УДК 539.3

РАСЧЁТНАЯ МОДЕЛЬ ИЗГИБА КРУГЛОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ПЛАСТИНКИ С УЧЁТОМ ЕЁ НЕСЖИМАЕМОСТИ

Фирсанов Вик.В.

ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Несжимаемые изотропные упругие материалы имеют максимальный коэффициент Пуассона, равный 0,5. В процессе нагружения и деформирования элементов конструкции из таких материалов происходит изменение их формы, объем конструкции при этом остается неизменным. Свойство несжимаемости является следствием физических соотношений линейно упругого материала, в которых коэффициент Пуассона принимается равным 0,5, а физический модуль, характеризующий сопротивление материала изменению объема, стремится к бесконечности, вследствие чего физические соотношения закона Гука превращаются в так называемые «неогуковские» соотношения, в которых нормальные напряжения содержат общую силовую функцию S, имеющую размерность напряжений. Она заменяет в физических соотношениях неопределенность $\lambda\theta$ при $\lambda \to \infty$ и $\theta \to \infty$, где λ – объемный модуль, а θ – деформация изменения объема. Безусловное выполнение условия неизменяемости объема, связывающего линейные деформации, существенно меняет некоторые классические модели механики твердого тела, основанные на тех или иных гипотезах. Изгиб тонких пластинок при малых деформациях описывается определяющими соотношениями, базирующихся на гипотезах Кирхгофа об отсутствии сдвиговых деформаций в плоскости rz и поперечной линейной деформации применительно к круглой осесимметричной пластинке. Выполнение условия несжимаемости приводит к необходимости отказа от указанных гипотез, в особенности, от гипотезы об отсутствии деформаций сдвига. Для пластинок с одним граничным жёстко защемлённым контуром или с двумя также жёстко защемлёнными контурами поперечная линейная деформация отсутствует, что является следствием свойства неизменяемости объёма пластинки в процессе её деформирования. В некоторых задачах с целью получения простых и легко решаемых уравнений для круглой осесимметричной пластинки радиальное перемещение можно задать в виде линейной функции по поперечной координате. И при этом, необязательно переходить к интегральным характеристикам напряжённого состояния, каковыми являются изгибающий момент и перерезывающая сила. В классической теории изгиба пластин такой переход позволяет избавиться от поперечной координаты, однако для некоторых задач изгиба пластин из материала с неизменяемым объёмом указанный переход приводит к серьёзным погрешностям.

Ключевые слова: несжимаемаемость; объём; материал; напряжения; деформации; перемещения; нагрузка; гипотезы; уравнения; граничные условия; контур

COMPUTATIONAL MODEL OF AXISYMMETRIC BENDING OF A ROUND PLATE WITH ACCOUNTING FOR ITS INCOMPRESSIBILITY

Firsanov Vic.V

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

ABSTRACT

Incompressible isotropic elastic materials have a maximum Poisson ratio of 0.5. In the process of loading and deforming the structural elements of such materials their shape changes, while the volume of the structure remains unchanged. The property of incompressibility is a consequence of the physical relations of a linearly elastic material, in which the Poisson's ratio is assumed to be 0.5, and the physical modulus characterizing the resistance of a material to a change in volume tends to infinity, as a result of which the physical relations of Hooke's law turn into so-called «Neohooke» relations, in which normal stresses contain a common power function S having the dimension of stresses. It replaces in physical relations the uncertainty $\lambda\theta$ with $\lambda \to \infty$ and $\theta \to \infty$ where λ is the volume related modulus , and θ is the deformation of the change in volume. The unconditional fulfillment of the condition of the invariability of the volume, which relates linear deformations, substantially changes some classical models of mechanics of solid deformable body based on various hypotheses. The bending of thin plates with small deformations is described by the defining relations based on Kirchhoff's hypotheses about the absence of shear deformations in the plane rz and transverse linear deformation in relation to a round axisymmetric plate. The fulfillment of the incompressibility condition leads to the necessity of abandoning these hypotheses, in particular, from the hypothesis of the absence of shear deformations. For plates with one boundary rigidly fixed contour or with two also rigidly fixed contours, there is no transverse linear deformation, which is a consequence of the invariability of the volume of the plate in the process of its deformation. In some problems in order to obtain simple and easily solvable equations for a round axisymmetric plate, the radial displacement can be specified as a linear function along the transverse coordinate. And at the same time, it is not necessary to go over to the integral characteristics of the stress state, which are the bending moment and the shear force. In the classical theory of plate bending, such a transition allows to eliminate the transverse coordinate; however, for some problems of bending plates of a material with an unchanged volume, this transition leads to serious errors.

