УДК 539.3

РАСЧЕТНАЯ МОДЕЛЬ КРУГЛОЙ МЕХАНИЧЕСКИ НЕСЖИМАЕМОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ ИЗГИБАЮЩЕЙ ТЕМПЕРАТУРНОЙ НАГРУЗКЕ

Фирсанов Вик.В.

ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Условие несжимаемости для изотропного линейно упругого материала серьезно ограничивает применение классических гипотез теории изгиба пластин, сформулированных для малых деформаций и перемещений. При этом принимается, что такое сильное кинематическое условие как условие неизменяемости объема должно безусловно выполняться.

При изгибе несжимаемой круглой пластинки силовой нагрузкой показано, что применение тех или иных гипотез Кирхгофа связано с граничными условиями задачи: для каких-то условий можно использовать отдельные гипотезы, для других необходимо полностью отказаться, и для получения относительно простых решений построить модели расчета с использованием других гипотез, не противоречивых по отношению к условию неизменяемости объема. Так, например, при жестком защемлении пластинки по двум контурам (или по одному для сплошной пластинки) отсутствие деформации в поперечном по отношению к основаниям направлении следует считать не гипотезой, а следствием условия несжимаемости. Гипотезы отсутствия сдвига в плоскости rz и нормального напряжения σ_z не используются в силу их несовместимости с условием несжимаемости.

Температурная нагрузка имеет свои особенности, в силу чего температурная задача требует нестандартного подхода при ее решении. Отметим, прежде всего, что неизменяемость объема сохраняется для упругой составляющей суммарной деформации, а к температурной составляющей не имеет отношения. Поэтому суммарная деформация изменения объема не равна нулю, так как связана с температурным полем. Поэтому эта связь не является условием несжимаемости, но она является важным кинематическим условием для несжимаемой пластинки. Принцип использования различных гипотез при разных краевых условиях здесь сохраняется. При этом отсутствие поперечной деформации является гипотезой даже при условии жесткого защемления контуров в силу изменяемости объема пластинки при изгибающем температурном нагружении.

Ключевые слова: несжимаемость; напряжения; деформации; температурная нагрузка; гипотезы; граничные условия; изгиб; определяющие соотношения

A COMPUTATIONAL MODEL OF AN MECHANICALY INCOMPRESSIBLE ROUND PLATE UNDER BENDING LOAD TEMPERATURE

Firsanov Vic.V.

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

ABSTRACT

The condition of incompressibility for an isotropic linearly elastic material seriously limits the application of the classical hypotheses of the theory of bending of plates, formulated for small strains and displacements. It is assumed that such a strong kinematic condition as a condition of invariability of the volume must certainly be met.

When bending an incompressible round plate by a force load, it is shown that the application of certain Kirchhoff hypotheses is associated with the boundary conditions of the problem: for some conditions it is possible to use separate hypotheses, for others it is necessary to completely abandon, and to obtain relatively simple solutions to build models of calculation using other hypotheses that are not inconsistent with the condition of invariability of the volume. So, for example, at rigidly fixed of a plate on two contours (or on one for a continuous plate) absence of deformation in the transverse direction in relation to bases should be considered not as a hypothesis, and a consequence of an incompressibility condition. Hypotheses of no shift in the rz plane and normal stress σ_z are not used because of their incompatibility with the incompressibility condition.

The temperature load has its own characteristics, which is why the temperature problem requires a non-standard approach in its solution. Note, first of all, that the invariability of the volume is kept for the elastic component of the total deformation, but to the temperature component has nothing in relation. Therefore, the total deformation of the volume change is not zero, since it is related to the temperature field. Therefore, this connection is not a condition of incompressibility, but it is an important kinematic condition for the incompressible plate. The principle of using different hypotheses under different boundary conditions is kept here. At the same time, the absence of transverse deformation is a hypothesis even under the condition of rigidly fixed of the contours due to the variability of the volume of the plate under bending temperature loading.

