

УДК 539.4

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЯВЛЕНИЯ МАРТЕНСИТНОЙ НЕУПРУГОСТИ В СПЛАВАХ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ С УЧЕТОМ ИХ РАЗНОСОПРОТИВЛЯЕМОСТИ\*

Саганов Е.Б.

*Институт прикладной механики Российской академии наук, г. Москва, Россия  
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия*

### АННОТАЦИЯ

Работа посвящена численному моделированию явления мартенситной неупругости в сплавах с памятью формы (СПФ) с учетом их разносопротивляемости. Под разносопротивляемостью понимается зависимость напряженно-деформированного состояния (НДС) этих сплавов от вида напряженного состояния. В качестве параметра вида напряженного состояния используется параметр, связанный с третьим инвариантом девиатора напряжений.

Численное моделирование процесса мартенситной неупругости ведется в рамках модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях. В ходе работы выполнено интегрирование соотношений, описывающих поведение СПФ при монотонном активном нагружении в низкотемпературном мартенситном фазовом состоянии, в конечно-элементный комплекс Simulia Abaqus посредством использования процедуры создания пользовательского материала. С этой целью выполнено обращение соотношений, устанавливающих взаимосвязь между компонентами приращений тензоров полных деформаций и напряжений с целью получения касательной матрицы жесткости, используемой в качестве физического закона для каждого элемента модели.

Процесс валидации модуля, разработанного для конечно-элементного анализа НДС конструкций, содержащих СПФ, выполнен с использованием имеющихся экспериментальных данных для одноосного растяжения и сжатия образцов из этих сплавов. Проведено сравнение диаграмм деформирования, полученных при конечно-элементном моделировании явления мартенситной неупругости в трехмерной постановке с экспериментальными кривыми.

В рамках работы произведен расчет НДС сферической толстостенной оболочки из СПФ под действием внутреннего и внешнего давления. Установлено, что в процессе деформирования оболочки внутренним давлением для каждого элемента по толщине оболочки параметр вида напряженного состояния принимает значение соответствующие одноосному сжатию, а для случая внешнего давления – одноосному растяжению.

**Ключевые слова:** сплавы с памятью формы; мартенситная неупругость; разносопротивляемость; сферическая оболочка; давление

## NUMERICAL MODELING OF THE PHENOMENA OF MARTENSITE INELASTICITY IN SHAPE MEMORY ALLOYS WITH ACCOUNT OF THEIR TENSION-COMPRESSION ASYMETRY

Saganov E.B.

\* Работа выполнена при финансовом содействии РФФИ, проект № 17-01-00216.

## ABSTRACT

The work is devoted to the numerical simulation of the phenomenon of martensitic inelasticity in shape memory alloys (SMA), taking into account their tension-compression asymmetry. Under tension-compression asymmetry is meant the dependence of the stress-strain state of these alloys on the type of stress state. The parameter associated with the third invariant of the stress deviator is used as a parameter of the type of stress state.

Numerical simulation of the process of martensitic inelasticity is carried out in the framework of the model of nonlinear deformation of SMA in phase and structural transformations. In the course of the work, the integration of relations describing the behavior of the SMA under monotonous active loading in the low-temperature martensitic phase into the finite-element complex of Simulia Abaqus was performed using the procedure for creating user material. For this purpose, relations are reversed that establish the relationship between the components of the tensors of total deformations and stresses in order to obtain a tangent stiffness matrix used as a physical law for each element of the model.

The process of validation of the module, developed for the finite-element analysis of the stress-strain state of structures containing SMA, was performed using the available experimental data for uniaxial tension and compression of samples from these alloys. A comparison is made of the deformation diagrams obtained by finite-element modeling of the phenomenon of martensitic inelasticity in a three-dimensional in space formulation with experimental curves.

As part of the work, the stress-strain state of a spherical thick-walled shell from SMA under the action of internal and external pressure was calculated. It was established that in the process of deformation of the shell by internal pressure for each element through the thickness of the shell, the parameter of the type of stress state takes on the value corresponding to pure compression, and for the case of external pressure, pure tension.

**Keywords:** shape memory alloys; martensite inelasticity; tension-compression asymmetry; spherical shell; pressure

## ВВЕДЕНИЕ

Практическое применение СПФ [1] в различных технических приложениях сдерживается недостаточной разработанностью методов решения краевых задач механики для этих сплавов [2]. Данная тенденция обусловлена сложностью определяющих соотношений для СПФ, для которых зачастую невозможно получить аналитическое решение рассматриваемой краевой задачи. Кроме этого экспериментально установлено, что напряженно-деформированное состояние СПФ существенно зависит от вида напряженного состояния [3]. Данные сплавы являются разносопротивляющимися растяжению-сжатию и их соответствующие диаграммы деформирования имеют качественные различия. Для корректного описания поведения СПФ с учетом их разносопротивляемости требуется определение зависимости материальных констант и функций сплава от параметра вида напряженного состояния, что требует проведения большого объема экспериментальных работ. В виду этого рассмотрение краевых задач в основном ведется в одномерной и редко двухмерной, по пространству, постановках. В трудах [4-6] рассмотрены задачи о чистом изгибе балки из СПФ в рамках моделей [7] и [8-10] при различных механизмах термо-силового воздействия, с учетом разносопротивляемости этих сплавов. Работы [11-13] посвящены

решению краевых задач механики СПФ без учета свойства асимметрии кривых деформирования. Работы [14-16] посвящены задачам о потере устойчивости элементов из СПФ, вызванной обратными термоупругими фазовыми превращениями, при решении которых требуется учет влияния вида напряженного состояния на процесс деформирования СПФ.