Keywords: incompressibility; volume; materials; stresses; deformations; replacements; loud; hypotheses; equations; border conditions; contour

Рассмотрим защемленную по контуру сплошную пластинку. На представленном рисунке показано, что отсутствие деформации в поперечном по отношению к основаниям пластинки направлении является не гипотезой, а следствием условия несжимаемости.

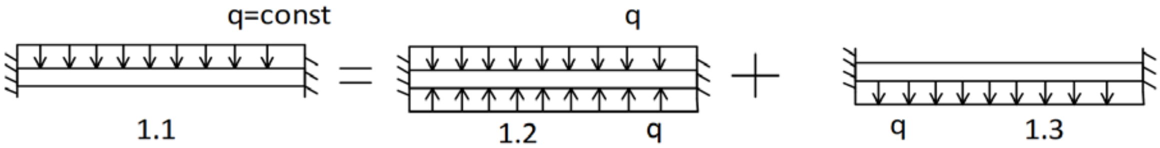

Рис.1.

Поскольку в пластинке, представленной рис.1.(1.2), все деформации равны нулю, то деформации пластинок 1.1 и 1.3, включая ε_z, одинаковы. Это возможно только в случае $\varepsilon_z = 0$, а $w = w(r)$.

Условие несжимаемости для рассматриваемой пластинки имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} ru + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

откуда $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}ru=0,\ u=\dfrac{\varphi(z)}{r}$, где $\varphi(z)$ – произвольная функция интегрирования. Из условия ограниченности решения при $r=0$ следует положить $\varphi(z)=0$ и, следовательно, $u=0$ по всей пластинке, включая контур.

Используя «неогуковские» соотношения, выразим напряжения через деформации и силовую функцию S

$$\begin{aligned}
&\sigma_r = 2G\frac{\partial u}{\partial r}+S=S(r,z),\quad \sigma_\theta = 2G\frac{u}{r}+S=S(r,z),\\
&\sigma_z = 2G\frac{\partial w}{\partial z}+S=S(r,z),\quad \tau_{rz}=\tau_{zr}=G\gamma_{rz}=G\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{dw}{dr}\right)=G\frac{dw}{dr}.
\end{aligned}\tag{1}$$

Касательные напряжения постоянны по толщине и, следовательно, на основаниях пластинки действует касательная нагрузка, в какой-то степени искажающая исходную задачу.

Уравнения равновесия круглой осесимметричной пластинки в отсутствие объемных сил

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}=0\\
&\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\tau_{zr}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=0
\end{aligned}\tag{2}$$

с учётом соотношений (1), преобразуются к виду

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial S}{\partial r}=0,\\
&\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\tau_{zr}+\frac{\partial S}{\partial z}=0,
\end{aligned}\tag{3}$$

откуда следует, что $S=S(z)$.

Представив S в виде линейной функции по координате z $S=a+bz$, где a и b произвольные константы, удовлетворим граничным условиям на верхнем и нижнем основаниях пластинки: $z=\dfrac{h}{2}$ $S=-q$, $z=-\dfrac{h}{2}$ $S=0$. Тогда $S=-q\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{z}{h}\right)$.

