УДК 539.3

ПРИМЕНЕНИЕ РАСШИРЕННОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИН N-ГО ПОРЯДКА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О ДИСПЕРСИИ ВОЛН В ГРАДИЕНТНО-НЕОДНОРОДНОМ СЛОЕ*

Жаворонок С.И.

ФГБУН Институт прикладной механики РАН (ИПРИМ РАН), г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Предложено решение дисперсионной задачи для градиентно-неоднородного упругого плоского слоя. Решение основано на расширенной теории пластин типа И.Н. Векуа – А.А. Амосова, обеспечивающей точное удовлетворение краевым условиям второго рода на лицевых поверхностях пластины в рамках двумерной модели любого порядка. Приведена вариационная формулировка задачи динамики неоднородной пластины, соответствующее теории N-го порядка, в переменных поля первого рода – коэффициентах разложения компонентов вектора перемещения по биортогональной системе базисных функций толщинной координаты. Двумерная модель пластины задана поверхностной плотностью функционала Лагранжа и неголономными уравнениями связей, следующими из силовых краевых условий на лицевых поверхностях пластины. На базе вариационной формулировки получены уравнения движения пластины, являющиеся обобщенными уравнениями Лагранжа второго рода двумерной континуальной системы. Спектральная задача для распространяющихся нормальных волн в плоском градиентно-неоднородном слое поставлена как стационарная задача для двух квадратичных форм с ограничениями, решаемая методом Голуба. Вычислены частоты запирания волн и формы нормальных мод в несимметричном слое со степенным распределением объемной доли структурных составляющих двухкомпонентного материала, а также распределения компонентов тензора напряжения, соответствующие формам нормальных волн. Проведен анализ сходимости приближенного решения по величинам частот запирания нормальных волн при различных показателях степенного закона распределения структурного состава. Показано, что при преобладании структурной составляющей с большим модулем упругости минимально необходимые порядки соответствуют однородному слою; формы нормальных мод достаточно близки к формам однородного слоя. При преобладании структурной составляющей с меньшим модулем упругости и образовании области локального повышения жесткости минимально необходимые порядки теории превышают таковые для однородного слоя на единицу для некоторых мод, различие форм распространяющихся мод существенно, особенно для высших фазовых частот. Распределения напряжений по толщине существенно несимметричны для высших частот.

Ключевые слова: пластины градиентно-неоднородные; волны нормальные; задачи дисперсионные; теория пластин расширенная; условия краевые; Лагранжа уравнения обобщенные; связей уравнения; спектры

AN APPLICATION OF THE NTH ORDER EXTENDED PLATE THEORY IN THE WAVE DISPERSION PROBLEM FOR A FUNCTIONALLY GRADED LAYER

* *Работа выполнена в рамках Государственного задания ИПРИМ РАН (номер гос. регистрации темы АААА-А19-119012290118-3) при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №19-01-00695-а).*

Zhavoronok Sergey I.

Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences (IAM RAS), Moscow, Russia

ABSTRACT

A solution of the wave dispersion problem for a functionally graded plane layer is based on the extended plate theory of I.N. Vekua – A.A. Amosov type satisfying the boundary conditions on the faces exactly within an arbitrary approximation order. A variational problem's statement corresponding to the heterogeneous plate theory of Nth order is is given by a set of field variables of the first kind being the displacement expansion factors with respect to biorthogonal function system, the surface Lagrangian density, and the non-holonomic constraints following from the boundary conditions on the faces. The generalized Lagrange equations of the second kind for a 2D continuum are obtained. The spectral problem for normal waves in the functionally graded layer is formulated as a constrained stationary problem for two quadratic forms and solved by the Golub approach. The phase locking frequencies and wave forms for the asymmetric layer with power gradation law are computed, as well as the corresponding stress distributions across the thickness. The convergence of approximate locking frequencies is analyzed for different gradation laws. The minimum order of theory required to secure the convergence correspond to the homogeneous layer if the stiffer phase prevails; the waveforms are close to the ones in the homogeneous layer. The softer phase prevailing leads to minimum orders exceeding the ones of the homogeneous layer for some modes; the wave forms for higher frequencies differ significantly from the ones of homogeneous layer. The stress distributions across the thickness are significantly asymmetric, especially for higher frequencies.

