенциала Гиббса двухфазного СПФ. В большинстве работ по термодинамике СПФ [12-15] и др. используется следующая система гипотез. Принимаются чрезвычайно сложные выражения для термодинамического потенциала двухфазного тела, состоящие как из аддитивных по отношению к параметру фазового состава, так и из неаддитивных частей. При этом неаддитивным частям потенциала приписывают различные выражения для прямого и для обратного фазового превращения, а в некоторых моделях – различные выражения для полных и неполных циклов фазовых переходов. В результате термодинамический потенциал перестает быть однозначной функцией параметров состояния, и становится функционалом истории их изменения.

В то же время, постулируются чрезвычайно простые выражения для скорости механической диссипации типа [13]

$$D_1 = \pm A \dot{q} \quad (4.3)$$

где  $A = const$ , знак плюс соответствует прямому превращению, а знак минус – обратному. Такой выбор знака обеспечивает неотрицательность скорости механической диссипации. Переход от неравенства (4.1) к равенству (4.3) позволяет вывести определяющие соотношения для параметра фазового состава  $q$ . Для получения этих соотношений, соответствующих известным представлениям, и подбираются упомянутые выше выражения для неаддитивной части потенциала. Для того, чтобы таким путем получить правильные выражения для зависимости характерных температур фазовых превращений от действующих напряжений, приходится для входящей в (4.1) величины  $\dot{\varepsilon}_{ij}^{phst}$  принимать

неадекватные определяющие соотношения типа  $\dot{\varepsilon}_{ij}^{phst} = \rho_D \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i} \dot{q}$ , согласно

которым интенсивность деформации, накапливаемой при полном прямом превращении под действием постоянного напряжения не зависит от интенсивности этого напряжения, а явление ориентированного превращения [16-18] не имеет места.

В [5-7] предлагается использовать как можно более простые и обоснованные выражения для термодинамического потенциала, одинаковые как для прямого, так и для обратного термоупругого фазового превращения. Коренные различия

в поведении СПФ для прямого и обратного фазового превращения, при наличии или отсутствии структурного перехода предлагается учитывать за счет различий в величине скорости диссипации, что вполне допустимо в рамках классической термодинамики. Более того, предлагается не использовать никаких априорных гипотез относительно скорости механической диссипации, которые, в общем случае, не могут быть проверены в эксперименте. Вместо этого считаются заданными определяющие соотношения для фазово-структурных деформаций  $\varepsilon_{ij}^{phst}$  [19]

$$\varepsilon_{ij}^{phst} = \varepsilon_0 q \delta_{ij} + \varepsilon_{ij}^{phst'}, \quad d\varepsilon_{ij}^{phst'} = d\varepsilon_{ij}^{ph'} + d\varepsilon_{ij}^{st}$$

$$d\varepsilon_{ij}^{st} = \frac{3}{2} \rho_D \frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i} q F_2'(\sigma_i) d\sigma_i, \quad \text{при } d\sigma_i > 0 \text{ иначе } d\varepsilon_{ij}^{st} = 0 \quad (4.4)$$

$$d\varepsilon_{ij}^{ph'} = \omega_{ij}^+ dq, \quad \omega_{ij}^+ = \frac{3}{2} \rho_D \frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i} (1 - qf(q)) F_1(\sigma_i) + f(q) \varepsilon_{ij}^{phst'}, \quad \text{при } dq > 0 \quad (4.5)$$

$$d\varepsilon_{ij}^{ph'} = \omega_{ij}^- dq, \quad \omega_{ij}^- = \frac{\varepsilon_{ij}^{phst'}}{q} \quad \text{при } dq < 0 \quad (4.6)$$

и для параметра фазового состава  $q$  (объемной доли мартенситной фазы)

$$q = \frac{1}{2} (1 - \cos(\pi t)) \quad \text{при } 0 \leq t \leq 1 \quad (4.7)$$

$$t = \frac{M_s^\sigma - T}{M_s^0 - M_f^0}, \quad M_s^\sigma = M_s^0 + \frac{\omega_{ij}^+ \sigma_{ij}' + Z(\sigma_{ij}) + \sigma_{kk} \varepsilon_0}{\Delta S} \quad (4.8)$$

$$t = 1 - \frac{A_s^\sigma - T}{A_s^0 - A_f^0}, \quad A_s^\sigma = A_s^0 + \frac{\omega_{ij}^- \sigma_{ij}' + Z(\sigma_{ij}) + \sigma_{kk} \varepsilon_0}{\Delta S} \quad (4.9)$$

$$Z(\sigma_{ij}) = \frac{\sigma_{kk}^2 \Delta K}{6K_A K_M} + \frac{\sigma_i^2 \Delta G}{6G_A G_M}, \quad \Delta K = K_A - K_M, \quad \Delta G = G_A - G_M$$

справедливость которых может быть непосредственно проверена в экспериментах. Здесь соотношение (4.4) определяет приращение неупругих деформаций за счет структурного превращения, соотношения (4.5) – за счет прямого, а (4.6) – за счет обратного фазового превращения, формулы (4.7), (4.8) определяют изменение параметра фазового состава и относятся к прямому, а (4.7), (4.9) – к обратному превращению.