Решением отмеченных проблем может стать применение при решении задач механики СПФ конечно-элементных комплексов. Ряд коммерческих конечно-элементов комплексов, таких как MSC Marc, Femap/NX Nastran имеют встроенные в расчетные модули модели поведения СПФ [17,18]. Однако в рамках данных моделей невозможно провести корректное моделирование процессов деформирования СПФ с учетом их разносопротивляемости. В работах [19-22] выполнено численное моделирование термомеханических процессов, протекающих в СПФ посредством создания пользовательских моделей материалов в конечно-элементном комплексе Simulia Abaqus. Рассмотрение задач велось в рамках моделей [23-26], которые не позволяют описать зависимость НДС в СПФ от вида напряженного состояния.

Данная работа посвящена интегрированию модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях [8-10] в конечно-элементный комплекс Simulia Abaqus посредством процедуры пользовательского материала. Разработанный модуль позволит проводить численное моделирование процесса деформирования СПФ в низкотемпературном мартенситном фазовом состоянии в трехмерной постановке с учетом разносопротивляемости этих сплавов.

## 1. СИСТЕМА ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ

В рамках модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях [8-10] предполагается аддитивное представление тензора полных деформаций, при их малости. Для случая изотермического пропорционального нагружения образца из СПФ в низкотемпературном мартенситном фазовом состоянии полные деформации определяются следующим образом

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^{st}$$

где  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}^e$ ,  $\varepsilon_{ij}^{st}$  – полная, упругая, и структурная деформации соответственно.

Упругие деформации определяются как приведено ниже

$$\varepsilon_{ij}^e = \varepsilon_{ij}^{e'} + \varepsilon_{ij}^e, \quad \varepsilon_{ij}^{e'} = \frac{\sigma_{ij}'}{2G(q)}, \quad \varepsilon_{kk}^e = \frac{\sigma_{kk}}{K(q)}$$

$$\frac{1}{G(q)} = \frac{q}{G_M} + \frac{1-q}{G_A}, \quad \frac{1}{K(q)} = \frac{q}{K_M} + \frac{1-q}{K_A}$$

здесь  $\varepsilon_{ij}^{e'}$ ,  $\varepsilon_{kk}^e$  – девиатор и шаровая часть тензора упругих деформаций,  $\sigma_{ij}'$ ,  $\sigma_{kk}$  – девиатор и шаровая часть тензора напряжений,  $G_A$ ,  $G_M$ ,  $K_A$ ,  $K_M$  – модуль сдвига и утроенный объемный модуль СПФ в аустенитном и мартенситном фазовом состоянии соответственно,  $q$  – параметр фазового состава (объемная доля мартенситной фазы).

В модели [8-10] структурные деформации отсчитываются от состояния хаотического мартенсита, который уже обладает деформацией объемного эффекта

реакции прямого превращения. Поэтому структурные деформации состоят только из девиаторной части. Кроме этого напряженно-деформированное состояние образца из СПФ при изотермическом монотонном пропорциональном нагружении в мартенситном фазовом состоянии зависит от пути нагружения. Поэтому уравнение для вычисления структурных деформаций имеет дифференциальный вид и в общем случае не может быть проинтегрировано

$$d\varepsilon_{ij}^{st'} = \frac{3}{2} \rho_d (\mu_\sigma) q \frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i} \Psi_2(\sigma_i) d\sigma_i \text{ при } d\sigma_i > 0, \text{ иначе } d\varepsilon_{ij}^{st'} = 0$$

здесь  $\rho_d$  – интенсивность кристаллографической деформации,  $\sigma_i$  – интенсивность напряжений,  $\mu_\sigma$  – параметр вида напряженного состояния,  $\Psi_2(\sigma_i)$  – дифференциальная плотность распределения интенсивности микронапряжений в представительном объеме образца из СПФ в мартенситном фазовом состоянии. Интеграл от функции  $\Psi_2(\sigma_i)$ , то есть интегральная функция соответствующего распределения с точностью до множителя, определяет диаграмму мартенситной неупругости (график зависимости интенсивности структурной деформации, генерируемой при изотермическом монотонном пропорциональном нагружении СПФ в мартенситном фазовом состоянии от интенсивности напряжений). На основе экспериментальных данных [3] установлено, что для аппроксимации диаграммы мартенситной неупругости наилучшим образом подходит  $\gamma$  распределение, такое, что функция  $\Psi_2(\sigma_i)$  запишется следующим образом

$$\Psi_2(\sigma_i) = \frac{1}{\Gamma(\alpha(\mu_\sigma))} \left( \frac{\sigma_i}{\sigma_0(\mu_\sigma)} \right)^{\alpha(\mu_\sigma)-1} \exp\left( \frac{-\sigma_i}{\sigma_0(\mu_\sigma)} \right) \frac{1}{\sigma_0(\mu_\sigma)}$$

где  $\alpha$ ,  $\sigma_0$  – параметры материала,  $\Gamma$  – гамма функция.

В работе [27] в качестве параметра вида напряженного состояния  $\mu_\sigma$  для СПФ предлагается использовать параметр, связанный со вторым и третьим инвариантом девиатора напряжений, такой что

$$\mu_\sigma = \frac{27 J_3}{2 \sigma_i^3}$$

здесь  $J_3$  – третий инвариант девиатора напряжений. Параметр  $\mu_\sigma$  может принимать значение от 1 (одноосное растяжение) до -1 (одноосное сжатие). Случай, когда  $\mu_\sigma=0$  соответствует чистому сдвигу. В текущей работе предполагается линейная зависимость материальных констант  $\alpha$ ,  $\sigma_0$  и  $\rho_d$  от параметра  $\mu_\sigma$ .