Keywords: incompressibility; stress; strain; thermal loading; hypothesis; boundary conditions; bending; constitutive relationships

Приведем определяющие соотношения для круглой осесимметричной пластинки, изгибаемой тепловой нагрузкой, распределенной по линейному закону в поперечном направлении z и постоянной по радиусу.

Из физических соотношений для несжимаемого материала, разрешенных относительно линейных деформаций

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}\left[\sigma_r - \mu\left(\sigma_\theta + \sigma_z\right)\right] + \alpha t$$
$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}\left[\sigma_\theta - \mu\left(\sigma_r + \sigma_z\right)\right] + \alpha t \qquad (1)$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu\left(\sigma_r + \sigma_\theta\right)\right] + \alpha t$$

определим деформацию изменения объема

$$\theta = \varepsilon_z + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\left(1-2\mu\right)\left(\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z\right)\right] + 3\alpha t$$

где $t = T - T_0$ разность значений текущей и начальной температур.

При $\mu = 0.5,\ \theta = 3\alpha t$, где $\theta = \dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{u}{r} + \dfrac{\partial w}{\partial z}$, u – радиальное перемещение, w – прогиб. Следовательно, условие «несжимаемости» для температурной задачи не является однородным

$$\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+\frac{\partial w}{\partial z}=3\alpha t\,, \qquad (2)$$

где $t=t_0 z,\ \ t_0=const.$

Объемное напряжение можно выразить через деформацию изменения объема и температуру

$$\left(\sigma_r+\sigma_\theta+\sigma_z\right)=\frac{E}{1-2\mu}\left[\theta-3\alpha t\right]=\frac{0}{0}$$

Неопределенность вида $\frac{0}{0}$ обозначим буквой S. Это силовая функция, зависящая от координат и имеющая размерность напряжений.

Теперь физические соотношения (1) разрешим относительно нормальных напряжений

$$\begin{aligned}\sigma_r&=2G\left(\varepsilon_r-\alpha t\right)+S\\ \sigma_\theta&=2G\left(\varepsilon_\theta-\alpha t\right)+S \qquad (3)\\ \sigma_z&=2G\left(\varepsilon_z-\alpha t\right)+S,\end{aligned}$$

где $S=\frac{1}{3}\left(\sigma_r+\sigma_\theta+\sigma_z\right)$.

Уравнение равновесия осесимметричной задачи в отсутствие объемных сил имеют вид

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}=0\\ &\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\tau_{zr}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=0.\end{aligned} \qquad (4)$$

Рассмотрим пластинку, жёстко защемленную по двум контурам, на которых выполняются условия отсутствия прогиба и радиального перемещения. Примем $\frac{\partial w}{\partial z}=0,\ \sigma_z=0$. Вторая гипотеза об отсутствии нормальных напряжений в поперечном направлении является естественной, поскольку силовая нагрузка на основаниях пластинки в поперечном направлении отсутствует. Температурная нагрузка линейна по толщине и постоянна по радиусу. Определяющие соотношения (2)-(4) преобразуются к виду

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}ru=3\alpha t=3\alpha t_0 z \qquad (5)$$

$$\begin{aligned}\sigma_r&=2G\left(\frac{\partial u}{\partial r}-\alpha t\right)+S\\ \sigma_\theta&=2G\left(\frac{u}{r}-\alpha t\right)+S \qquad (6)\\ S&=2G\alpha t=2G\alpha t_0 z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}+\frac{1}{r}f'\left(z\right)=0\\ &\tau_{zr}=\frac{f\left(z\right)}{r}.\end{aligned} \qquad (7)$$

Первое уравнение равновесия (7) с помощью физических соотношений (6) запишем через перемещения

$$2G\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}ru+\frac{1}{r}f'(z)=0.$$

Используя (5), получим

$$6G\alpha\frac{dt_0}{dr}z+\frac{1}{r}f'(z)=0,$$

откуда следует, что $f'(z)=0,$ а $f=const=A$ при постоянной t_0.