В приведенных выше формулах  $\varepsilon_0$  – линейная деформация объемного эффекта реакции фазового перехода,  $d\varepsilon_{ij}^{ph'}, d\varepsilon_{ij}^{st}$  – приращения тензора фазово-структурной деформации за счет фазового перехода и структурного превращения,  $\sigma_{kk}, \sigma_i$  – шаровая часть и интенсивность тензора напряжений,  $\rho_D$  – параметр материала, коррелирующий с интенсивностью кристаллографической деформации фазового перехода,  $F_1(\sigma_i), F_2(\sigma_i), f(q)$  – материальные функции,  $G, K$  – модуль сдвига и утроенный объемный модуль, индексами  $A$  и  $M$  обозначены значения этих модулей в аустенитном и мартенситном состоянии СПФ,  $\Delta S$  – скачок объемной плотности энтропии при переходе из мартенситного состояния в аустенитное.

Определяющие соотношения (4.4)-(4.9) должны быть подставлены в (4.2) для получения связного уравнения энергетического баланса и в неравенство (4.1) для проверки выполнения в рамках данной модели второго закона термодинамики.

## 5. КОНКРЕТИЗАЦИЯ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ АДДИТИВНОЙ ЧАСТИ ПОТЕНЦИАЛА ГИББСА

Для осуществления этой программы необходимо конкретизировать выражение для аддитивной части  $\psi_1$  потенциала Гиббса СПФ, находящегося, вообще говоря, в двухфазном состоянии. В простейшем случае считается, что  $\psi_1$  является суммой упругих выражений для потенциала Гиббса аустенита  $\psi_A$  и полностью сдвойникового мартенсита  $\psi_M$  с весами, равными объемным долям этих фаз

$$\psi_1 = q\psi_M + (1-q)\psi_A, \quad (5.1)$$

$$\psi_M = -\frac{\sigma_{kk}^2}{6K_M} - \frac{\sigma_i^2}{6G_M} - \alpha\sigma_{kk}(T-T_0) + C_\sigma \left( T - T_0 - T \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) \right) - S_M T + U_M \quad (5.2)$$

$$\psi_A = -\frac{\sigma_{kk}^2}{6K_A} - \frac{\sigma_i^2}{6G_A} - \alpha\sigma_{kk}(T-T_0) + C_\sigma \left( T - T_0 - T \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) \right) - S_A T + U_A$$

Здесь индекс  $A$  соответствует аустенитному, а  $M$  – мартенситному состояниям;  $\alpha$  и  $C_\sigma$  – коэффициент температурного расширения и теплоемкость единицы объема при постоянном напряжении, значения которых для упрощения считаются одинаковыми для аустенитного и мартенситного состояний;  $T_0$  – отсчетная температура;  $U, S$  – объемные плотности внутренней энергии и энтропии в ненагруженной аустенитном и мартенситном состояниях при отсчетной температуре. Подстановка (5.2) в (5.1), а результата в (2.1) с учетом (2.2) дает для потенциала Гиббса двухфазного материала выражение

$$\psi = -\frac{\sigma_{kk}^2}{6K(q)} - \frac{\sigma_i^2}{6G(q)} - \alpha\sigma_{kk}(T-T_0) + C_\sigma \left( T - T_0 - T \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) \right) + \quad (5.3)$$

$$+ U_A - S_A T - q(\Delta U - T\Delta S) - \varphi(\varepsilon_i^{phst})$$

Здесь

$$\frac{1}{K(q)} = \frac{q}{K_M} + \frac{1-q}{K_A}, \quad \frac{1}{G(q)} = \frac{q}{G_M} + \frac{1-q}{G_A}, \quad \Delta U = U_A - U_M > 0, \quad \Delta S = S_A - S_M > 0$$

Согласно (3.5), (5.3) получаются обычные соотношения для термоупругих деформаций и энтропии

$$\varepsilon_{ij}^{eT} = \frac{\sigma_{ij}}{2G(q)}, \quad \varepsilon_{kk}^{eT} = \frac{\sigma_{kk}}{K(q)} + 3\alpha(T-T_0)$$

$$S = \alpha\sigma_{kk} + C_\sigma \ln(T/T_0) + S_A - q\Delta S$$

выражение для скорости механической диссипации

$$D_1 = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^{phst} + (\Delta U - T\Delta S + Z(\sigma_{ij})) \dot{q} + \dot{\varphi}(\varepsilon_i^{phst}) \geq 0 \quad (5.4)$$

а также формулировка связного уравнения энергетического баланса

$$k_q \Delta T = C_\sigma \dot{T} + T\alpha \dot{\sigma}_{kk} - (\Delta U + \sigma_{kk} \varepsilon_0 + \omega_{ij}^\pm \sigma_{ij}') \dot{q} - \rho_D q F_2'(\sigma_i) \sigma_i \dot{\sigma}_i - \dot{\varphi}(\varepsilon_i^{phst}) \quad (5.5)$$

учитывающего как выделение и поглощение латентного тепла фазового перехода, так и диссипативные слагаемые, связанные не только со структурным, но и с фазовым переходом.