Keywords: functionally graded heterogeneous plates; normal waves; dispersion problems; extended plate theory; boundary conditions; extended Lagrange equations; constraint equations; spectra

ВВЕДЕНИЕ

Типичный функционально-градиентный материал – композиция двух структурных составляющих с распределением объемных долей, заданным гладкими функциями пространственных координат (степенными или экспоненциальными) [1]. Решения задач о дисперсии нормальных волн необходимы для восстановления физических констант материалов по экспериментальным данным [2,3]. Для неоднородных волноводов, помимо матричных методов [4,5], развиваются методы конечно-элементной дискретизации волновода по толщине [2,3,6] в сочетании с аналитическим представлением решения в направлении распространения волны. Снижение эффекта Рунге, проявляющегося на однородных сетках, достигается применением спектральных элементов [7] на базе полиномов Чебышева; удовлетворительная точность описания волн Лэмба в градиентно-неоднородной пластине достигается на основе введения одного элемента пятого порядка по толщине пластины.

Аналитические приближенные решения строятся, как правило, в рядах [8-11]. В работе [8] амплитуды тангенциальных и трансверсальных компонентов вектора перемещения представляются отрезком степенного ряда; решение [8] используется в качестве эталона для анализа точности конечно-элементных решений [6,7]. Разложение в степенной ряд применено также в [11]. В работах [10,12] компоненты вектора перемещения в секторном цилиндрическом волноводе разлагаются в равномерно и по норме сходящиеся ряды по кольцевой

[10] или радиальной координате [12]. Асимптотический подход применяется, в частности, для построения длинноволновых приближений [13].

Универсальным подходом к решению дисперсионных задач для неоднородных волноводов является разложение Фурье по ортогональной системе – полиномам Лежандра для слоистых пластин [14], цилиндрических радиально-градиентных волноводов [15]. Для систем с существенным различием физических констант слоев метод был усовершенствован в работе [16] и применен к описанию волн Лэмба в вязкоупругом анизотропном композите [17]. В [18] предложена гамильтонова формулировка метода [14] для анизотропных пластин и построено точное решение для пластины с триклинной симметрией.

Методы решения частного класса задач о дисперсии волн в неоднородных волноводах [8-18] могут быть отнесены к той же группе, что и методы построения теорий высшего порядка тонких тел. Так, асимптотический подход [19,20] обеспечивает, в частности, описание локальных резонансных явлений [20,21], кромочных волн [22], и применим в случае слоистых [23] и наследственно-упругих пластин [24]. С другой стороны, метод прямой редукции, основанный на разложении неизвестных по ортогональной системе функций [25-27], обеспечивает, в отличие от асимптотического подхода, построение иерархии моделей оболочек различного порядка, приближающих решение трехмерной задачи механики твердого тела в различных нормах [28]. Метод [25], развиваемый в последние 15 лет в ряде работ [29-35], допускает эффективное приложение к решению различных задач динамики оболочек [36], в том числе обратных коэффициентных [37-39]. Альтернативный подход, близкий к [6,7], в теории оболочек представлен методом промежуточных поверхностей [40]; в работах [41], [42] метод применен к задачам о градиентных тонких телах.

Определенный интерес представляет разработка единого подхода к решению задач о дисперсии волн в тонкостенных волноводах на основе уравнений общей теории оболочек произвольного порядка, в традиционном представлении (полиномы Лежандра [14-16,25,27,29,34,37]) и конечно-элементной дискретизации [6,7]. Переход к биортогональным базисам [43,44] приводит к инвариантной относительно базисной системы формулировке теории, позволяет строить как традиционные модели оболочек класса [25], так и модели с конечно-элементной дискретизацией по толщине оболочки в рамках единого подхода. Анализ сходимости решений дисперсионных задач для плоских волноводов на основе теории [44] на частотах запирания проведен в работах [45-47], а для некоторых ненулевых значений волнового числа, допускающих известные точные решения [48] – в [49] и [50], при использовании в качестве базиса полиномов Лежандра, а в [51] – при конечно-элементной дискретизации. В работе [52] изучена сходимость решения задачи для второй продольной моды в слое в диапазоне отрицательных значений групповой скорости волны.

Одной из основных проблем при построении иерархии теорий оболочек на базе метода пространственной редукции является удовлетворение краевым условиям трехмерной задачи, переносимых с лицевых поверхностей на базовую поверхность оболочки [25,53-55]. Аналогичная проблема возникает при обеспечении условий отражения на поверхностях при решении дисперсионных задач методом ортогональных разложений [16]. Вариационная формулировка трехмерной теории оболочек, интерпретирующая тонкое тело как двумерную Лагранжеву систему, заданную на двумерном многообразии системой переменных поля и плотностью порождающей функции [44], приводит к рассмотрению краевых условий, перенесенных на базисную поверхность, в качестве уравнений связей [56]. Решения дисперсионных задач на базе расширенной теории оболочек [56] получены в работах [57,58] для однородного упругого слоя и показана сходимость приближений к точному решению [48] по мере повышения порядка.