Прогиб w определим, используя физическую связь касательного напряжения τ_{zr} с деформацией сдвига

$$\tau_{zr}=\frac{A}{r}=G\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{dw}{dr}\right).$$

Подставив сюда u после интегрирования уравнения (5), получим

$$\frac{dw}{dr}=-\frac{3}{2}\alpha t_0 r-\frac{1}{r}u_1'(z)+\frac{1}{G}\frac{A}{r},\tag{8}$$

где $u_1(z)$ – произвольная функция, A – произвольная константа интегрирования.

Поскольку все слагаемые этого уравнения, кроме функции u_1 не зависят от z, полагаем $u_1'(z)=b$, откуда $u_1=bz+c$, где b и c – произвольные константы, причем константу c можно положить равной нулю, как не соответствующую задаче изгиба. Тогда

$$u=\frac{3}{2}\alpha t_0 rz+\frac{b}{r}z\tag{9}$$

Интегрируя (8), получим

$$w=-\frac{3}{4}\alpha t_0 r^2+\left(\frac{A}{G}-b\right)\ln r+d\tag{10}$$

Анализируя формулы (9) и (10) следует отметить, что одной константы в решении (9) недостаточно для точного удовлетворения двух граничных условий на радиальное перемещение u. На внутреннем контуре при $r=R_1$ и внешнем контуре при $r=R_2$ перемещение u обращается в ноль при $z=0$, следовательно, эти условия удовлетворяются интегрально, то есть имеем вариант смягченных граничных условий, выполнение которых влияет на решение в узких зонах, примыкающих к границам. Отметим также, что радиальное перемещение интегрально равно нулю по всей пластинке. В аналогичной задаче с силовой нагрузкой, распределенной по одному из оснований, радиальные перемещения равны нулю всюду, включая оба контура [1].

Для удовлетворения двух оставшихся граничных условий на прогиб достаточно двух констант b и d, поэтому $A=0$. Определив b и d из условий: при $r=R_1,\ R_2$ $w=0$, получим окончательное решение рассматриваемой задачи

$$w=\frac{3\alpha t_0}{4\ln R_2/R_1}\left(R_2^2\ln\frac{r}{R_1}-R_1^2\ln\frac{r}{R_2}-r^2\ln\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$u=\frac{3}{4}\alpha t_0\left(2r-\frac{1}{r}\frac{R_2^2-R_1^2}{\ln R_2/R_1}\right)z$$

$$\sigma_r = \frac{3}{2}\alpha t_0 G\left(2 + \frac{1}{r^2}\frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln R_2/R_1}\right)z$$

$$\sigma_\theta = \frac{3}{2}\alpha t_0 G\left(2 - \frac{1}{r^2}\frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln R_2/R_1}\right)z \qquad (11)$$

$$\tau_{rz} = \tau_{zr} = 0$$

Полученное решение не является точным, поскольку для радиального перемещения выполняются смягченные граничные условия. Напряжения σ_r и σ_θ приводятся к изгибающим моментам M_r и M_θ, а перерезывающая сила Q_r отсутствует, что согласуется с решением аналогичной задачи с силовой нагрузкой [1].

Для сплошной пластинки из условия ограниченности решения при $r = 0$ следует, что $b = 0$. Определив константу d из условия $w\big|_{r=R} = 0$, получим следующее решение

$$w = \frac{3}{4}\alpha t_0\left(R_2^2 - r^2\right),\; u = \frac{3}{2}\alpha t_0 rz,$$

$$\sigma_r = 3G\alpha t_0 z = \sigma_\theta,\; \tau_{rz} = \tau_{zr} = 0. \qquad (12)$$

Теперь попробуем получить решение для пластинки со следующими граничными условиями

при $r = R_1$ $\sigma_r = M_r = 0,\; \tau_{rz} = Q_r = 0$, при $r = R_2$ $u = 0,\; w = 0$.

Имеем пластинку, защемленную по внешнему контуру и свободную от закрепления и внешней нагрузки по внутреннему контуру.

Для удовлетворения граничных условий используем решение для прогиба (10), а также решение для σ_r с точностью до произвольных констант

$$\sigma_r = 2G\left(\frac{3}{2}\alpha t_0 - \frac{b}{r^2}\right)z.$$

Граничное условие на радиальное перемещение удовлетворяется приближенно, касательное напряжение τ_{zr} отсутствует на всей пластинке, включая границы.