## 6. СЛУЧАЙ СТРУКТУРНОГО ПРЕВРАЩЕНИЯ

В случае структурного перехода согласно модели нелинейного деформирования при фазовых и структурных превращениях скорость фазово-структурных деформаций определяется по формуле [7,9]

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{st} = \frac{3}{2} \rho_D \frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i} q_{st} \varphi'(\sigma_i) \dot{\sigma}_i \quad (6.1)$$

и является девиатором. Соотношение (6.1) справедливо только при догрузке, условия которой в данной работе принимаются в простейшем виде

$$\dot{\sigma}_i > 0, \quad \sigma_i = \sigma_i^{\max} \quad (6.2)$$

где  $\sigma_i^{\max}$  – максимальное значение интенсивности напряжений за всю историю существования данного мартенситного представительного объема. При этом фазового перехода нет и поэтому

$$\dot{q} = 0 \quad (6.3)$$

Подстановка (6.1) в (5.4) с учетом (6.3) дает

$$D_1 = \frac{3}{2} \rho_D q_{st} \left( \sigma_{ij}' + \frac{2}{3} \varphi'(\varepsilon_i^{phst}) \frac{\varepsilon_{ij}^{phst}}{\varepsilon_i^{phst}} \right) \frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i} F_2'(\sigma_i) \dot{\sigma}_i \geq 0 \quad (6.4)$$

После несложных преобразований неравенство (6.4) можно привести к виду

$$D_1 = \rho_D q_{st} F_2'(\sigma_i) \dot{\sigma}_i \left[ \sigma_i + \varphi'(\varepsilon_i^{st}) \frac{\varepsilon_{ij}^{st} \sigma_{ij}'}{\varepsilon_i^{st} \sigma_i} \right] \geq 0 \quad (6.5)$$

Множитель, стоящий перед квадратной скобкой в (6.5), в силу первого неравенства (6.2) и свойств плотности распределения  $F_2'(\sigma_i) \geq 0$  является неотрицательным. Следовательно, неравенство (6.5) можно переписать в виде

$$\sigma_i \geq -\varphi'(\varepsilon_i^{st}) \frac{\varepsilon_{ij}^{st} \sigma_{ij}'}{\varepsilon_i^{st} \sigma_i} \quad (6.6)$$

Пусть выполняется неравенство

$$\varphi'(\varepsilon_i^{st}) \geq 0 \quad (6.7)$$

В этом случае неравенство (6.6) может быть нарушено лишь в случае, если

$$\varepsilon_{ij}^{st} \sigma_{ij}' < 0 \quad (6.8)$$

причем условием выполнения неравенства (6.5) в случае справедливости (6.8) является справедливость соотношения

$$\sigma_i \geq \varphi'(\varepsilon_i^{st}) \frac{|\varepsilon_{ij}^{st} \sigma_{ij}'|}{\varepsilon_i^{st} \sigma_i}$$

Легко видеть, что в силу неравенства Коши-Буняковского  $|\varepsilon_{ij}^{st} \sigma_{ij}'| \leq \varepsilon_i^{st} \sigma_i$ .

Следовательно, достаточным условием выполнения диссипативного неравенства является соотношение

$$\sigma_i \geq \varphi'(\varepsilon_i^{st})$$



Если же выполнено неравенство, противоположное (6.7), то, как легко видеть, диссипативное неравенство справедливо всегда, когда сверка девиатора напряжений и тензора структурных деформаций отрицательна (6.8), а при выполнении неравенства, противоположного (6.8), достаточным условием справедливости (6.5) является выполнение неравенства

$$\sigma_i > \left| \varphi'(\varepsilon_i^{st}) \right| \quad (6.9)$$

Легко понять, что справедливость неравенства (6.9) гарантирует выполнение (6.5) при любых условиях. Для случая квадратичного представления неаддитивной части потенциала Гиббса (2.4) условие выполнения диссипативного неравенства (6.5), согласно (6.9) имеет вид

$$\sigma_i \geq \frac{3}{2} k |\varepsilon_i^{st}|$$

Таким образом, условие термодинамической состоятельности модели для случая структурного превращения сводится к неравенствам (6.5) или (6.6). Далее предполагается выполнение этих неравенств. Слагаемое типа (6.4) или (6.5) входит в выражение для механической диссипации и в диссипативное неравенство не только в случае структурных превращений в отсутствие фазовых, но и в случаях, когда прямой или обратный фазовые переходы сопровождаются структурными превращениями. Поскольку соответствующее слагаемое считается неотрицательным, то выполнение диссипативного неравенства в случае неучета этого слагаемого является достаточным условием выполнения диссипативного неравенства для выражения механической диссипации, учитывающего это слагаемое. Поэтому в дальнейшем при анализе слагаемое механической диссипации, соответствующее структурному превращению, учитываться не будет.