Подставляя это во второе уравнение системы (3) получим

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\tau_{zr}=\frac{q}{h},$$

откуда

$$\tau_{zr}=\frac{qr}{2h}+\frac{C_1}{r}.\tag{4}$$

Дифференциальное уравнение для определения прогиба w получим, подставляя последнее равенство системы (1) в (4)

$$G\frac{dw}{dr}=\frac{qr}{2h}+\frac{C_1}{r},$$

откуда

$$w=\frac{1}{G}\left(\frac{qr^2}{4h}+C_1\ln r+C_2\right),$$

где C_1 и C_2 произвольные константы интегрирования. Из условия ограниченности решения при $r=0$ для сплошной пластинки следует $C_1=0$.

Константу C_2 найдем, удовлетворив граничному условию на контуре пластинки при $r=b$ $w=0$.

Изгибающие моменты M_r и M_θ найдем по формуле: $M_r = M_\theta = \int\limits_{-h/2}^{+h/2} Szdz = -\dfrac{qh^2}{12}$.

Окончательное решение задачи имеет вид

$$\begin{aligned} & w = \frac{q}{4Gh}\left(r^2 - b^2\right), \quad u = 0, \\ & \sigma_z = \sigma_r = \sigma_\theta = -q\left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right), \quad \tau_{zr} = \frac{qr}{2h}, \quad M_r = M_\theta = -\frac{qh^2}{12}. \end{aligned} \tag{5}$$

Максимальный прогиб в центре пластинки при $r=0$ $w_{\max} = -\dfrac{qb^2}{4Gh}$.

Получено простое решение, в котором переменными по радиальной координате являются прогиб и перерезывающая сила, радиальные перемещения отсутствуют, а моменты M_r и M_θ, равные в силу (1), постоянны по всей пластинке.

Теперь рассмотрим пластинку, изгибаемую постоянной нагрузкой q, распределенной по верхнему основанию, и имеющей два контура: внешний $r=b$ и внутренний $r=a$, причем оба контура имеют жесткое защемление. В этой задаче также, как и в предыдущей $\varepsilon_z = 0$ и $w = w(r)$. Условие неизменяемости объема также дает решение для радиальных перемещений $u = \dfrac{\varphi(z)}{r}$, только $\varphi(z) \neq 0$ так как пластинка не сплошная. Выразим напряжения через деформации и функцию S используя физические соотношения

$$\begin{aligned} & \sigma_r = 2G\frac{\partial u}{\partial r} + S = -2G\frac{\varphi(z)}{r^2} + S(r,z), \\ & \sigma_\theta = 2G\frac{u}{r} + S = 2G\frac{\varphi(z)}{r^2} + S(r,z), \\ & \sigma_z = 2G\frac{\partial w}{\partial z} + S = S(r,z), \\ & \tau_{zr} = G\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{dw}{dr}\right) = G\left(\frac{\varphi'(\mathrm{z})}{r} + \frac{dw}{dr}\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Исключая касательное напряжение из второго уравнения равновесия (3) с помощью (4) получим

$$G\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\left(\frac{\varphi'}{r} + \frac{dw}{dr}\right) + \frac{\partial S}{\partial z} = 0,$$

где $S = -q\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{z}{h}\right)$ после удовлетворения условий $\sigma_z = -q$ и $\sigma_z = 0$ соответственно на верхнем и нижнем основаниях.

Последнее уравнение преобразуется к виду

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dw}{dr}=\frac{q}{Gh}.$$

Проинтегрировав это уравнение, получим решение для определения прогиба

$$w=\frac{qr^2}{4Gh}+C_1\ln r+C_2.$$

Произвольные константы интегрирования C_1 и C_2, а также произвольную функцию $\varphi(z)$ определим, выполнив граничные условия отсутствия перемещений на обоих контурах пластинки, откуда $\varphi(z)=0$, $C_1=-\frac{q}{4Gh}\frac{\left(b^2-a^2\right)}{\ln b/a}$,

$$C_2=\frac{q}{4Gh}\left[\frac{\ln a\left(b^2-a^2\right)}{\ln b/a}-a^2\right].$$

Решение этой задачи

$$w=\frac{q}{4Gh}\left[r^2-a^2+\frac{\left(b^2-a^2\right)\ln\frac{a}{r}}{\ln\frac{b}{a}}\right],$$

$$u=0,$$

$$\sigma_r=\sigma_\theta=\sigma_z=-q\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{h}\right), \tag{7}$$

$$\tau_{zr}=\frac{q}{4h}\left(2r-\frac{b^2-a^2}{\ln b/a}\frac{1}{r}\right).$$

Изменим граничные условия предыдущей задачи: на внешнем контуре оставим жесткое защемление, а внутренний контур свободен от касательных напряжений.