После определения констант b и d из граничных условий, получим приближенное решение рассматриваемой задачи

$$w = \frac{3}{4}\alpha t_0\left[2R_1^2\ln\frac{R_2}{r} + \left(R_2^2 - r^2\right)\right]$$

$$u = \frac{3}{2}\alpha t_0\frac{1}{r}\left(r^2 + R_1^2\right)z$$

$$\sigma_r = 3G\alpha t_0\left(1 - \frac{R_1^2}{r^2}\right)z$$

$$\sigma_\theta = 3G\alpha t_0\left(1 + \frac{R_1^2}{r^2}\right)z$$

$$\tau_{rz} = \tau_{zr} = 0$$

Как видно при некоторых комбинациях граничных условий на контурах достаточно двух констант для их выполнения и получения приближенного и непротиворечивого решения. Если на одном или двух контурах будет реализовано шарнирное опирание, то имеющихся в решении констант будет недостаточно для удовлетворения граничных условий.

Для получения приемлемого решения логично отказаться от гипотезы отсутствия поперечных деформаций и оставить единственную гипотезу отсутствия нормальных напряжений в поперечном направлении, поскольку в этом направлении на пластинку не действует силовая нагрузка. В качестве новой гипотезы примем линейное распределение радиального перемещения по координате z

$$u = u_0\left(r\right)z\,, \tag{13}$$

где u_0 – произвольная функция, зависящая только от радиальной координаты. Подставляя (13) в уравнение (2) и интегрируя по координате z получим связь прогиба и радиального перемещения

$$w = \left(-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}ru_0 + 3\alpha t_0\right)\frac{z^2}{2} + w_0\left(r\right), \tag{14}$$

где $w_0\left(r\right)$ – произвольная функция интегрирования.

Воспользуемся соотношениями (7) и преобразуем первое уравнение этой системы с помощью физических соотношений (6) и формул (13) и (14). В результате получим дифференциальное уравнение для определения функции $u_0\left(r\right)$

$$\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}ru_0 z = -\frac{1}{4G}\frac{1}{r}f'\left(z\right). \tag{15}$$

Это равенство возможно, если $f'\left(z\right) = C_1 z$, а $f\left(z\right) = C_1\dfrac{z^2}{2} + C$, где C_1 и C – произвольные константы. Соответственно $\tau_{zr} = \dfrac{1}{r}\left(C_1\dfrac{z^2}{2} + C\right)$. Сокращая обе части уравнения на z и интегрируя по радиусу, получим решение для функции u_0 с точностью до произвольных констант интегрирования

$$u_0 = -\frac{C_1}{8G}r\ln r + a_1\frac{r}{2} + \frac{a_2}{r}. \tag{16}$$

Далее приведем в соответствие касательное напряжение τ_{zr}, представленное вторым равенством системы (7) при известной функции $f\left(z\right)$ с тем же напряжением, но найденным из физического соотношения

$$\tau_{zr} = \frac{1}{r}\left(C_1\frac{z^2}{2} + C\right) = G\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right) = G\left(u_0 + \frac{dw_0}{dr} - \frac{d}{dr}\frac{1}{2}\frac{d}{dr}ru_0\frac{z^2}{2}\right)$$

или

$$u_0 + \frac{dw_0}{dr} = \frac{5}{8G}C_1 z^2 + \frac{1}{G}\frac{C}{r}.$$

Это равенство возможно, если $C_1 = 0$. Учитывая это и интегрируя по радиальной координате последнее уравнение, получим решение для функции w_0 с точностью до произвольных констант

$$w_0 = -a_1 \frac{r^2}{4} + \left(\frac{C}{G} - a_2 \right) \ln r + a_3 . \qquad (17)$$