Ниже рассмотрено решение дисперсионной задачи для упругого градиентно-неоднородного слоя на базе расширенной теории пластин N-го порядка [56] и проведен анализ сходимости решений на частотах запирания, получены распределения напряжений, соответствующие собственным функциям.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1.1. Постановка дисперсионной задачи для градиентного слоя.

Пусть $\mathbb{R}^3 \supset \left\{V : x^\alpha \in \left(-\infty, +\infty\right), x^3 \in \left[-h, h\right] \subset \mathbb{R}\right\}$, $\partial V = S_+ \oplus S_- \oplus S_B$, $S_\pm : x^3 = \pm h$, $S_B = \Gamma \times [h_-, h_+]$ – плоский идеально упругий неоднородный изотропный слой на основе двух структурных составляющих, далее обозначенных «1» и «2». Свойства композиции предполагаются непрерывно зависящими от координаты x^3

$$\begin{gathered} E\left(x^3\right) = E_1\left[\tilde{E} + q\left(x^3\right)\Delta\tilde{E}\right], \quad \rho\left(x^3\right) = \rho_1\left[\tilde{\rho} + q\left(x^3\right)\Delta\tilde{\rho}\right], \\ q\left(x^3\right) \in C^n\left[h_-, h_+\right]\left(n \geq 1\right), \quad \tilde{E} = \frac{E_2}{E_1}, \Delta\tilde{E} = 1 - \tilde{E}, \ \tilde{\rho} = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \Delta\tilde{\rho} = 1 - \tilde{\rho}. \end{gathered} \tag{1.1}$$

В направлении оси Ox^1 декартовой системы координат $Ox^1x^2x^3$ в слое распространяется нормальная волна амплитудой $\mathbf{U}$, с фазовой частотой ω и волновым числом κ, задаваемая соотношением (1.2) [48]

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}\exp\left[i\left(\kappa x^1 - \omega t\right)\right], \quad i = \sqrt{-1}. \tag{1.2}$$

Целью работы является вычисление спектра $\omega = \omega\left(\kappa\right)$ и форм нормальных мод в слое на базе расширенной теории N-го порядка [56,58] и анализ сходимости решений при различном законе изменения параметра структурного состава $q\left(x^3\right)$.

1.2. Вариационная формулировка расширенной теории пластин N порядка.

В соответствии с [56], плоский слой (пластина) – Лагранжева континуальная система, заданная над множеством $\left(\mathbb{R}^2 \supseteq S_0\right) \times \left(\mathbb{R}_+ \cup \{0\}\right)$ конфигурационным многообразием Ω_N с переменными поля 1 рода $\mathbf{u}^{(k)}\left(M, t\right)$, $M \in S_0$, $t \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, любая актуальная конфигурация определяется вектором перемещения $\mathbf{u} = \mathbf{u}\left(\mathbf{u}^{(k)}\right)$, касательное расслоение $T_u\Omega$ задается линейной оболочкой ковариантного базиса $\mathrm{p}_{(k)}\left(\zeta\right) = \partial\mathbf{u}\left(M, \zeta, t\right) / \partial\mathbf{u}^{(k)}\left(M, t\right)$, $\left[-1, 1\right] \ni \zeta = x^3/h$ – безразмерная нормальная координата. Пусть S_0 – базисная плоскость пластины, $\partial S_0 \equiv \Gamma = S_0 \cap \partial V$, тогда

$$\begin{gathered} \forall M' \in V \cup \partial V \quad \mathbf{R}\left(M'\right) = \mathbf{r}\left(M\right) + h\zeta\mathbf{n}, \\ \mathbf{n} = \left(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2\right) / \sqrt{a}, \quad \mathbf{r}_\alpha = \partial_\alpha \mathbf{r}, \quad a = \det\left(a_{\alpha\beta}\right), \quad a_{\alpha\beta} = \mathbf{r}_a \cdot \mathbf{r}_\beta, \end{gathered}$$

$\xi^\alpha \in D_\xi \subseteq \mathbb{R}^2$ – координаты на S_0, $\partial_\alpha \equiv \partial/\partial\xi^\alpha$ [43,44]. Введем систему базисных функций $\mathrm{p}_{(k)}(\zeta)$, $\mathrm{p}^{(k)}(\zeta)$, биортогональную относительно скалярного произведения

$$\left(\mathrm{p}_{(k)},\mathrm{p}^{(m)}\right)_1 \equiv \int_{-1}^{1} \mathrm{p}_{(k)}(\zeta)\,\mathrm{p}^{(m)}(\zeta)\,d\zeta = \delta_{(k)}^{(m)}, \quad \left(\mathrm{p}_{(k)},\mathrm{p}_{(m)}\right)_1 := G_{(km)}.$$