## 2. РАЗРАБОТКА МОДЕЛИ ПОЛЬЗОВАТЕЛЬСКОГО МАТЕРИАЛА

Для реализации в программном комплексе Simulia Abaqus модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях, в качестве пользовательского материала по технологии UMAT, требуется явное вычисление компонент касательной матрицы жесткости  $C_{ijkl}$ . Компоненты матрицы  $C_{ijkl}$  связывают компоненты тензоров приращений напряжений

и приращений деформаций. В рамках модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях определяющие соотношения разрешены относительно приращений деформаций и для определения матрицы  $C_{ijkl}$  требуется их обращение.

Уравнение для девиатора упругой и структурной деформации имеет следующий вид

$$d\varepsilon'_{ij} = \frac{d\sigma'_{ij}}{2G(q)} + \frac{3}{2}\rho_d(\mu_\sigma)\frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i}\Psi_2(\sigma_i)d\sigma_i \quad (2.1)$$

Для обращения уравнения (2.1) требуется выразить  $d\sigma_i$  через  $d\sigma'_{ij}$  и  $d\varepsilon'_{ij}$ .

Выразим из (2.1)  $d\sigma'_{ij}$

$$d\sigma'_{ij} = 2G(q)\left(d\varepsilon'_{ij} - \frac{3}{2}\rho_d(\mu_\sigma)\frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i}\Psi_2(\sigma_i)d\sigma_i\right) \quad (2.2)$$

Умножим левую и правую часть (2.2) на  $\frac{3}{2}\frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i}$  и учтем, что  $\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}}$ .

После соответствующих преобразований, можно получить

$$d\sigma_i = \frac{3G(q)d\varepsilon'_{ij}\sigma'_{ij}}{\sigma_i(1+3G(q)\rho_d(\mu_\sigma)\Psi_2(\sigma_i))} \quad (2.3)$$

Подставляя (2.3) в (2.2) получим

$$d\sigma'_{ij} = 2Gd\varepsilon'_{ij} - \lambda\sigma'_{ij}\sigma'_{kl}d\varepsilon'_{kl}$$

где  $\lambda = 9\rho_d(\mu_\sigma)\frac{G(q)^2}{\sigma_i^2}\frac{\Psi_2(\sigma_i)}{(1+3G(q)\rho_d(\mu_\sigma)\Psi_2(\sigma_i))}$ . Таким образом, матрица  $C_{ijkl}$

для девиаторных составляющих записывается как приведено ниже

$$C_{ijkl} = \begin{pmatrix} 2G - \lambda & -\lambda & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 2G - \lambda & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & -\lambda & 2G - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G - \frac{\lambda}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G - \frac{\lambda}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G - \frac{\lambda}{2} \end{pmatrix}$$

Компоненты шаровой части тензора приращений напряжений определяются следующим образом

$$d\sigma_{kk} = K(q)d\varepsilon_{kk}$$

здесь  $d\varepsilon_{kk}$  – первый инвариант приращения тензора деформаций.

Приращение компонент тензора напряжений вычисляется, как представлено ниже

$$d\sigma_{ij} = \frac{1}{3}\delta_{ij}d\sigma_{kk} + d\sigma'_{ij}$$

Построенная пользовательская модель ориентирована на численное решение задач механики СПФ в геометрически линейной постановке при малых деформациях. При этом начальная и актуальная конфигурация не отличаются.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Валидация пользовательской модели материала осуществлена на основе экспериментальных данных [3]. Ниже приведено сравнение диаграмм деформирования образца из СПФ, находящего в мартенситном фазовом состоянии (интенсивность напряжений  $\sigma_i$  - интенсивность полных деформаций  $\varepsilon_i$ ), полученных при численном моделировании и испытаниях образцов из СПФ.

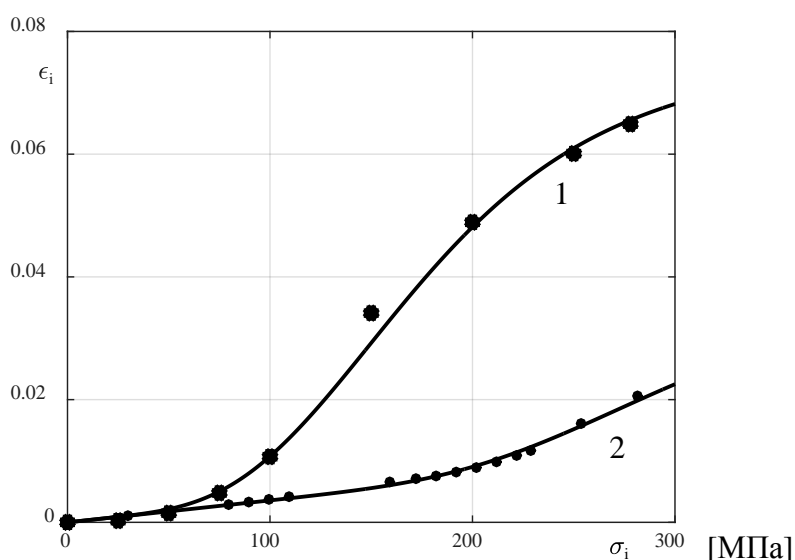


Рис.3.1. Кривые  $\sigma_i - \varepsilon_i$ .

Сплошные линии на рис.3.1 являются результатами численного моделирования, точки – данные из эксперимента. Кривая 1 соответствует случаю одноосного растяжения образца из СПФ, 2 – одноосному сжатию. При моделировании использованы следующие значения материальных констант, для случая чистого растяжения:  $\rho_d^t=0.0608$ ,  $\sigma_0^t=27.4$ ,  $\alpha^t=6.45$ , для случая чистого сжатия:  $\rho_d^c=0.02$ ,  $\sigma_0^c=18$ ,  $\alpha^c=16.08$ .