## 7. УСЛОВИЕ ВЫПОЛНЕНИЯ ДИССИПАТИВНОГО НЕРАВЕНСТВА В СЛУЧАЕ ОТСУТСТВИЯ НАПРЯЖЕНИЙ И ФАЗОВО - СТРУКТУРНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

Для фазовых переходов, происходящих в отсутствие напряжений и фазово-структурных деформаций, неравенство (5.4) принимает вид

$$\Delta S(T^* - T) \dot{q} \geq 0, \quad T^* = \Delta U / \Delta S \quad (7.1)$$

В (7.1)  $T^*$  – температура термодинамического равновесия аустенитной и мартенситной фазы в СПФ.

Пусть  $M_s^0$  – точная верхняя грань значений температуры, при которых может происходить прямое фазовое превращение (в полных или неполных циклах) в отсутствие напряжений;  $A_s^0$  – точная нижняя грань температур, при которых может происходить обратное фазовое превращение (в полных или неполных циклах) в отсутствие напряжений. Легко видеть, что необходимым и достаточным условием выполнения неравенства (7.1) является

$$M_s^0 \leq T^* \leq A_s^0 \quad (7.2)$$

Очевидно, что неравенство (7.2) может выполняться лишь в случае, когда  $M_s^0 \leq A_s^0$ , т.е. для СПФ первого типа (СПФ с широким гистерезисом). Таким образом, установлено, что предположение об аддитивности потенциала Гиббса не противоречит второму закону термодинамики только для СПФ с широким гистерезисом, которые далее и рассматриваются. Для СПФ второго типа (с узким

гистерезисом), к которым, как правило, относятся сложные, трех- и более компонентные материалы, необходимо вводить в потенциал Гиббса неаддитивную часть, зависящую от  $q$ . Способ распространения модели на этот случай изложен в [8].

## 8. ДИССИПАТИВНОЕ НЕРАВЕНСТВО ПРИ НАЛИЧИИ ФАЗОВЫХ ПРЕВРАЩЕНИЙ

В рамках модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях скорость изменения фазовых деформаций определяется по формулам

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{ph} = (\varepsilon_0 \delta_{ij} + \omega_{ij}^{\pm}) \dot{q} \quad (8.1)$$

$$\omega_{ij}^+ = \frac{3}{2} \rho_D \frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i} F_1(\sigma_i) (1 - qf(q)) + f(q) \varepsilon_{ij}^{phst}, \quad (8.2)$$

$$\omega_{ij}^- = \frac{\varepsilon_{ij}^{phst}}{q} \dot{q} \quad (8.3)$$

Здесь верхний индекс + соответствует прямому, а минус – обратному термоупругому мартенситному фазовому превращению.

Подстановка (8.1) в выражение для механической диссипации (5.4) дает следующую формулировку диссипативного неравенства для фазовых переходов в СПФ

$$D_1 = \left[ \sigma_{kk} \varepsilon_0 + \left( \sigma_{ij}' + \frac{2}{3} f'(\varepsilon_i^{ph}) \frac{\varepsilon_{ij}^{ph}}{\varepsilon_i^{ph}} \right) \omega_{ij}^{\pm} + \Delta U - T \Delta S + Z(\sigma_{ij}) \right] \dot{q} \geq 0 \quad (8.4)$$

Для прямого термоупругого фазового превращения  $\dot{q} > 0$ . Для этого случая с учетом (8.2) из (8.4) получается

$$\rho_D \sigma_i F_1(\sigma_i) R_1 + R_2 + \sigma_{kk} \varepsilon_0 + Z(\sigma_{ij}) + \Delta U - T \Delta S \geq 0 \quad (8.5)$$

$$R_1 = \left[ 1 + \varphi'(\varepsilon_i^{ph}) \frac{\sigma_{ij}' \varepsilon_{ij}^{ph}}{\varepsilon_i^{ph} \sigma_i^2} \right] (1 - qf(q)),$$

$$R_2 = \left[ \sigma_{ij}' \varepsilon_{ij}^{ph} + \varepsilon_i^{ph} \varphi'(\varepsilon_i^{ph}) \right] f(q)$$

В случае использования неаддитивной части функционала Гиббса в форме (2.4) величины  $R_1$  и  $R_2$  вычисляются по формулам

$$R_1 = \left[ 1 + \frac{3}{2} \frac{\sigma_{ij}' \varepsilon_{ij}^{ph}}{\sigma_i^2} \right] (1 - qf(q)), \quad R_2 = \left[ \sigma_{ij}' \varepsilon_{ij}^{ph} + \frac{3}{2} k (\varepsilon_i^{ph})^2 \right] f(q)$$