Поскольку внутренний контур не закреплен и перемещения на контуре как радиальные, так и поперечные, свободны, то условие $\varepsilon_z=0$ становится в этом случае гипотезой, эта задача позволяет проверить ее непротиворечивость и также определить, при каких условиях на внутреннем контуре эта гипотеза справедлива.

Решение предыдущей задачи с точностью до произвольных констант интегрирования имеет вид

$$w=\frac{1}{G}\left(\frac{qr^2}{4h}+C_1\ln r+C_2\right),$$

$$\tau_{zr}=\left(\frac{qr}{2h}+\frac{C_1}{r}\right).$$

После определения констант C_1 и C_2 из граничных условий $r=b$ $w=0$, $r=a$ $\tau_{zr}=0$ решение для прогиба и касательного напряжения имеет вид

$$w = \frac{q}{4Gh}\left[\left(r^2 - b^2\right) + 2a^2\left(\ln\frac{b}{r}\right)\right],$$

$$\tau_{zr} = \frac{qr}{h}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right).$$

Изгибающий момент $M_r = \int\limits_{-h/2}^{+h/2} Szdz = -\frac{qh^2}{12}$, постоянный по всей пластинке, включая внутренний контур.

Отсюда следует, что гипотеза $\varepsilon_z = 0$ не является противоречивой при нагружении пластинки постоянной нагрузкой q и краевым моментом $M_r^* = -\frac{qh^2}{12}$, распределенным по внутреннему контуру.

Вернёмся к пластинке, нагруженной постоянной нагрузкой и жёстко защемленной по внешнему и внутреннему контурам. Изменим ход решения задачи, отказавшись от условия $\varepsilon_z = 0$. Задачу решим двумя способами: в первом варианте без перехода к интегральным характеристикам напряжённого состояния, а во втором варианте интегрированием уравнений равновесия по z перейдем от напряжений к интегральным характеристикам напряженного состояния, как в классической теории изгиба пластин, и сравним полученные результаты.

Примем, что перемещение u является линейной функцией по координате z, перпендикулярной основаниям пластинки, то есть

$$u = u_0\left(r\right)z. \tag{8}$$

Выполняя условие несжимаемости, определим функцию прогиба

$$w = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}ru_0\frac{z^2}{2} + w_0\left(r\right), \tag{9}$$

где $w_0\left(r\right)$ – произвольная функция интегрирования.

Используя физические и геометрические соотношения, а также соотношения (8) и (9), получим связь напряжений с перемещениями

$$\begin{aligned}
&\sigma_r = 2G\frac{\partial u}{\partial r} + S = 2G\frac{\partial u_0}{\partial r}z + S,\\
&\sigma_\theta = 2G\frac{u}{r} + S = 2G\frac{u_0}{r}z + S,\\
&\sigma_z = 2G\frac{\partial w}{\partial z} + S = -2G\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}ru_0 z + S,\\
&\tau_{zr} = G\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right) = G\left(u_0 + \frac{\partial w_0}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}ru_0\frac{z^2}{2}\right).
\end{aligned} \tag{10}$$

Удовлетворим граничным условиям на верхнем и нижнем основаниях, полагая, что нагрузка q поровну распределена на оба основания

$$z = \pm\frac{h}{2} \quad \sigma_z = \mp\frac{q}{2}.$$

Тогда $-2G\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}ru_0\frac{h}{2} + S = -\frac{q}{2}.$

Представим функцию S как линейную по координате z $S = S_0(r)z$, нагрузку q считаем постоянной.