В ходе работы была численно решена задача о толстостенной сфере из СПФ, находящейся под действием монотонного возрастающего внутреннего или внешнего давления. Отношение внутреннего к внешнему радиусу сферы было принято равным 0.5. Величина внутреннего радиуса  $a=5$  мм, внешнего  $b=10$  мм. Рассмотрение задачи велось в сферической системе координат  $r - \theta - \varphi$ , с учетом симметрии, поэтому конечно-элементная модель (КЭМ) разработана только для четверти сферы. При закреплении модели также использовались условия симметрии. Общий вид КЭМ сферы, а также точки замера перемещений представлены на рис.3.2.

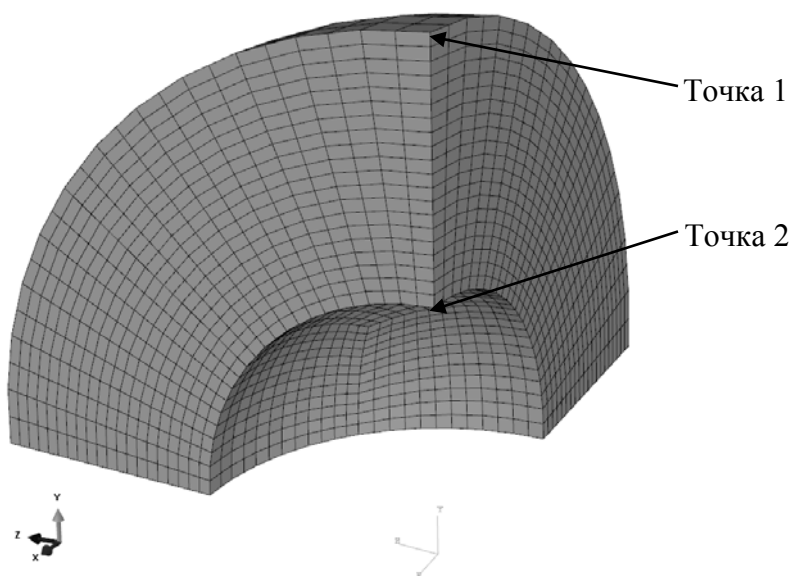
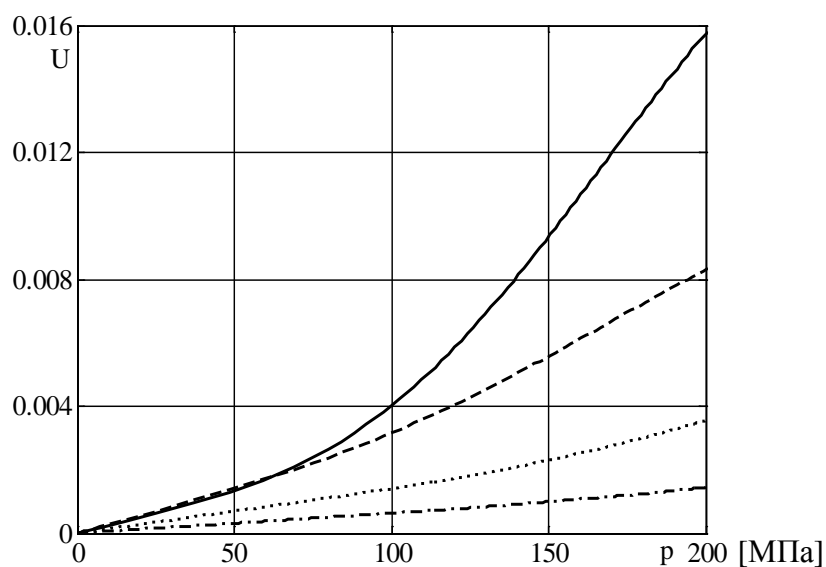


Рис.3.2. КЭМ сферы.

Тип элемента при моделировании: С3D8Н. В ходе решения получена зависимость модуля безразмерных радиальных перемещений  $U = U_r / b$  точек 1 и 2, расположенных на внешней и внутренней поверхностях сферы от величины действующего давления  $p$  (рис.3.3). Здесь  $U_r$  - радиальные перемещения точек 1 и 2.

Рис.3.3. Зависимость  $U - p$ .

На рис.3.3 две нижние кривые соответствуют случаю внутреннего давления. Штрих-пунктирная линия – точка 1, пунктирная – точка 2. Две верхние кривые соответствуют случаю внешнего давления. Штриховая линия – точка 1, сплошная – точка 2. Как видно из приведенного рисунка смещения контрольных точек 1,2, на момент окончания нагружения, для случая внешнего давления более чем в три раза превышают смещения данных точек на случай внутреннего давления.

В ходе решения было установлено, что в случае действия как внутреннего, так и внешнего давления распределение параметра  $\mu_\sigma$  сечению сферы является однородным. В случае действия внутреннего давления для всего материала сферы  $\mu_\sigma = -1$ , то есть вид девиатора напряжений такой же, как при одноосном сжатии. В случае действия внешнего давления, напротив, для всего материала сферы  $\mu_\sigma = 1$ , то есть вид девиатора напряжений такой же, как и при одноосном растяжении. Вследствие этого при численном моделировании используются разные значения материальных констант, и этим объясняется разница модуля радиальных смещений контрольных точек 1,2 при действии внутреннего или внешнего давлений.

При рассмотрении задачи установлено, что в процессе роста внешнего или внутреннего давления напряжения по сечению сферы меняются не монотонно. Соответственно, при решении аналогичной задачи аналитическими методами нельзя применять положение об активных процессах пропорционального нагружения, [8] и использовать конечные соотношения, связывающие интенсивности напряжений и деформаций.