Согласно (8.5), определяется верхняя грань температуры, при которой возможно прямое превращение при наличии напряжений и фазовых деформаций  $M_s^{\sigma, \varepsilon}$

$$M_s^{\sigma, \varepsilon} \leq T^* + \frac{\rho_D \sigma_i F_1(\sigma_i) R_1 + R_2 + \sigma_{kk} \varepsilon_0 + Z(\sigma_{ij})}{\Delta S} \quad (8.6)$$

Для случая обратного термоупругого фазового превращения  $\dot{q} < 0$ . С учетом этого обстоятельства и формулы (8.3) из (8.4) можно получить

$$D_1 = \sigma_{kk} \varepsilon_0 + \frac{\sigma_{ij}' \varepsilon_{ij}^{ph'}}{q} + \frac{\varepsilon_i^{ph} \varphi'(\varepsilon_i^{ph})}{q} + \Delta U - T\Delta S + Z(\sigma_{ij}) \leq 0 \quad (8.7)$$

Учитывая, что определяющие соотношения при обратном фазовом превращении (8.1), (8.3) из полностью мартенситного состояния в отсутствии структурного перехода ( $\varepsilon_{ij}^{phst'} = \varepsilon_{ij}^{ph'}$ ) могут быть проинтегрированы независимо от пути термомеханического нагружения:  $\varepsilon_{ij}^{ph'} = q\varepsilon_{ij}^0$ ,  $\varepsilon_i^{ph} = q\varepsilon_i^0$ , где  $\varepsilon_{ij}^0, \varepsilon_i^0$  – значения девиатора и интенсивности фазовой деформации в начальной точке обратного перехода, соотношение (8.7) переписывается в виде

$$D_1 = \sigma_{kk} \varepsilon_0 + \sigma_{ij}' \varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon_i^0 \varphi'(q\varepsilon_i^0) + \Delta U - T\Delta S + Z(\sigma_{ij}) \leq 0 \quad (8.8)$$

Из соотношения (8.8) следует ограничение снизу для температур, при которых может происходить обратное фазовое превращение при наличии напряжений и фазовых деформаций

$$A_s^{\sigma, \varepsilon} \geq T^* + \frac{\sigma_{ij}' \varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon_i^0 \varphi'(q\varepsilon_i^0) + \sigma_{kk} \varepsilon_0 + Z(\sigma_{ij})}{\Delta S} \quad (8.9)$$

Легко видеть, что при  $\sigma_{ij} \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon_i^{ph'} \rightarrow 0$  из (8.6) получается  $M_s^{\sigma, \varepsilon} \rightarrow M_s^0 \leq T^*$ .

В аналогичных условиях из (8.9) следует  $A_s^{\sigma, \varepsilon} \rightarrow A_s^0 \geq T^*$ . Считая, что зависимости температур начала прямого и обратного фазового перехода, как функции напряжения и деформаций должны быть непрерывными при  $\sigma = 0$  и  $\varepsilon = 0$ , получаем

$$M_s^{\sigma, \varepsilon} = M_s^0 + \frac{\rho_D \sigma_i F_1(\sigma_i) R_1 + R_2 + \sigma_{kk} \varepsilon_0 + Z(\sigma_{ij})}{\Delta S} \quad (8.10)$$

$$A_s^{\sigma, \varepsilon} = A_s^0 + \frac{\sigma_{ij}' \varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon_i^0 \varphi'(q\varepsilon_i^0) + \sigma_{kk} \varepsilon_0 + Z(\sigma_{ij})}{\Delta S} \quad (8.11)$$

При таком определении зависимости характерных температур фазовых переходов от деформаций и напряжений выполнение неравенства (7.2) гарантирует справедливость второго закона термодинамики для рассматриваемых процессов.

Исходя из первого и второго начал термодинамики в рамках предлагаемой модели связанное уравнение энергетического баланса (5.5) может быть получено в виде

$$k_q \Delta T = \alpha T \dot{\sigma}_{kk} + C_\sigma \dot{T} - \left( \sigma_{ij} + \frac{2}{3} \varphi'(\varepsilon_i^{phst}) \frac{\varepsilon_{ij}^{phst'}}{\varepsilon_i^{phst}} \right) \times \\ \times \left( \omega_{ij}^\pm \dot{q} + \rho_D q_{st} \varphi_2'(\sigma_i) \frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i} \dot{\sigma}_i \right) - (\Delta U_0 + Z(\sigma_{ij})) \dot{q}$$

## 9. СЛУЧАЙ ОБРАТНОГО ПРЕВРАЩЕНИЯ ПРИ НУЛЕВЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ

Для случая обратного превращения из полностью аустенитного состояния в отсутствии напряжений из (8.11) получается

$$A_s^{0, \varepsilon} = A_s^0 + \frac{\varepsilon_i^0 \varphi'(\varepsilon_i^0)}{\Delta S}$$