Тогда $-2G\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}ru_0\frac{h}{2} + S_0(r)\frac{h}{2} = -\frac{q}{2}$,

откуда

$$S_0 = -\frac{q}{h} + 2G\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}ru_0,$$

$$\sigma_z = -\frac{q}{h}z.$$

Из второго уравнения равновесия системы (2) с учётом полученного σ_z определим τ_{zr}

$$\tau_{zr} = \frac{q_0 r}{2h} + \frac{\varphi(z)}{r}, \tag{11}$$

где $\varphi(z)$ произвольная функция интегрирования.

Подставляя сюда τ_{zr}, выраженное через перемещения (четвертое соотношение системы (10), и дважды дифференцируя полученное по z, будем иметь

$$G\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}ru_0 = -\frac{\varphi''(z)}{r}. \tag{12}$$

Представляя первое уравнение равновесия системы (2) в перемещениях с использованием физических соотношений (10), получим

$$G\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}ru_0 z + \frac{1}{h}\frac{\partial q}{\partial r}z = -\frac{\varphi'(z)}{r}. \tag{13}$$

Дифференцируя это равенство по z получим уравнение, совпадающее с (12), поскольку $\frac{\partial q}{\partial r} = 0$ в силу постоянства нагрузки.

Равенство (12) имеет место, если $\varphi''(z) = A_1$, где A_1 произвольная константа, следовательно

$$\varphi(z) = A_1\frac{z^2}{2} + A_2 z + A. \tag{14}$$

Функцию интегрирования $w_0(r)$ определим, используя равенства (11), (14) и четвертое соотношение системы (10).

$$\tau_{rz} = G\left(u_0 + \frac{\partial w_0}{\partial r}\right) = \frac{qr}{2h} + \frac{1}{r}\left(A_1\frac{z^2}{2} + A_2 z + A\right).$$

Это равенство имеет место, если $A_1 = A_2 = 0$. Тогда

$$G\left(u_0 + \frac{\partial w_0}{\partial r}\right) = \frac{qr}{2h} + \frac{A}{r},$$

$$w_0 = \frac{1}{G}\left(\frac{qr^2}{4h} + A\ln(r)\right) - \int u_0 dr + B.$$

где B – произвольная константа интегрирования.

Интегрируя (12) с учётом того, что $\varphi'' = 0$, определим функцию $u_0(r)$

$$u_0 = C_1\frac{r}{2} + \frac{C_2}{r}.$$

Выполняя для радиального перемещения граничные условия жесткого закрепления при $r = a$ и $r = b$, получим систему двух однородных алгебраических уравнений, которая даёт тривиальное решение для искомых констант и, соответственно, для функции u_0.

Следовательно,

$$w_0\left(r\right) = \frac{1}{G}\left(\frac{qr^2}{4h} + A\ln\left(r\right)\right) + B.$$

Произвольные константы A и B определяются из граничных условий $r = a$, $r = b$ $w = 0$.

Определив константы, получим окончательное решение для искомых функций перемещений и напряжений, полностью совпадающее с решением (7). Для рассматриваемого варианта граничных условий $\dfrac{\partial w}{\partial z} = 0$, что подтверждается полученным решением. Касательное напряжение τ_{zr} не зависит от z, поэтому, следуя классическому закону парности, будем иметь нежелательную касательную нагрузку на основаниях пластинки, которая не оказывает никакого влияния на ее прогиб.

Для сплошной пластинки с жёсткой заделкой по контуру напряжённо-деформированное состояние описывается соотношениями (5).

Эту же задачу, с теми же предположениями, можно решить, избавившись от координаты z в выражениях для напряжений, путем интегрирования уравнений равновесия по толщине и перехода к интегральным характеристикам напряженного состояния

$$\begin{aligned}&\frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{M_r - M_\theta}{r} - Q_r = 0,\\&\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} rQ_r - q = 0,\end{aligned} \qquad (15)$$

где $M_r = \int\limits_{-h/2}^{h/2}\frac{\partial u_0}{\partial r}z^2dz + \int\limits_{-h/2}^{h/2}S_0\left(r\right)z^2dz = 2G\frac{\partial u_0}{\partial r}\frac{h^3}{12} + S_0\left(r\right)\frac{h^3}{12}$.