Поле вектора перемещения определяется следующим образом [44,56]

$$\begin{aligned} &\forall M' \in V \cup \partial V \quad \mathbf{u}(M',t) = \mathbf{u}^{(k)}(M,t)\,\mathrm{p}_{(k)}(\zeta), \\ &\mathbf{u}^{(k)}(M,t) = u_\alpha^{(k)}\left(\xi^1,\xi^2,t\right)\mathbf{r}^\alpha + u_3^{(k)}\left(\xi^1,\xi^2,\zeta\right)\mathbf{n} \end{aligned} \tag{1.3}$$

при условии интегрируемости $u_\alpha\left(\xi^1,\xi^2,\zeta,t\right)$ и $u_3\left(\xi^1,\xi^2,\zeta,t\right)$ с квадратом на отрезке $[-1,1]\ni\zeta$. Коэффициенты биортогонального разложения компонентов вектора перемещения u_α, u_3 (1.3) задают переменные поля первого рода [43,44,56]

$$u_\alpha^{(k)} = \left(u_\alpha,\mathrm{p}^{(k)}\right)_1,\; u_3^{(k)} = \left(u_3,\mathrm{p}^{(k)}\right)_1;\; u_{(k)}^\alpha = \left(u^\alpha,\mathrm{p}_{(k)}\right)_1,\; u_{(k)}^3 = \left(u^3,\mathrm{p}_{(k)}\right)_1 \tag{1.4}$$

В случае линейной системы редукция трехмерной модели заключается в проекции конфигурационного пространства $\Omega = \left\{\mathbf{u}^{(k)}\right\}$ на подпространство Ω_N, $k = 0,1\ldots N$ и формулировке поверхностной и контурной плотностей лагранжиана как функций переменных поля $\mathbf{u}^{(k)}$ и их производных $\dot{\mathbf{u}}^{(k)}$, $\nabla\otimes\mathbf{u}^{(k)}$ [44,51]

$$\begin{aligned} &\mathrm{L_S}\left(u_i^{(k)},\dot{u}_i^{(k)},\nabla_\alpha u_i^{(k)}\right) = \tfrac{1}{2}\rho_{(k)}^{(m)}\dot{u}_{(m)}^i\dot{u}_i^{(k)} + F_{(k)}^i u_i^{(k)} - \\ &-\tfrac{1}{2}\left(C_{(km)}^{\alpha\beta j\gamma}\nabla_\gamma u_j^{(m)} + C_{(km)}^{\alpha\beta j}u_j^{(m)}\right)\nabla_\beta u_\alpha^{(k)} - \\ &-\tfrac{1}{2}\left(C_{(km)}^{3\beta j\gamma}\nabla_\gamma u_j^{(m)} + C_{(km)}^{3\beta j}u_j^{(m)}\right)\nabla_\beta u_3^{(k)} - \\ &-\tfrac{1}{2h}\left(C_{(km)}^{i3j\gamma}\nabla_\gamma u_j^{(m)} + C_{(km)}^{i3j}u_j^{(m)}\right)D_{(n\cdot)}^{(\cdot k)}u_i^{(n)}; \quad \mathrm{L}_\Gamma\left(u_i^{(k)}\right) = q_{B(k)}^i u_i^{(k)}; \end{aligned} \tag{1.5}$$

Здесь используются следующие обозначения линейных операторов [44]

$$\begin{aligned} &D_{(n\cdot)}^{(\cdot k)} = \left(d\mathrm{p}_{(n)}/d\zeta,\mathrm{p}^{(k)}\right)_1; \quad \rho_{(k)}^{(m)} = \left(\rho\mathrm{p}^{(m)},\mathrm{p}_{(k)}\right)_1; \quad C_{(km)}^{ijpq} = \left(C^{ijpq}\mathrm{p}_{(k)},\mathrm{p}_{(m)}\right)_1; \\ &C_{(km)}^{\alpha i} = h^{-2}D_{(k\cdot)}^{(\cdot n)}C_{(ns)}^{\alpha 33i}\overline{D}_{(m\cdot)}^{(\cdot s)}; \quad C_{(km)}^{3i} = h^{-2}D_{(k\cdot)}^{(\cdot n)}C_{(ns)}^{333i}\overline{D}_{(m\cdot)}^{(\cdot s)}; \\ &C_{(km)}^{\alpha i\delta} = h^{-1}D_{(k\cdot)}^{(\cdot n)}C_{(nm)}^{\alpha 3i\delta}; \quad C_{(km)}^{3i\delta} = h^{-1}D_{(k\cdot)}^{(\cdot n)}C_{(nm)}^{33i\delta}; \quad \alpha,\beta,\delta = 1,2, \quad i,j = 1,2,3; \end{aligned}$$