Нормальные напряжения в пластинке выразим через перемещения с помощью физических соотношений (3), в последнем из которых определим силовую функцию S из условия $\sigma_z = 0$ на верхнем и нижнем основаниях пластинки

$$S = 2G\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dr} r u_0 - 2\alpha t_0 \right) z$$

$$\sigma_r = 2G\left(\frac{du_0}{dr} + \frac{1}{2}\frac{d}{dr} r u_0 - 3\alpha t_0 \right) z$$

$$\sigma_\theta = 2G\left(\frac{u_0}{r} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} r u_0 - 3\alpha t_0 \right) z.$$

Подставляя сюда u_0 из равенства (16) и учитывая, что $C_1 = 0$, получим

$$\sigma_r = 2G\left(\frac{3}{2} a_1 - \frac{a_2}{r^2} - 3\alpha t_0 \right) z$$

$$\sigma_\theta = 2G\left(\frac{3}{2} a_1 + \frac{a_2}{r^2} - 3\alpha t_0 \right) z.$$

Удовлетворим граничные условия для функции σ_r на внешнем и внутреннем граничных контурах

$$\frac{3}{2} a_1 - \frac{a_2}{R_1^2} - 3\alpha t_0 = 0$$

$$\frac{3}{2} a_1 - \frac{a_2}{R_2^2} - 3\alpha t_0 = 0 .$$

Отсюда следует $a_2 = 0,\ a_1 = 2\alpha t_0$.

С помощью (14), (16) и (17) определим суммарный прогиб

$$w = w_0 + \left(3\alpha t_0 - a_1\right)\frac{z^2}{2} = -2\alpha t_0 \frac{r^2}{4} + \frac{C}{G}\ln r + a_3 + \alpha t_0 \frac{z^2}{2} =$$

$$= \frac{\alpha t_0 r^2}{2}\left(\frac{z^2}{r^2} - 1 \right) + \frac{C}{G}\ln r + a_3$$

Для пластинки с двумя граничными контурами слагаемым $\frac{z^2}{r^2}$ по сравнению с единицей можно пренебречь ввиду малости толщины пластинки по сравнению с ее размерами. Следовательно

$$w = -\frac{\alpha t_0}{2} r^2 + \frac{C}{G}\ln r + a_3 \qquad (18)$$

После определения констант C и a_3 из граничных условий равенства нулю прогиба на обоих граничных контурах получим окончательное решение рассматриваемой задачи.

$$
\begin{aligned}
&w = \frac{\alpha t_0}{2\ln R_2/R_1}\left[\left(R_2^2 - R_1^2\right)\ln r - \left(R_2^2 - r^2\right)\ln R_1 - \left(r^2 - R_1^2\right)\ln R_2\right],\\
&u = \alpha t_0 r z,\\
&\sigma_r = \sigma_\theta = 0,\\
&\tau_{zr} = \frac{c}{r} = \frac{G\alpha t_0}{2}\frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln R_2/R_1}\frac{1}{r}.
\end{aligned} \tag{19}
$$

Полученное решение является приближенным поскольку граничные условия для касательного напряжения на основаниях пластинки не могут быть удовлетворены в рамках использованной расчетной модели. Вполне логично отсутствие нормального напряжения σ_r и, соответственно, изгибающего момента M_r по всей пластинке, включая шарнирно опертые граничные контуры. Как и в предыдущих, задачах радиальное перемещение u интегрально равно нулю по всей пластинке.

Приводя в соответствие касательные напряжения, определяемые из второго уравнения равновесия (4) и из физического соотношения $\tau_{zr} = G\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{dw}{dr}\right)$, мы теряем одну константу. Её можно сохранить, если привести в соответствие не касательные напряжения, а связанные с ними перерезывающие силы Q_r. При переходе от касательных напряжений к перерезывающей силе путем интегрирования этих напряжений по толщине, мы избавляемся от координаты z и сохраняем обе константы C_1 и C

$$
Q_r = \int_{-h/2}^{+h/2}\frac{1}{r}\left(C_1\frac{z^2}{2} + C\right)dz = \int_{-h/2}^{+h/2} G\left(u_0 + \frac{dw_0}{dr} - \frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}ru_0\frac{z^2}{2}\right)dz .
$$