На рис.3.4, 3.5 приведены эпюры радиальных и кольцевых напряжений  $\sigma_r, \sigma_\theta$  по сечению сферы для случая действия внутреннего давления. Эпюры построены для различных этапов нагружения и соответствуют величине давления  $p$  следующим образом, кривая 1 -  $p = 50$  МПа, 2 -  $p = 100$  МПа, 3 -  $p = 150$  МПа, 4 -  $p = 175$  МПа, 5 -  $p = 200$  МПа. Здесь  $\xi = r/b$  - безразмерная радиальная координата, где  $r$  - текущий радиус.

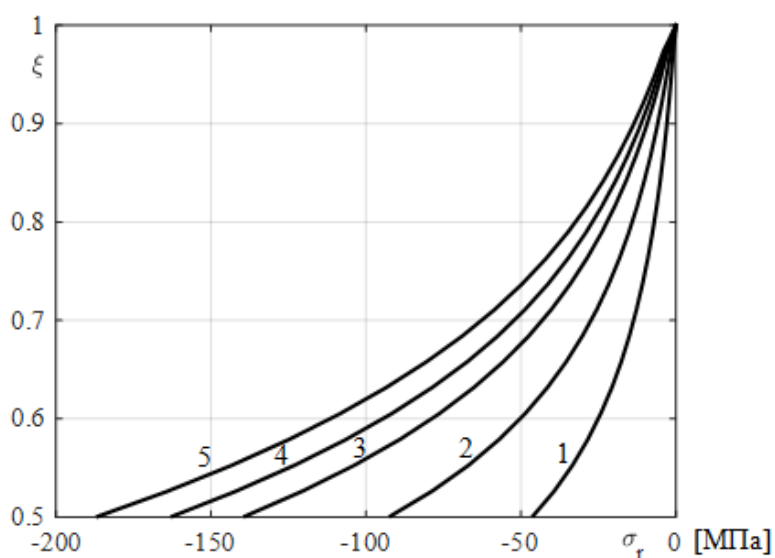


Рис.3.4. Эпюра  $\sigma_r$ . Внутреннее давление.

На основе рис.3.4 можно заключить, что распределение  $\sigma_r$  по сечению сферы является нелинейным. Максимальное значение  $\sigma_r = p$  отмечается на внутренней поверхности сферы, на внешней поверхности  $\sigma_r = 0$ , что соответствует граничным условиям рассматриваемой задачи.



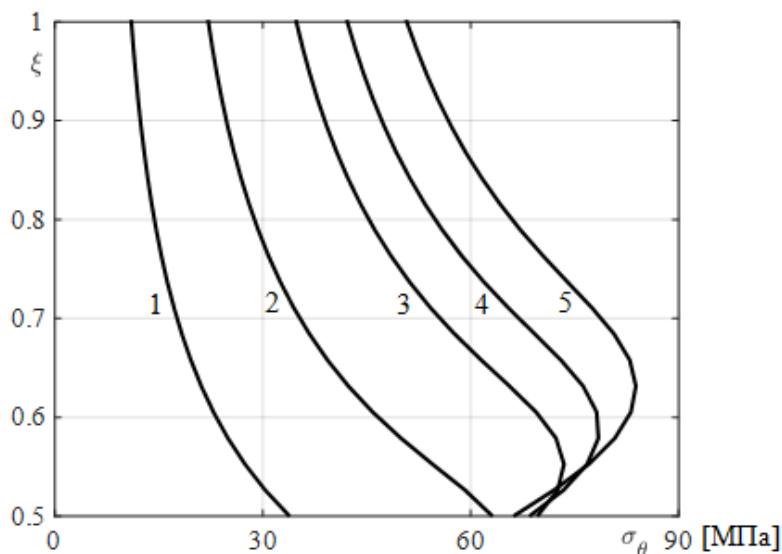


Рис.3.5. Эпюра  $\sigma_\theta$ . Внутреннее давление.

Из рис.3.5 видно, что в процессе нагружения кольцевые напряжения  $\sigma_\theta$  меняются по сечению немонотонно. Так при уровне внутреннего давления порядка  $p = 150$  МПа происходит разгрузка на внутренней поверхности сферы и смещение зоны максимума  $\sigma_\theta$  вглубь сечения. Данная тенденция подтверждается при рассмотрении аналогичной задачи в упруго-пластической постановке.

На рис.3.6 приведены эпюры  $\sigma_r$  по сечению сферы на случай действия внешнего давления. Правило расположения кривых совпадает с рис.3.4. Как и в случае действия внутреннего давления напряжения  $\sigma_r$  имеют нелинейное распределение по сечению сферы из СПФ.

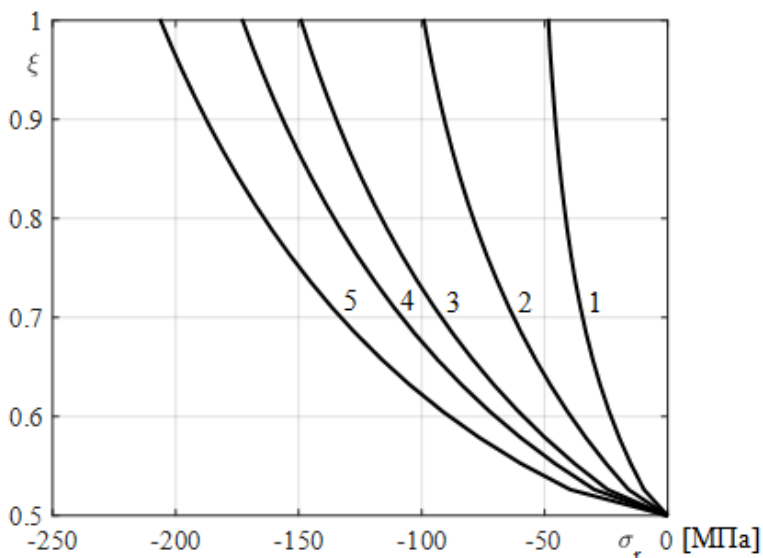


Рисунок 3.6. Эпюра  $\sigma_r$ . Внешнее давление.