где C^{ijkl} – контравариантные компоненты тензора упругих констант среды $\mathbf{C}$,

$$F_{(k)}^i = \left(\rho F^i,\mathrm{p}_{(k)}\right)_1, \quad q_{B(k)}^i = \left(q^i\big|_{M\in S_B},\mathrm{p}_{(k)}\right)_1.$$

Силовые краевые условия, перенесенные с лицевых поверхностей $\zeta = \pm 1$ на базисную поверхность пластины S_0, являются уравнениями связей [56,57]

$$\left(C_{(km)}^{i3j\delta}\nabla_\delta u_j^{(k)} + C_{(km)}^{i3j3}D_{(m\bullet)}^{(\bullet k)}u_j^{(m)}\right)\mathrm{p}^{(m)}(\pm 1) \pm \overline{q}_\pm^i = 0, \tag{1.6}$$

Таким образом, модель пластины N-го порядка есть двумерная Лагранжева система, заданная переменными поля первого рода $u_\alpha^{(k)}$, $u_3^{(k)}$ (1.4), поверхностной и контурной плотностями лагранжиана (1.5) и неголономными связями (1.6).

1.3. Уравнения движения для функционально-градиентной пластины.

Для изотропного однонаправленно градиентного материала (1.1) физические константы модели пластины N-го порядка задаются в соответствии с [44,51]

$$C_{(km)}^{\alpha\beta\gamma\delta}=\lambda_{(km)}a^{\alpha\beta}a^{\gamma\delta}+\mu_{(km)}\left(a^{\alpha\gamma}a^{\beta\delta}+a^{\alpha\delta}a^{\beta\gamma}\right);\quad C_{(km)}^{3333}=\lambda_{(km)}+2\mu_{(km)};$$
$$C_{(km)}^{\alpha3\beta3}=\mu_{(km)}a^{\alpha\beta};\quad C_{(km)}^{\alpha\beta33}=\lambda_{(km)}a^{\alpha\beta};$$
$$\lambda_{(km)}=\nu E_{(km)}\left(1-2\nu\right)^{-1}\left(1+\nu\right)^{-1},\quad 2\mu_{(km)}=E_{(km)}\left(1+\nu\right)^{-1};$$
$$E_{(km)}=E_1V_{(km)},\quad V_{(km)}=\tilde{E}G_{(km)}+\Delta\tilde{E}Q_{(km)};\quad Q_{(mn)}=\left(q\left(\zeta\right)\mathrm{p}_{(k)},\mathrm{p}_{(m)}\right)_1. \tag{1.7}$$

Пусть далее $q_{\pm}^{i}=0,\ F_{(k)}^{i}=0$. Рассмотрим плоскую деформацию слоя (в плоскости Ox^1x^3) и введем безразмерные переменные аналогично [45,47,51]

$$\xi=x_1h^{-1};\quad \tau=tc_2h^{-1};\quad \tilde{u}_{\alpha}^{(k)}=u_{\alpha}^{(k)}h^{-1},\quad c_2=\sqrt{\mu_1/\rho_1}. \tag{1.8}$$

Уравнения движения пластины являются уравнениями Лагранжа II рода системы (1.4), (1.5) [44]; при учете (1.7), (1.8) уравнения движения имеют вид [51]

$$\begin{gathered}
R_{(km)}\partial_{\tau}^{2}u_1^{(m)}=\beta^{-2}V_{(km)}\partial_{\xi}^{2}u_1^{(m)}-D_{(k\cdot)}^{(\cdot n)}V_{(ns)}\bar{D}_{(m\cdot)}^{(\cdot s)}u_1^{(m)}-\\
-\left[D_{(k\cdot)}^{(\cdot n)}V_{(nm)}-\left(\beta^{-2}-2\right)V_{(kn)}\bar{D}_{(m\cdot)}^{(\cdot n)}\right]\partial_{\xi}u_2^{(m)};\\
R_{(km)}\partial_{\tau}^{2}u_2^{(m)}=V_{(km)}\partial_{\xi}^{2}u_2^{(m)}+\beta^{-2}D_{(k\cdot)}^{(\cdot n)}V_{(ns)}\bar{D}_{(m\cdot)}^{(\cdot s)}u_2^{(m)}-\\
-\left[\left(\beta^{-2}-2\right)D_{(k\cdot)}^{(\cdot n)}V_{(nm)}-V_{(kn)}\bar{D}_{(m\cdot)}^{(\cdot n)}\right]\partial_{\xi}u_1^{(m)};\\
\beta^2=\left(c_2/c_1\right)^2,\quad c_1=\sqrt{\left(\lambda_1+2\mu_1\right)/\rho_1},\quad R_{(mn)}=\tilde{\rho}G_{(mn)}+\Delta\tilde{\rho}Q_{(mn)}.
\end{gathered} \tag{1.9}$$