Отсюда получим уравнение для определения $w_0(r)$

$$
\frac{dw_0}{dr} = \frac{C_1}{8G}r\left(\frac{3h^2}{4r^2} + \ln r\right) + \frac{2}{G}\frac{C}{r} - \frac{a_1}{2}r - \frac{a_2}{r}.
$$

Интегрируя и пренебрегая членом $\frac{3h^2}{4r^2}$ ввиду малости h^2 по сравнению с r^2 для пластинки с двумя граничными контурами, получим

$$
w_0 = \frac{C_1}{8G}\left(\frac{1}{2}r^2\ln r - \frac{1}{4}r^2\right) + \frac{2}{G}C\ln r - a_1\frac{r^2}{4} - a_2\ln r + a_3. \tag{20}
$$

Определив σ_r из физического соотношения

$$
\sigma_r = 2G\left[\frac{3}{2}a_1 - \frac{a_2}{r^2} - \frac{C_1}{8G}\left(3\ln r + 2\right) - 3\alpha t_0\right]z .
$$

Выполнив граничные условия шарнирного опирания при $r = R_1$ и $r = R_2$ $\sigma_r = 0$, получим связь трех констант a_1, a_2 и C_1

$$a_1 = 2\alpha t_0 + \frac{C_1}{4G}\left(\frac{\ln {R_2}\!/\!{R_1}\, R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} + \ln R_1 + \frac{2}{3} \right)$$

$$a_2 = \frac{3}{8G} \frac{\ln {R_2}\!/\!{R_1}\, R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} C_1 \qquad (21)$$

Используя (14), (16) и (20), получим выражение для суммарного прогиба пластинки

$$w = w_0 + \left(3\alpha t_0 - \frac{1}{r}\frac{d}{dr} r u_0 \right)\frac{z^2}{2} = \frac{C_1 r^2}{16G}\left(\ln r - \frac{1}{2} \right) + \frac{2}{G} C \ln r - a_1 \frac{r^2}{4} -$$

$$- a_2 \ln r + a_3 + \left[3\alpha t_0 - a_1 + \frac{C_1}{8G}\left(2\ln r + 1 \right) \right]\frac{z^2}{2}.$$

Подставляя в это выражение константы a_1 и a_2 из (21) и пренебрегая отношением $\frac{z^2}{r^2}$ получим прогиб w

$$w = a_3 + \frac{r}{G} C \ln r - \frac{\alpha t_0}{2} r^2 +$$

$$+ \frac{C_1}{16G} r^2 \left[\ln \frac{r}{R_1^4} - \frac{2\ln {R_2}\!/\!{R_1}\, R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\left(2 + 3R_1^2 \frac{\ln r}{r^2} \right) \right]. \qquad (22)$$

Для удовлетворения двух граничных условий для прогиба при $r = R_1$ и $r = R_2$ $w = 0$ достаточно констант a_3 и C, поэтому $C_1 = 0$, как и в предыдущей задаче, а решение для искомых функций напряжений и перемещений представлено формулами (19).

Мы можем распорядиться константами C_1 и C_2 так, чтобы удовлетворить условиям отсутствия касательных напряжений на основаниях пластинки при $z = \pm \frac{h}{2}$ $\tau_{rz} = \frac{1}{r}\left(C_1 \frac{h^2}{8} + C \right) = 0$, откуда $C = -C_1 \frac{h^2}{8}$. Следовательно

$$\tau_{rz} = \frac{C_1}{2r}\left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right). \qquad (23)$$

Подставляя касательное напряжение (23) в дифференциальное уравнение (15) для определения функции u_0, в котором $\frac{1}{r} f'(z) = \tau_{rz}$, получим

$$\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr} r u_0 = -\frac{1}{4G}\frac{C_1}{r}. \qquad (24)$$

Приводя в соответствие касательное напряжение (23) с напряжением, полученным из физического соотношения, получим

$$\frac{C_1}{2r}\left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right) = G\left(u_0 + \frac{dw_0}{dr} + \frac{1}{4G}\frac{C_1}{r}\frac{z^2}{2} \right).$$

Отсюда следует $-\frac{3C_1}{r}z^2 = 0$, следовательно, $C_1 = 0$

$$\frac{dw_0}{dr} + u_0 = 0\,.$$

Определив u_0 из (24), а w_0 из последнего уравнения, получим решение с точностью до трех произвольных констант, которых недостаточно для удовлетворения граничных условий шарнирного опирания на двух контурах круглой пластинки.