Здесь $S_0 = -\dfrac{q}{h} + 2G\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}ru_0$ получено при выполнении граничных условий для σ_z на верхнем и нижнем основании.

Тогда

$$\begin{aligned}&M_r = 2G\left(\frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}ru_0\right)\frac{h^3}{12} - \frac{qh^2}{12},\\&M_\theta = 2G\left(\frac{u_0}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}ru_0\right)\frac{h^3}{12} - \frac{qh^2}{12}.\end{aligned} \qquad (16)$$

Определим Q_r из второго уравнения системы (15) $Q_r = \dfrac{qr}{2} + \dfrac{C_1}{r}$, где C_1 произвольная константа интегрирования, и, подставляя Q_r, а также M_r и M_θ

в первое уравнение системы (15), получим дифференциальное уравнение для определения функции u_0

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}ru_0=\frac{1}{D}\left(\frac{qr}{2}+\frac{C_1}{r}\right). \tag{17}$$

Здесь $D=\frac{Gh^3}{3}$ – цилиндрическая жесткость пластинки.

Интегрируя уравнение (17), получим решение для функции $u_0(r)$ с точностью до трех произвольных констант интегрирования

$$u_0=\frac{1}{D}\left(\frac{qr^3}{12}+C_1\ln(r)\right)+C_2r+\frac{C_3}{r}. \tag{18}$$

Неизвестную функцию $w_0(r)$, описывающую прогиб срединной плоскости пластинки при $z=0$, определим из условия соответствия касательных напряжений τ_{zr} и перерезывающей силы Q_r

$$\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{zr}dz=Q_r=\frac{qr}{2}+\frac{C_1}{r}$$

или

$$G\int_{-h/2}^{h/2}\left(u_0+\frac{\partial w_0}{\partial r}-\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}ru_0\frac{z^2}{2}\right)dz=\frac{qr}{2}+\frac{C_1}{r}.$$

После интегрирования по толщине и по радиусу получим

$$\begin{aligned}w_0=\frac{qr^2}{64D}\left(6h^2-r^2\right)+C_1\frac{1}{8D}\left[\left(3h^2-4r^2\right)3\ln(r)+r^2\right]-\\-C_2\frac{r^2}{2}-C_3\ln(r)+C_4.\end{aligned} \tag{19}$$

Константы C_1, C_2, C_3, C_4 определяются из граничных условий жесткого закрепления по внешнему и внутреннему контурам пластинки.

Но и без определения констант видно, что в рассматриваемых вариантах полученного решения нет совпадения результатов. Достаточно сравнить результаты, представленные формулами (7) и соотношениями (18) и (19).

Для сплошной пластинки, жестко закрепленной по контуру. в силу ограниченности решения при $r=0$, константы $C_1=C_3=0$ в (18) и (19).

Тогда

$$\begin{aligned}u_0&=\frac{1}{D}\frac{qr^3}{16}+C_2r,\\ w_0&=\frac{qr^2}{64D}\left(6h^2-r^2\right)-C_2\frac{r^2}{2}+C_4.\end{aligned} \tag{20}$$

Выполнив граничные условия жёсткого защемления на контуре и получив значения констант C_2, C_4, получим решение для искомых функций перемещений и напряжений

$$
\begin{aligned}
&u_0=\frac{qr}{16D}(r^2-b^2), \quad u=u_0z,\\
&w_0=\frac{q(b^2-r^2)}{64D}(r^2-b^2-6h^2), \quad w=w_0-\frac{q}{16D}(2r^2-b^2)z^2,\\
&\sigma_z=-q\frac{z}{h}, \quad \sigma_r=\frac{3q}{8h^3}(5r^2-2b^2)z-\frac{q}{h}z,\\
&\sigma_\theta=\frac{3q}{8h^3}(3r^2-2b^2)z-\frac{q}{h}z,\\
&\tau_{rz}=\frac{3qr}{4h^3}(\frac{3}{4}h^2-z^2).
\end{aligned} \tag{21}
$$

Следует отметить, что граничные условия для функции прогиба удовлетворяются приближенно при $z=0$, т.е. для срединной плоскости, а условие отсутствия касательного напряжения на основаниях пластинки, как видно из четвёртого соотношения системы (21), не выполняется. Сравнивая (21) и (5) по перемещениям, отметим существенное несовпадение полученных результатов.