Уравнения связей (1.6) с учетом (1.7) приводятся к следующей форме

$$\begin{gathered}
\left[\left(\beta^{-2}-2\right)V_{(km)}\partial_{\xi}u_1^{(m)}+\beta^{-2}V_{(kn)}\bar{D}_{(m\bullet)}^{(\bullet n)}u_3^{(m)}\right]\mathrm{p}^{(k)}\left(\pm1\right)=0,\\
V_{(kn)}\left[\bar{D}_{(m\bullet)}^{(\bullet n)}u_1^{(m)}+\delta_{(m)}^{(n)}u_3^{(m)}\right]\mathrm{p}_{(k)}\left(\pm1\right)=0.
\end{gathered} \tag{1.10}$$

1.4. Формулировка спектральной задачи для слоя на базе расширенной теории пластин N-го порядка.

В соответствии с (1.2) переменные поля записываются следующим образом

$$\mathbf{u}^{(k)}=\mathbf{U}^{(k)}\exp\left[i\left(\kappa\xi-\omega\tau\right)\right], \tag{1.11}$$

где $\tilde{\omega}=\omega h/c_2$ – безразмерная фазовая частота (знак «тильда» ниже опущен), $\kappa=kh$ – безразмерное число, $\mathbf{U}^{(k)}$ – вектор амплитуд. Подстановка (1.11) в (1.9) приводит к формулировке спектральной задачи, аналогичной [45,47,50,51]

$$\left|\mathbf{A}-\omega^2\mathbf{P}\right|=0; \tag{1.12}$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\kappa^2\beta^{-2}V_{(km)}+D_{(k\cdot)}^{(\cdot n)}V_{(ns)}\bar{D}_{(m\cdot)}^{(\cdot s)} & i\kappa\left[D_{(k\cdot)}^{(\cdot n)}V_{(nm)}-\left(\beta^{-2}-2\right)V_{(kn)}\bar{D}_{(m\cdot)}^{(\cdot n)}\right]\\ i\kappa\left[\left(\beta^{-2}-2\right)D_{(k\cdot)}^{(\cdot n)}V_{(nm)}-V_{(kn)}\bar{D}_{(m\cdot)}^{(\cdot n)}\right] & \kappa^2V_{(km)}+\beta^{-2}D_{(k\cdot)}^{(\cdot n)}V_{(ns)}\bar{D}_{(m\cdot)}^{(\cdot s)}\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}R_{(km)} & 0\\ 0 & R_{(km)}\end{pmatrix} \tag{1.13}$$

В отличие от [45,47,50,51], ниже, как и в [58], учтены связи, соответствующие краевым условиям на поверхностях $\zeta = \pm 1$. При подстановке (1.11) в уравнения (1.10) связи приводятся к однородному матричному уравнению

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{U} = 0, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_+ & \mathbf{B}_- \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{1.14}$$

$$\mathbf{B}_\pm = \begin{pmatrix} i\kappa\left(\beta^{-2} - 2\right) V_{(km)} \mathrm{p}^{(m)}(\pm 1) & \beta^{-2} V_{(mn)} \bar{D}^{(\bullet n)}_{(k\bullet)} \mathrm{p}^{(m)}(\pm 1) \\ V_{(mn)} \bar{D}^{(\bullet n)}_{(k\bullet)} \mathrm{p}^{(m)}(\pm 1) & i\kappa V_{(km)} \mathrm{p}^{(m)}(\pm 1) \end{pmatrix}$$

В соответствии с подходом [58] далее решается задача о стационарных значениях для квадратичных форм $\mathbf{A}$ и $\mathbf{P}$ (1.13) с ограничениями в форме (1.14)

$$\mathbf{U}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{U} / \mathbf{U} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{U} = 0, \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{U} = 0. \tag{1.15}$$

Следуя методу [59], введем QZ-разложение матрицы связей (1.14) [58]

$$\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{(2N+2)\times 4},$$

и определим линейные операторы, учитывающие связи, следующим образом [59]

$$\mathbf{A}_C = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}, \quad \mathbf{P}_C = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q},$$

$$\mathbf{A}_C = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} & \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{22} \end{pmatrix}_{(2N+2)\times(2N+2)}, \quad \mathbf{P}_C = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{P}}_{11} & \bar{\mathbf{P}}_{12} \\ \bar{\mathbf{P}}_{21} & \bar{\mathbf{P}}_{22} \end{pmatrix}_{(2N+2)\times(2N+2)}.$$