Согласно экспериментальным данным, изложенным в первой части статьи [1], с ростом интенсивности фазово – структурной деформации температура начала обратного превращения в отсутствие напряжений для никелида титана должна расти с насыщением (с приближением к горизонтальной асимптоте) когда величина  $\varepsilon_i$  приближается к  $\rho_D$ . Следовательно, функция  $\varphi(\varepsilon_i)$  должна удовлетворять условиям:  $\varphi'(\varepsilon_i) > 0$ ,  $\varphi'(\varepsilon_i) \rightarrow d/\varepsilon_i$  при  $\varepsilon_i \rightarrow \rho_D$ . Таким образом, основное значение играет не знак неаддитивной добавки к потенциалу Гиббса, а знак производной от этой добавки по величине интенсивности фазово – структурной деформации. В отличие от никелида титана, для СПФ на основе железа, согласно экспериментальным данным [20,21] температуры начала обратного термоупругого фазового превращения при нулевых напряжениях убывают с ростом интенсивности начальной деформации. Для такого типа СПФ должно выполняться неравенство  $\varphi'(\varepsilon_i) < 0$ .

Анализ зависимости (8.10) показывает, что температура начала прямого превращения из полностью аустенитного состояния при переходе к модифицированной модели не изменяется, поскольку в полностью аустенитном состоянии фазово – структурные деформации равны нулю. Однако, в случае неполных циклов фазовых переходов, когда прямое превращение может начинаться из двухфазного состояния, переход к модифицированной модели может изменить значение температуры начала прямого превращения, причем, как в сторону увеличения (в случае, если  $\sigma_{ij}'\varepsilon_{ij}^{phst} > 0$ ), так и в сторону уменьшения (при выполнении противоположного неравенства).

В первой части данной статьи [1] на основании экспериментальных данных предложены следующие аппроксимации зависимости приращения температуры начала обратного превращения  $\Delta A_s$  за счет начальных деформаций  $\varepsilon$  от интенсивности этих деформаций

$$\Delta A_s = c\varepsilon^2 \quad (9.1)$$

$$\Delta A_s = d \left\{ 1 - \exp\left[-(\varepsilon/\varepsilon_*)^\alpha\right] \right\} \quad (9.2)$$

В случае справедливости аппроксимации (9.1) функция модели  $\varphi(\varepsilon_i^{ph})$  должна иметь вид

$$\varphi(\varepsilon_i^{phst}) = c\Delta S(\varepsilon_i^{phst})^2 \quad (9.3)$$

Для того, чтобы получить зависимость (9.2), следует выбрать выражение для функции модели  $\varphi(\varepsilon_i^{ph})$  в виде

$$\varphi(\varepsilon_i^{ph}) = d\Delta S \left\{ \ln(\varepsilon_i^{phst}) - \int_0^{\varepsilon_i^{phst}} \frac{\exp\left[-(\varepsilon/\varepsilon_*)^\alpha\right]}{\varepsilon} d\varepsilon \right\} \quad (9.4)$$

Значения материального параметра  $c$  при использовании квадратичной аппроксимации (9.3) или величин  $d, \alpha, \varepsilon_*$  при использовании аппроксимации (9.4) можно найти из условия наилучшего соответствия экспериментальным данным по зависимости температуры  $A_s^{0,\varepsilon}$  от  $\varepsilon$ . Соответствующие значения приведены в таблице 1 первой части данной работы [1].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Предложен способ описания наблюдаемой в экспериментах зависимости температуры начала обратного термоупругого превращения в СПФ от начальных фазово - структурных деформаций при отсутствии напряжений, связанный с использованием неаддитивной добавки в потенциал Гиббса СПФ, являющейся функцией интенсивности фазово - структурной деформации.

2. В рамках предлагаемой модели, как следствия первого и второго законов термодинамики получены выражения для температур начала прямого и обратного термоупругого фазового превращения для случая наличия, как напряжений, так и фазовых деформаций.