Определим максимальный прогиб в центре сплошной пластинки для двух вариантов решений представленных формулами (5) и (21), обозначив эти решения как w_1 и w_2, при этом, в решении для w_2 из (21) пренебрегаем h^2 по сравнению с b^2 и полагаем $z=0$, а $D=\frac{Gh^3}{3}$

$$
w_1=-\frac{qb^2}{4Gh}, \quad w_2=-\frac{3qb^4}{64Gh^3}. \tag{22}
$$

Сравнивая приведённые формулы, отметим, что максимальный прогиб w_2 значительно больше прогиба w_1 при одинаковых нагрузке, геометрии и материале.

Функция $w_0(r)$ из (21) была определена из условия соответствия касательного напряжения τ_{zr} перерезывающей силе Q_r. Можно определить τ_{zr} из условия равенства его нулю на основаниях пластинки и сравнить результаты. В этом случае решение для функции $w_0(r)$ выглядит так

$$
w_0=-\frac{q\left(b^2-r^2\right)}{64D}\left(b^2-r^2+2h^2\right).
$$

Определяя прогиб w в центре пластинки при $z=0$ и пренебрегая h^2 по сравнению с b^2, получим результат, совпадающий с решением, представленным вторым соотношением в (22).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получены простые решения для одноконтурной и двухконтурной осесимметричных пластинок из материала с неизменяемым объёмом, изгибаемых постоянной, распределённой по обоим основаниям нагрузкой при жёстком защемлении контуров, а также для двухконтурной пластинки со свободным от закрепления внутренним контуром. Показано, что отсутствие поперечной к основаниям пластинки деформации при реализации некоторых граничных условий является не гипотезой, как в классической теории, а следствием свойства постоянства объёма материала пластинки при её деформировании. При этом сдвиговые деформации в плоскости rz с целью устранения противоречия по отношению к условию несжимаемости принимаются не равными нулю, в отличие от классической теории.

Решение этих же задач получены с учётом поперечной к основаниям пластинки деформации в силу задания радиального перемещения как линейной функции поперечной координаты. Процесс решения проводился в двух вариантах: без перехода и с переходом к интегральным характеристикам напряжённого состояния, как в классической теории изгиба тонких пластин. При этом, в первом варианте получены результаты, полностью совпадающие с результатами предыдущих задач, а во втором варианте решения такого совпадения нет: радиальное перемещение и поперечная деформация не равны нулю, а прогиб, соответственно, является функцией радиальной координаты более высокого порядка. Сравнивая максимальные прогибы двух вариантов отметим очень существенное их расхождение, что дает основание предполагать, что переход к интегральным характеристикам напряженного состояния не всегда является корректным. Например, в случае независимости касательного напряжения от координаты z, его производная по z в уравнении равновесия равна нулю, а при записи уравнения через интегральные характеристики напряженного состояния в уравнении равновесия останется Q_r, не равное нулю, что существенно меняет решение задачи.