Фазовые частоты $\omega(\kappa)$ следуют из решения стационарной задачи для пары форм $\bar{\mathbf{A}}_{22}$ и $\bar{\mathbf{P}}_{22}$ без ограничений (1.14), сводящейся к спектральной задаче (1.16)

$$\left(\bar{\mathbf{A}}_{22} - \omega^2 \bar{\mathbf{P}}_{22}\right) \cdot \bar{\mathbf{U}} = 0, \quad \bar{\mathbf{U}} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{U}. \tag{1.16}$$

Формы нормальных мод, соответствующие частоте ω_k, определяются (1.17)

$$\mathbf{U}^k = \mathbf{Q} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{U}_1^{k(m)} & \bar{U}_3^{k(m)} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad k \in [1, 2N-2] \cap \mathbb{Z}. \tag{1.17}$$

2. ДИСПЕРСИЯ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН В ГРАДИЕНТНОМ СЛОЕ

2.1. Физические постоянные функционально-градиентного материала.

Рассматривается градиентный в трансверсальном направлении материал (1.1) со степенным распределением объемной доли составляющей «1» (рис.1)

$$q(\zeta) = 2^{-p}(1+\zeta)^p \tag{2.1}$$

Для типового материала [60] на базе двух структурных составляющих примем следующие безразмерные параметры: $\tilde{E} \approx 0{,}184$, $\tilde{\rho} \approx 0{,}711$, $\beta \approx 0{,}525$.

Сходимость величин частот запирания $\omega(\kappa = 0)$ по мере увеличения порядка теории N к точному решению [48] для изотропного показана в работах [45,47].

Зависимость частот запирания нормальных волн от порядка теории для градиентного слоя при $p = 5$ показана в Таблице 1, для $p = 1/5$ – в Таблице 2.

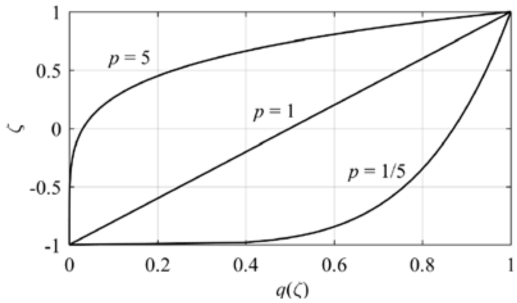


Рис.1. Степенная зависимость объемной доли структурной составляющей «1» от безразмерной нормальной координаты ζ (3.1).

Таблица 1.

Сходимость решения спектральной задачи при $\kappa = 0,\ p = 5$.

N \ n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
3	0,570	1.087	–	–	–	–	–	–	–	–	–
4	0,544	1,038	1,287	2,451	–	–	–	–	–	–	–
5	0,542	1,032	1,172	2,083	2,234	3,970	–	–	–	–	–
6	0,541	1,031	1,166	1,802	2,222	3,003	3,434	5,722	–	–	–
7	0,541	1,031	1,158	1,798	2,206	2,459	3,427	4,062	4,686	7,742	–
8	0,541	1,031	1,157	1,761	2,206	2,467	3,162	3,355	4,702	5,267	6,026
9	0,541	1,031	1,157	1,761	2,205	2,363	3,193	3,355	3,926	4,502	6,080
10	0,541	1,031	1,157	1,758	2,205	2,364	2,978	3,350	3,979	4,506	4,762
11	0,541	1,031	1,157	1,758	2,205	2,355	2,977	3,350	3,615	4,487	4,836
12	0,541	1,031	1,157	1,758	2,205	2,355	2,952	3,350	3,606	4,293	4,487
13	0,541	1,031	1,157	1,758	2,205	2,354	2,951	3,350	3,556	4,255	4,486
14	0,541	1,031	1,157	1,758	2,205	2,354	2,949	3,350	3,548	4,174	4,486
15	0,541	1,031	1,157	1,758	2,205	2,354	2,949	3,350	3,544	4,149	4,486
20	0,541	1,031	1,157	1,758	2,205	2,354	2,949	3,350	3,542	4,135	4,486

Таблица 2.

Сходимость решения спектральной задачи при $\kappa = 0,\ p = 1/5$.