На рис.3.7 приведены эпюры кольцевых напряжений  $\sigma_\theta$  на случай действия внешнего давления. Правило расположения кривых совпадает с рис.3.4. Исходя

из приведенных данных, можно отметить зону разгрузки вблизи внутренней поверхности, которая начинает проявляться при величине давления порядка  $p=175$  МПа. При этом для малых значений  $p$  распределение  $\sigma_\theta$  по сечению сферы из СПФ близко к однородному.

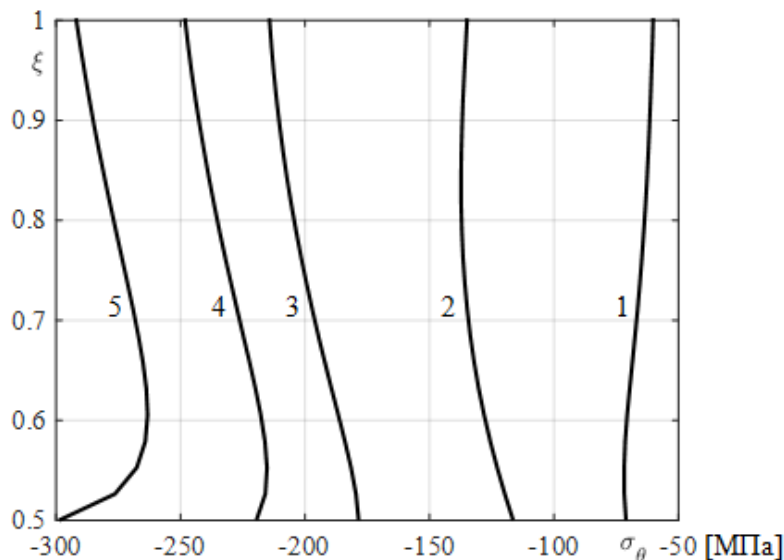


Рисунок 3.7. Эпюра  $\sigma_\theta$ . Внешнее давление.

## ВЫВОДЫ

В ходе работы построена пользовательская модель СПФ на основе определяющих соотношений модели нелинейного деформирования этих сплавов при фазовых и структурных превращениях, интегрированная в конечно-элементный комплекс Simulia Abaqus посредством процедуры UMAT. На основе экспериментальных данных произведена валидация модели. Рассмотрена и численно решена задача о толстостенной сфере из СПФ, находящейся под действием монотонного возрастающего внутреннего или внешнего давления. Установлено, что в процессе нагружения параметр вида девиатора напряжений имеет однородное распределение по сечению сферы из СПФ и не меняется в процессе нагружения. Для случая действия внутреннего давления вид девиатора напряжений такой же, как для случая одноосного сжатия, а для случая внешнего давления – такой же, как для случая одноосного растяжения. Поэтому при учете разнсопротивляемости СПФ деформативность сферы при действии внешнего давления получается существенно выше, чем при действии внутреннего давления. Отмечено, что в процессе нагружения как радиальные, так и кольцевые напряжения меняются немонотонно и имеют нелинейное распределение по сечению сферы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Лихачев В.А., Кузьмин С.Л., Каменцева З.П. *Эффект памяти формы*. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1987. – 216 с.
2. Мовчан А.А., Казарина С.А., Машихин А.Е., Мишустин И.В., Саганов Е.Б., Сафронов П.А. *Краевые задачи механики для сплавов с памятью формы // Ученые записки Казанского университета* – 2015. – Т.157. – С.97-110.

3. Мовчан А.А., Казарина С.А., Сильченко А.Л. Экспериментальная идентификация модели нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях // Деформация и разрушение материалов. – 2018. – №12. – С.2-11.
4. Reza Mirzaeifar, Reginald DesRoches, ArashYavari, Ken Gall. *On superelastic bending of shape memory alloy beams* // Intern. J. of Solids and Structures. – 2013. – Vol.50 – Pp.1664-1680.
5. Сафронов П.А. *Решение задач о мартенситной неупругости и прямом фазовом превращении в балке из сплава с памятью формы с учетом упругих деформаций и разнсопротивляемости этих сплавов* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2017. – Т.23. – №1. – С.69-89.
6. Сафронов П.А. *Цилиндрический изгиб пластинок из сплава с памятью формы с учетом разнсопротивляемости этого материала* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т. 24. – №2. – С.186-206.
7. Boyd J.G., Lagoudas D.C. *Thermodynamical constitutive model for shape memory materials. part I. the monolithic shape memory alloy.* // Intern J of Plasticity – 1996. – Vol.12(6) – Pp.805-842.
8. Мовчан А.А., Мовчан И.А., Сильченко Л.Г. *Микромеханическая модель нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях* // Известия РАН. МТТ. – 2010. – №3. – С.118-130.
9. Мишустин И.В., Мовчан А.А. *Моделирование фазовых и структурных превращений в сплавах с памятью формы, происходящих под действием немонотонно меняющихся напряжений* // Известия РАН. МТТ. – 2014. – №1. – С.37-53.
10. Мовчан А. А., Мишустин И. В., Казарина С. А. *Вариант микроструктурной модели деформирования сплавов с памятью формы* // Деформация и разрушение материалов – 2017. – №5. – С.6-11.
11. Мовчан А.А. *Аналитическое решение задач о прямом и обратном превращении для сплавов с памятью формы* // Известия АН. Механика твердого тела. – 1996. – № 4. – С.136-144.
12. Машихин А.Б., Мовчан А.А. *Задача о прямом мартенситном превращении в толстостенном цилиндре из сплава с памятью формы* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2016. – №3. – С.100-114.
13. Саганов Е.Б. *Учет неоднородности упрочнения сплава с памятью формы в задаче о прямом мартенситном превращении в стержне круглого поперечного сечения при кручении* // Механика композиционных материалов и конструкций. 2018. – Т.24. – №1. – С.82-92.
14. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г. *Аналитическое решение связанной задачи об устойчивости пластины из сплава с памятью формы при обратном мартенситном превращении* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2004. – №5. – С.164-178.
15. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г. *Потеря устойчивости круглой пластины из сплава с памятью формы, вызванная обратным термоупругим мартенситным превращением* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2008. – №1. – С.117-130.
16. Думанский С.А., Мовчан А.А. *Дважды связанная постановка задачи о потере устойчивости вызванной обратным термоупругим фазовым превращением в*