3. Предложены конкретные выражения для неаддитивной добавки к потенциалу Гиббса, обеспечивающие качественное и количественное соответствие с экспериментальными данными по зависимости температуры начала обратного превращения от начальных деформаций.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Мовчан А.А., Казарина С.А., Сильченко А.Л. *Влияние неупругих деформаций на температуру начала обратного термоупругого превращения в сплавах с памятью формы. Часть 1. Анализ экспериментальных данных.* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т.24. – №3. – С.362-376.
2. Liu Y., Xie Z., Van Humbeeck, Delaey L. *Effect of texture orientation on the martensite deformation of NiTi shape memory alloy sheet* // Acta Mater. – 1999. – Vol.47. – Pp.615-650.
3. Uchil J., Mahesh K.K., Kumura K.G. *Calorimetric study of the effect of linear strain on the shape memory properties of Nitinol* // Physica B. – 2001. – No.303. – Pp.1-9.
4. Tan G., Liu Y., Sittner P., Saunders M. *Luders-like deformation associated with stress-induced martensitic transformation in TiNi* // Scripta Materialia. – 2004. – Vol.50. – Pp.193-198.
5. Мовчан А.А., Ньюнт Со *Термодинамическое описание поведения сплавов с памятью формы с помощью аддитивного потенциала Гиббса* // Прикладная механика и техническая физика. – 2006. – Т.47. – №4. – С.98-103.
6. Мовчан А.А., Казарина С.А., Мишустин И.В., Мовчан И.А. *Термодинамическое обоснование модели нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях* // Деформация и разрушение материалов. – 2009. – №8. – С.2-9.
7. Мовчан А.А., Казарина С.А. *Материалы с памятью формы как объект механики деформируемого твердого тела: экспериментальные исследования, определяющие соотношения, решение краевых задач* // Физическая мезомеханика. – 2012. – Т.15. – №1. – С.105-116.
8. Мовчан А.А., Мишустин И.В. *Анализ неаддитивных добавок к потенциалу Гиббса сплава с памятью формы* // Известия РАН. Серия Физическая. – 2006. – Т.70. – №9. – С.1388-1395.
9. Huang M., Brinson L.C. *A multivariant model for single crystal shape memory alloy behavior* // J. Mech. Phys. Solids. – 1998. – Vol.46. – No.8. – Pp.1379-1409.
10. Дж. Эшелби. *Континуальная теория дислокаций.* – М.: Издательство иностранной литературы, 1963. – 248 с.
11. Ильюшин А.А. *Пластичность. Основы общей математической теории.* – М.: Изд.-во АН СССР, 1963. – 271 с.

12. Leclercq S., Lexcelent C. *A general macroscopic description of the thermomechanical behavior of shape memory alloys* // J. Mech. Phys. Solids. – 1996. – Vol.44. – No.6. – Pp.953-980.
13. Boyd J.G., Lagoudas D.C. *A thermodynamic constitutive model for shape memory materials. Part 1. The monolithic shape memory alloy* // Intern. J. of Plasticity. – 1996. – Vol.12. – No.6. – Pp.805-842.
14. Hartl D.J., Lagoudas D.C., Calcins F.T. *Advanced methods for the analysis, design and optimization of SMA-based aerostructures* // Smart Materials and Structure. – 2011. – Vol.20. – 094006 (20 pp.).
15. Lexcelent Ch., Boubakar M.L., Bouvet Ch., Calloch S. *About modeling the shape memory alloy behaviour based on the phase transformation surface identification under proportional loading and anisothermal conditions* // Int. J. Solids and Struct. – 2006. – Vol.43. – No.3-4. – Pp.613-626.
16. Витайкин Е.З., Литвин Д.Ф., Макушев С.Ю., Удовенко В.А. *Структурный механизм эффекта памяти формы в сплавах* // ДАН СССР. – 1976. – Т.229. – №3. – С.597-600.
17. Лихачев В.А., Патрикеев Ю.И., Щуплецов В.Н. *Эффект ориентированного превращения в никелиде титана* // ФММ. – 1986. – Т.61. – Вып.1. – С.121-126.
18. Витайкин Е.З., Дмитриев В.Б., Литвин Д.Ф., Макушев С.Ю., Носова Г.И., Плахтий В.Д. *Роль внутренних микронапряжений в двустороннем эффекте памяти формы в сплавах на основе  $\gamma$ -Mn* // Физика металлов и металловедение – 1994. – Т.78. – №4. – С.154-160.
19. Мишустин И.В., Мовчан А.А. *Моделирование фазовых и структурных превращений в сплавах с памятью формы, происходящих под действием немономонно меняющихся напряжений* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2014. – №1. – С.37-53.
20. Nishimura F., Watanabe N., Tanaka K. *Uniaxial stress-strains-temperature hysteresis in an Fe-based shape memory alloy under thermomechanical loading* // Computational Material Science. – 1997. – Vol.8. – Pp.349-362.
21. Tanaka K., Watanabe T. *Transformation conditions in an Fe-based shape memory alloy: an experimental study* // Arch. Mech. – 1999. – Vol.51. – No.6. – Pp.805-832.

## REFERENCES

1. Movchan A.A., Kazarina S.A., Silchenko A.L. *Vliyanie neuprugih deformatsij na temperaturu nachala obratnogo termouprugogo prevrashcheniya v splavah s pamyat'yu formy [The influence of inelastic deformations on the reverse thermoelastic transformation start temperature in shape memory alloys. Part 1. Experimental data analysis]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2018, Vol.24, No.3, Pp.362-376.
2. Liu Y., Xie Z., Van Humbeeck, Delaey L. *Effect of texture orientation on the martensite deformation of NiTi shape memory alloy sheet*. Acta Mater., 1999, Vol.47, Pp.615-650.
3. Uchil J. Mahesh K.K., Kumura K.G. *Calorimetric study of the effect of linear strain on the shape memory properties of Nitinol*. Physica B., 2001, No.303, Pp.1-9.
4. Tan G., Liu Y., Sittner P., Saunders M. *Luders-like deformation associated with stress-induced martensitic transformation in TiNi*. Scripta Materialia, 2004, Vol.50, Pp.193-198.