Показано, что наличие или отсутствие касательных напряжений на основаниях пластинки практически не оказывает влияния на максимальное значение прогиба в центре пластинки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев В.В., Лурье С.А. *К проблеме построения неклассических теорий пластин* // Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела. – 1990. – С.158-167.
2. Фирсанов Вик.В. *Особенности изгиба тонкой прямоугольной пластинки из материала с неизменяемым объёмом // Механика композиционных материалов и конструкций.* – 2018. – Т.24. – №3. – С.490-498.
3. Huu-Tai Thai, Seung-Eock Kim. *A review of theories for the modeling and analysis of functionally graded plates and shells* // Composite Structures. – 2015. – Vol.128. – Pp.70-86.
4. Durban D., Givoli D., Simmonds J.G. (Eds.) *Advances in the Mechanics of Plates and Shells. The Avinoam Libai Aniversary Volume.* –Netherlands: Springer, 2002. – 376 p.
5. Gorelik B.M., Fel'dman G.I., Maiskaya M.A. *Variability of Poisson's ratio in investigating the state of stress of rubber parts* // Mechanics of Composite Materials. – 1967. – Vol.3. – Iss.4. – Pp.502-504.
6. Pobedrya B.E. *Equations of state of viscoelastic isotropic media* // Mechanics of Composite Materials. – 1967. – Vol.3. – Iss.4. – Pp.429-432.
7. Елисеев В.В. *Механика деформируемого твердого тела.* – Санкт-Петербург, 2006. – 231с.
8. Treloar L.R.G. *The Physics of Rubber Elasticity*. – OUP Oxford, 2005. – 324 p.
9. Белоус П.А. *Осесимметричные задачи теории упругости*. – Одесса: ОГПУ, 2000. – 183 с.
10. Тимошенко С.П. *Курс теории упругости*. – Киев: Наукова думка, 1972. – 508 с.

11. El'kin A.I., Moskovkin A.I. *Investigation of the variation of the rubber shearing force during extended stationary contact under constant compressive strain* // Mechanics of Composite Materials. – 1971. – Vol.7. – Iss.4. – Pp.559-562.

REFERENCES

1. Vasil'ev V.V., Lurie S.A. *K probleme postroeniya neklassicheskikh teorij plastin [On the problem of constructing non-classical plate theories]*. Izv. AN SSSR. Mekhanika tvyordogo tela, 1990, Pp.158-167.
2. Firsanov Vic.V. *Osobennosti izgiba tonkoj pryamougol'noj plastinki iz materiala s neizmenyaemym ob"yomom [Features of the bending of a thin rectangular plate of material with an unchanged volume]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2018, Vol.24, No.3, Pp.490-498.
3. Huu-Tai Thai, Seung-Eock Kim. *A review of theories for the modeling and analysis of functionally graded plates and shells*. Composite Structures, 2015, Vol.128, Pp.70-86.
4. Durban D., Givoli D., Simmonds J.G. (Eds.) *Advances in the Mechanics of Plates and Shells. The Avinoam Libai Aniversary Volume*. Netherlands, Springer, 2002, 376 p.
5. Gorelik B.M., Fel'dman G.I., Maiskaya M.A. *Variability of Poisson's ratio in investigating the state of stress of rubber parts*. Mechanics of Composite Materials, 1967, Vol.3, Iss.4, Pp.502-504.
6. Pobedrya B.E. *Equations of state of viscoelastic isotropic media*. Mechanics of Composite Materials, 1967, Vol.3, Iss.4, Pp.429-432.
7. Yeliseyev V.V. *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela. [Mechanics of deformable solids]*. Sankt-Peterburg, 2006, 231 p.
8. Treloar L.R.G. *The Physics of Rubber Elasticity*. OUP Oxford, 2005, 324 p.
9. Belous P.A. *Osesimmetrichnye zadachi teorii uprugosti [Axisymmetric problems of the theory of elasticity]*. Odessa, OGPU, 2000, 183 p.
10. Timoshenko S.P. *Kurs teorii uprugosti [Course of theory of elasticity]*. Kiev, Naukova dumka, 1972, 508 p.
11. El'kin A.I., Moskovkin A.I. *Investigation of the variation of the rubber shearing force during extended stationary contact under constant compressive strain*. Mechanics of Composite Materials, 1971, Vol.7, Iss.4, Pp.559-562.

Поступила в редакцию 26 ноября 2018 года.

Сведения об авторе:

Фирсанов Виктор Васильевич – к.т.н., доц., Кафедра «Проектирование и прочность авиационно-ракетных и космических изделий», ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт» (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия; e-mail: kaf603@mai.ru