сплаве с памятью формы // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2017. – №5. – С.37-48.

17. Saeedvafa M., Assaro R. LA-UR-95-482 / Los Alamos Report. – 1995.
18. Auricchio F., Sacco E. *A temperature-dependent beam for shape memory alloys: constitutive modeling, finite-element implementation and numerical simulation* // Computer methods in applied mechanics and engineering. – 1999. – Vol.174. – Iss.1-2. – Pp.171-190.
19. Нуштаев Д.В., Жаворонок С.И., Клышников К.Ю., Овчаренко Е.А. *Численно-экспериментальное исследование деформирования и устойчивости цилиндрической оболочки ячеистой структуры при осевом сжатии* // Труды МАИ. – 2015. – №82. – С.27.
20. Nushtaev D.V., Zhavoronok S.I. *Dynamics of martensite phase transitions in shape memory beams under buckling and postbuckling conditions* // IFAC Papers OnLine. – 2018. – Vol.51. – No.2. – Pp.873-878.
21. Banderia E., Savi M., Monteiro P. Jr. *Finite element analysis of shape memory alloy adaptive trusses with geometrical nonlinearities* // Archive of Applied Mechanics. – 2006. – Vol.76. – Pp.133-144.
22. Alipour A., Kadkhodaei M., Ghaei A. *Finite element simulation of shape memory alloy wires using a user material subroutine: Parametric study on heating rate, conductivity, and heat convection* // J. of Intelligent Material Systems and Structures. – 2015. – Vol.26. – Iss.5. – Pp.1-19.
23. Dhala S., Mishara S., Alankar A. *Three Dimensional Crystal Plasticity Finite Element simulation of notched tensile samples of pseudoelastic NiTi Shape Memory Alloys* // Procedia Engineering. – 2017. – Vol.173. – Pp.786-792.
24. Tobushi H., Iwanaga N., Tanaka K., Hori T., Sawada T. *Deformation behavior of Ni-Ti shape memory alloy subjected to variable stress and temperature* // Continuum Mechanics and Thermodynamics. – Vol.3. – Iss.2. – Pp.79-93.
25. Brinson L.C. *One-dimensional constitutive behavior of shape memory alloys: thermomechanical derivation with non-constant material functions and redefined martensite internal variable* // J. of Intelligent Material Systems and Structures. – 1993. – Vol.4. – Iss.2. – Pp.229-242.
26. Anand L., Gurtin M.E. *Thermal effects in the superelasticity of crystalline shape-memory materials* // J. of the Mechanics and Physics of Solids – 2003. – Vol.51. – Iss.6. – Pp.1015-1058.
27. Lexcellent Ch., Boubakar M., Bouvet Ch., Calloch S. *About modeling the shape memory alloy behavior based on the phase transformation surface identification under proportional loading and anisothermal conditions* // Intern. J. of Solids and Structures. – 2006. – Vol.43. – Pp.613-626.

## REFERENCES

1. Likhachev V.A., Kuz'min S.L., Kamentseva Z.P. *Effekt pamiati formy [Shape memory effect]*. Leningrad, Izd-vo Leningrdscoغو Universiteta, 1987, 216 p.
2. Movchan A.A., N'iunt S., Semenov V.N. *Proektirovanie silovozbuditel'ia krutiashchego momenta iz splava s pamiat'iu formy [Design of the torque exciter force generator from the shape memory alloy]*. Trudy TsAGI, 2004, Vol.2664, Pp.220-230.
3. Movchan A.A., Kazarina S.A., Sil'chenko A.L. *Experimental Identification of a Nonlinear Deformation Model for a Shape Memory Alloy during Phase and*