Таким образом, решения для функций u_0 и w, представленное формулами (16) и (22), где $C_1 = 0$, являются общими для всех рассмотренных вариантов граничных условий

$$\begin{aligned} w &= -a_1\frac{r^2}{4} + \left(\frac{C}{G} - a_2\right)\ln r + a_3 + \left(3\alpha t_0 - a_1\right)\frac{z^2}{2} \\ u &= \left(a_1\frac{r}{2} + \frac{a_2}{r}\right)z \end{aligned} \tag{25}$$

Преобразуем полученные формулы для варианта жёсткого защемления пластинки по двум граничным контурам. Как видно, константа a_2 содержится в решении для u и w, а константа C содержится только в решении для w и является в этом решении лишней. Кроме того, можно избавиться от последнего слагаемого в решении для w положив $a_1 = 3\alpha t_0$.

Определив a_2 и a_3 из граничных условий жесткого защемления при $r = R_1$ и $r = R_2$ $w = 0$ и подставив найденные константы в выражения для определения всех искомых функций, получим решение, полностью совпадающее с ранее полученным решением (19).

Если распорядиться константами, входящими в формулы (25) так, чтобы точно удовлетворить граничное условие для радиального перемещения при $r = R_1, R_2$ $u = 0$, то получим $a_1 = a_2 = 0$. При удовлетворении граничного условия для функции прогиба при $r = R_1, R_2$ и $z = 0$ $w = 0$, получим $C = a_3 = 0$.

В результате получаем отсутствие прогиба в изгибаемой температурным полем пластинке, что невозможно и противоречит полученному ранее решению (11).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. При температурном нагружении конструкции из материала с неизменяемым объёмом происходит не только изменение формы, но и изменение объёма материала, что является следствием гипотез Дюамеля-Неймана применительно к материалам с предельным коэффициентом Пуассона, равным 0.5.
2. Для круглой несжимаемой пластинки для получения непротиворечивых решений используются различные гипотезы, например, для защемлённой по двум контурам кольцевой пластинки или по одному контуру для сплошной пластинки вполне применима классическая гипотеза об отсутствии поперечной деформации. При других комбинациях граничных условий эта гипотеза не применима.

3. Использование гипотезы о линейном распределении по толщине пластинки радиального перемещения с учётом поперечной к основаниям пластинки деформации позволяет получить универсальное приближённое решение для различных комбинаций граничных (контурных) условий.
4. В предложенной модели можно отметить не точное удовлетворение условий на контурах для радиального перемещения, что, впрочем, не оказывает существенного влияния на решение, как и наличие касательного напряжения на основаниях пластинки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фирсанов Вик.В. *Расчётная модель изгиба круглой осесимметричной пластинки с учётом её несжимаемости* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2019 – Т.25. – №1. – С.110-121.
2. Васильев В.В., Лурье С.А. *К проблеме построения неклассических теорий пластин* // Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела. – 1990. – №2. – С.158-167.
3. Gorelik B.M., Fel'dman G.I., Maiskaya M.A. *Variability of Poisson's ratio in investigating the state of stress of rubber parts* // Mechanics of Composite Materials. – 1967. – Vol.3. – Iss.4. – Pp.502-504.
4. Pobedrya B.E. *Equations of state of viscoelastic isotropic media* // Mechanics of Composite Materials. – 1967. – Vol.3. – Iss.4. – Pp.429-432.
5. Treloar L.R.G. *The Physics of Rubber Elasticity.* – OUP Oxford, 2005. – 324 p.
6. Тимошенко С.П. *Курс теории упругости.* – Киев: Наукова думка, 1972. – 508 с.
7. Hetnarski R.B., Eslami M.R. *Thermal Stresses – Advanced Theory and Applications.* – Springer, 2009. – 579 p. (Solid Mechanics and Its Applications, 158).
8. Ieşan D.P., Scalia A. *Thermoelastic Deformations.* – Springer-Science+Business Media, B.V., 1996. – 317 p. (Solid Mechanics and Its Applications, 48).
9. Боли Б., Уэйнер Дж. *Теория температурных напряжений.* – М.: Мир, 1964. – 517 с.
10. Мелан Э., Паркус Г. *Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями.* – М.: Физматгиз, 1958. – 166 с.
11. Трещёв А.А., Самсоненко Г.И. *Термоупругий изгиб тонких круглых пластин из ортотропных стеклопластиков* // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2011. – №5-3. – С.116-121.
12. Пальмов В.А. *Определяющие уравнения термоупругих, термовязких и термопластических материалов Учебное пособие.* – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2008. – 138 с.