5. Movchan A.A., Nyunt Soe *Thermodynamic description of the behavior of shape memory alloys by an additive Gibbs potential*. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2006, Vol.47, No.4, Pp.542-546.
6. Movchan A.A., Kazarina S.A., Mishustin I.V., Movchan I.A. *Termodinamicheskoe obosnovanie modeli nelinejnogo deformirovaniya splavov s pamyat'yu formy pri fazovyh i strukturnyh prevrashcheniyah [Thermodynamic substantiation of the model of non-linear deformation of shape memory alloys in the phase and structural conversions]*. Deformaciya i razrushenie materialov, 2009, No.8. Pp.2-9.
7. Movchan A.A., Kazarina S.A. *Shape memory materials as an object of solid state mechanics: experimental study, constitutive relations, solution of boundary value problems*. Physical Mesomechanics, 2012, Vol.15, No.3-4, Pp.214-223.
8. Movchan A.A., Mishustin I.V. *Analysis of nonadditive parts of Gibbs potential for shape memory alloys*. Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics, 2006, Vol.70, No.9, Pp.1589-1598.
9. Huang M., Brinson L.C. *A multivariant model for single crystal shape memory alloy behavior*. J. Mech. Phys. Solids, 1998, Vol.46, No.8, Pp.1379-1409.
10. Eshelby J. *Kontinual'naya teoriya dislokacij [Continuum theory of dislocations]*. Moskva, Izdatel'stvo inostranoj literatury, 1963, 248 p.
11. Ilyushin A.A. *Plastichnost'. Osnovy obshchej matematicheskoy teorii [Plastic. Fundamentals of general mathematical theory]*. Moskva, Izd.-vo AN SSSR, 1963, 271 p.
12. Leclercq S., Lexcellent C. *A general macroscopic description of the thermomechanical behavior of shape memory alloys*. J. Mech. Phys. Solids, 1996, Vol.44, No.6, Pp.953-980.
13. Boyd J.G., Lagoudas D.C. *A thermodynamic constitutive model for shape memory materials. Part 1. The monolithic shape memory alloy*. Intern. J. of Plasticity, 1996, Vol.12, No.6, Pp.805-842.
14. Hartl D.J., Lagoudas D.C., Calcins F.T. *Advanced methods for the analysis, design and optimization of SMA-based aerostructures*. Smart Materials and Structure, 2011, Vol.20, 094006 (20 pp.).
15. Lexcellent Ch., Boubakar M.L., Bouvet Ch., Calloch S. *About modeling the shape memory alloy behaviour based on the phase transformation surface identification under proportional loading and anisothermal conditions*. Int. J. Solids and Struct., 2006, Vol.43, No.3-4, Pp.613-626.
16. Vitajkin E.Z., Litvin D.F., Makushev S.YU., Udovenko V.A. *Strukturnyj mekhanizm ehffekta pamyati formy v splavah [Structural mechanism of shape memory effect in alloys]*. DAN SSSR, 1976, Vol.229, No.3, Pp.597-600.
17. Lihachev V.A., Patrikeev YU.I., Shuplecov V.N. *Ehffekt orientirovannogo prevrashcheniya v nikelide titana [The effect of oriented transformation in titanium nickelide]*. Fizika metallov i metallovedenie, 1986, Vol.61, Iss.1, Pp.121-126.
18. Vintajkin E.Z., Dmitriev V.B., Litvin D.F., Makushev S.Y., Nosova G.I., Plakhtij V.D. *Rol' vnutrennih mikronapryazhenij v dvustoronnem ehffekte pamyati formy v splavah na osnove  $\gamma$ -Mn [The role of internal microstresses in two-sided shape memory effect in  $\gamma$ -Mn base alloys]*. Fizika metallov i metallovedenie, 1994, Vol.78, No.4, Pp.154-160.
19. Mishustin I.V., Movchan A.A. *Modeling of phase and structure transformations occurring in shape memory alloys under nonmonotonically varying stresses*. Mechanics of Solids, 2014, Vol.49, No.1, Pp.27-39.

20. Nishimura F., Watanabe N., Tanaka K. *Unaxial stress-strains-temperature hysteresis in an Fe-based shape memory alloy under thermomechanical loading*. Computational Material Science, 1997, Vol.8, Pp.349-362.
21. Tanaka K., Watanabe T. *Transformation conditions in an Fe-based shape memory alloy: an experimental study*. Arch. Mech., 1999, Vol.51, No.6. Pp.805-832.

*Поступила в редакцию 14 февраля 2018 года.*

---

Сведения об авторах:

Мовчан Андрей Александрович – д.ф.-м.н., проф., г.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия, e-mail: [movchan47@mail.ru](mailto:movchan47@mail.ru)

Казарина Светлана Александровна – к.т.н., с.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия, e-mail: [svetlans@mail.ru](mailto:svetlans@mail.ru)

Сильченко Алексей Леонидович – н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия, e-mail: [alexxx649@mail.ru](mailto:alexxx649@mail.ru)