- Structural Transformations*. Russian Metallurgy (Metally), 2019, No.4, Pp.301-308.
4. Reza Mirzaeifar, Reginald DesRoches, ArashYavari, Ken Gall *On superelastic bending of shape memory alloy beams*. Intern. J. of Solids and Structures, 2013, Vol.50, Pp.1664-1680.
  5. Safronov P.A. *Reshenie zadach o martensitnoj neuprugosti i pryamom fazovom prevrashchenii v balke iz splava s pamyat'yu formy s uchetom uprugih deformatsij i raznosoprotivlyaemosti etih splavov [Solving problems of martensitic inelasticity and direct phase transformation in a beam from an alloy with shape memory, taking into account the elastic deformations and the different resistance of these alloys]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2017, Vol.23, No.1, Pp.69-89.
  6. Safronov P.A. *Cilindricheskij izgib plastinok iz splava s pamyat'yu formy s uchetom raznosoprotivlyaemosti etogo materiala [Cylindrical bending of plates made of an alloy with shape memory, taking into account the different resistance of this material]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2018, Vol.24, No.2, Pp.186-206.
  7. Boyd J.G., Lagoudas D.C. *Thermodynamical constitutive model for shape memory materials. part I. the monolithic shape memory alloy*. Intern. J. of Plasticity, 1996, Vol.12(6), Pp.805-842.
  8. Movchan A.A., Movchan I.A., Sil'chenko L.G. *Micromechanical model of non-linear deformation of shape memory alloys under phase and structure transformation*. Mechanics of Solids, 2010, Vol.45, No.3, Pp.406-416.
  9. Mishustin I.V., Movchan A.A. *Modeling of phase and structure transformations occurring in shape memory alloys under nonmonotonically varying stresses*. Mechanics of Solids, 2014, Vol.49, No.1, Pp.27-39.
  10. Movchan A.A., Mishustin I. V., Kazarina S. A. *Microstructural Model for the Deformation of Shape Memory Alloys*. Russian Metallurgy (Metally), 2018, No.4, Pp.316-321.
  11. Movchan A.A. *Analytical solution of problems on the direct and inverse transformations in shape memory alloys*. Mechanics of Solids, 1996, Vol.31, No.4, Pp.116-123.
  12. Mashikhin A.E., Movchan A.A. *Problem of Direct Martensite Transformation in a Thick-Walled Cylinder Made of Shape Memory Alloy*. Mechanics of Solids, 2016, Vol.51, No.3, Pp.321-333.
  13. Saganov E.B. *Uchet neodnorodnosti uprochneniya splava s pamyat'yu formy v zadache o pryamom martensitnom prevrashchenii v sterzhne kruglogo poperechnogo secheniya pri krucheni [Consideration of the non-uniformity of hardening of a shape memory alloy in the problem of direct martensitic transformation in a rod of circular cross section during torsion]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2018, Vol.24, No.1, Pp.82-92.
  14. Movchan A.A., Sil'chenko L.G. *Analytical solution of the coupled buckling problem for a plate from a shape memory alloy subjected to inverse martensite formation*. Mechanics of Solids, 2004, Vol.39, No.5, Pp.134-145.
  15. Movchan A.A., Sil'chenko L.G. *Buckling of a circular plate made of a shape memory alloy due to a reverse thermoelastic martensite transformation*. Mechanics of Solids, 2008, Vol.43, No.1, Pp.100-111.

16. Dumanskii S.A., Movchan A.A. *Two-Way Coupled Statement of the Problem of Loss of Stability due to Inverse Thermoelastic Phase Transition in a Shape Memory Alloy*. Mechanics of Solids, 2017, Vol.52, No.5, Pp.501-510.
17. Saeedvafa M., Assaro R. LA-UR-95-482. Los Alamos Report, 1995.
18. Auricchio F., Sacco E. *A temperature-dependent beam for shape memory alloys: constitutive modeling, finite-element implementation and numerical simulation*. Computer methods in applied mechanics and engineering, 1999, Vol.174, Iss.1-2, Pp.171-190.
19. Nushtaev D.V., Zhavoronok S.I., Klyshnikov K.YU., Ovcharenko E.A. *Chislennno-eksperimental'noe issledovanie deformirovaniya i ustojchivosti cilindricheskoj obolochki yacheistoj struktury pri osevom szhatii [Numerical-experimental study of the deformation and stability of a cylindrical shell of a cellular structure under axial compression]*. Trudy MAI, 2015, Iss.82, Pp.27.
20. Nushtaev D.V., Zhavoronok S.I. *Dynamics of martensite phase transitions in shape memory beams under buckling and postbuckling conditions* // IFAC Papers OnLine, 2018, Vol.51, No.2, Pp.873-878.
21. Banderia E., Savi M., Monteiro P. Jr. *Finite element analysis of shape memory alloy adaptive trusses with geometrical nonlinearities*. Archive of Applied Mechanics, 2006, Vol.76, Pp.133-144.
22. Alipour A., Kadkhodaei M., Ghaei A. *Finite element simulation of shape memory alloy wires using a user material subroutine: Parametric study on heating rate, conductivity, and heat convection*. J. of Intelligent Material Systems and Structures, 2015, Vol.26, Iss.5, Pp.1-19.
23. Dhala S., Mishara S., Alankar A. *Three Dimensional Crystal Plasticity Finite Element simulation of notched tensile samples of pseudoelastic NiTi Shape Memory Alloys*. Procedia Engineering, 2017, Vol.173, Pp.786-792.
24. Tobushi H., Iwanaga N., Tanaka K., Hori T., Sawada T. *Deformation behavior of Ni-Ti shape memory alloy subjected to variable stress and temperature*. Continuum Mechanics and Thermodynamics, 1991, Vol.3, Iss.2, Pp.79-93.
25. Brinson L.C. *One-dimensional constitutive behavior of shape memory alloys: thermomechanical derivation with non-constant material functions and redefined martensite internal variable*. J. of Intelligent Material Systems and Structures, 1993, Vol.4, Iss.2, Pp.229-242.
26. Anand L., Gurtin M.E. *Thermal effects in the superelasticity of crystalline shape-memory materials*. J. of the Mechanics and Physics of Solids, 2003, Vol.51, Iss.6, Pp.1015-1058.
27. Lexcellent Ch., Boubakar M., Bouvet Ch., Calloch S. *About modeling the shape memory alloy behavior based on the phase transformation surface identification under proportional loading and anisothermal conditions*. Intern. J. of Solids and Structures, 2006, Vol.43, Pp.613-626.

Поступила в редакцию 02 мая 2019 года.

---

Сведения об авторе:

Саганов Евгений Борисович – с.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН; инж., Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия; e-mail: [saganoff@yandex.ru](mailto:saganoff@yandex.ru)