REFERENCES

1. Firsanov Vic.V. *Raschyotnaya model' izgiba krugloj osesimmetrichnoj plastinki s uchyotom eyo neszhimaemosti [Computational model of bending of a circular axisymmetricplate, taking into account its incompressibility]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2019, Vol.25, No.1, Pp.110-121.
2. Vasilev V.V., Lur'ye S.A. *K probleme postroeniya neklassicheskikh teorij plastin [On the problem of constructing non-classical plate theories]*. Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tvyordogo tela, 1990, No.2, Pp.158-167.

3. Gorelik B.M., Fel'dman G.I., Maiskaya M.A. *Variability of Poisson's ratio in investigating the state of stress of rubber parts*. Mechanics of Composite Materials, 1967, Vol.3, Iss.4, Pp.502-504.
4. Pobedrya B.E. *Equations of state of viscoelastic isotropic media*. Mechanics of Composite Materials, 1967, Vol.3, Iss.4, Pp.429-432.
5. Treloar L.R.G. *The Physics of Rubber Elasticity*. OUP Oxford, 2005, 324 p.
6. Timoshenko S.P. *Kurs teorii uprugosti [Course of theory of elasticity]*. Kiev, Naukova dumka, 1972, 508 p.
7. Hetnarski R.B., Eslami M.R. *Thermal Stresses – Advanced Theory and Applications*. Springer, 2009, 579 p. (Solid Mechanics and Its Applications, 158).
8. Ieşan D.P., Scalia A. *Thermoelastic Deformations*. Springer-Science+Business Media, B.V., 1996, 317 p. (Solid Mechanics and Its Applications, 48).
9. Boly B.,Weiner J. *Teoriya temperaturnykh napryazhenij [Temperature stress theory]*. Moskva, Mir, 1964, 517 p.
10. Melan E., Parkus G. *Termouprugie napryazheniya, vyzyvaemye statsionarnymi temperaturnymi polyami [Thermoelastic stresses caused by stationary temperature fields]*. Moskva, Fizmatgiz, 1958, 166 p.
11. Treschev A.A., Samsonenko G.I. *Termouprugij izgib tonkikh kruglykh plastin iz ortotropnykh stekloplastikov [Thermoelastic bending of thin round plates of orthotropic fiberqlass]*. Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki, 2011, No.5-3, Pp.116-121.
12. Palmov V.A. *Opredelyayushhie uravneniya termouprugikh, termovyazkikh i termoplasticheskikh materialov. Uchebnoe posobie [Determination of the equation of thermoviscous, thermoelastic and thermoplastic materials. Tutorial]*. Sankt-Peterburg, Izdatel'stvo Politekhnicheskogo universiteta, 2008, 138 p.

Поступила в редакцию 25 мая 2019 года.

Сведения об авторе:

Фирсанов Виктор Васильевич – к.т.н., доц., кафедра «Проектирование и прочность авиационно-ракетных и космических изделий», ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт» (национальный исследовательский университет) г. Москва, Россия; e-mail: kaf603@mai.ru