N \ n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
3	0,969	1,847	–	–	–	–	–	–	–	–	–
4	0,968	1,845	1,930	3,679	–	–	–	–	–	–	–
5	0,968	1,844	1,923	2,926	3,665	5,576	–	–	–	–	–
6	0,968	1,844	1,915	2,906	3,649	3,982	5,537	7,589	–	–	–
7	0,968	1,844	1,915	2,863	3,649	3,935	5,123	5,455	7,498	9,763	–
8	0,968	1,844	1,915	2,862	3,649	3,815	5,028	5,454	6,369	7,271	9,582
9	0,968	1,844	1,915	2,861	3,649	3,811	4,780	5,453	6,200	7,263	7,735
10	0,968	1,844	1,915	2,861	3,649	3,808	4,768	5,453	5,768	7,257	7,459
11	0,968	1,844	1,915	2,861	3,649	3,808	4,756	5,453	5,737	6,790	7,257
12	0,968	1,844	1,915	2,861	3,649	3,808	4,755	5,453	5,705	6,728	7,257
13	0,968	1,844	1,915	2,861	3,649	3,808	4,755	5,453	5,702	6,661	7,257
14	0,968	1,844	1,915	2,861	3,649	3,808	4,755	5,453	5,701	6,652	7,257
15	0,968	1,844	1,915	2,861	3,649	3,808	4,755	5,453	5,701	6,649	7,257
20	0,968	1,844	1,915	2,861	3,649	3,808	4,755	5,453	5,701	6,648	7,257

Пусть допустимая погрешность приближения фазовой частоты ограничена

$$\Delta_N = \left(\omega\big|_N - \omega\big|_{N=20}\right) \Big/ \omega\big|_{N=20} \leqslant 0,05;$$

Порядки теории, необходимые для вычисления низших частот запирания нормальных волн в соответствии с данной оценкой, приведены в Таблице 3. В третьей графе Таблицы 3 приведены оценки минимальных порядков теории, обеспечивающих сходимость решения к точному [48] для однородного слоя [46].

Таблица 3.

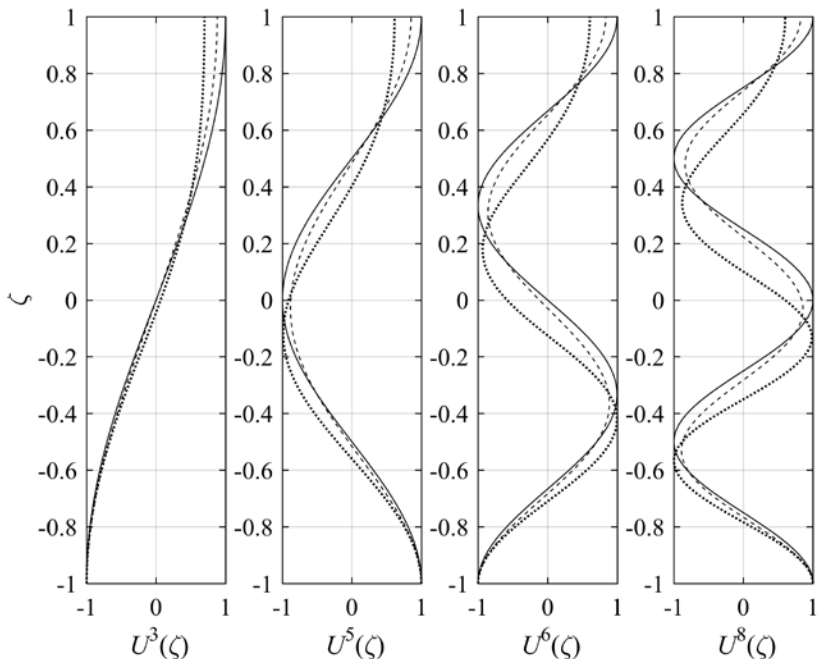
Порядок теории пластин, необходимый для оценки частоты запирания.

Номер моды, n		3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Порядок теории, N	$p=5$	4	4	5	6	5	8	10	8	11	12	12
	$p=1/5$	3	3	4	5	5	7	9	7	10	11	10
	$p=0$	3	3	4	5	5	8	9	8	11	11	11

Формы распространяющихся нормальных мод на частотах запирания при $p=0,\ p=5,\ p=1/5$, полученные на основе теории 20 порядка, приведены на рис.2.

Распределения по толщине слоя соответствующих K-й моде безразмерных компонентов тензора напряжения $\sigma_{ij}(\zeta) \big/ \max\left|\sigma_{ij}(\zeta)\right| \ \left(\zeta \in [-1,1]\right)$, заданные соотношениями (2.2), приведены на рис.3. Расширенная теория N-го порядка, включающая уравнения связей (1.6), обеспечивает точное удовлетворение краевым условиям на лицевых поверхностях градиентно-неоднородного слоя

$$\begin{aligned}
&\sigma_{11}(\zeta, K)\big|_{\kappa=0} = V_{(kn)} \bar{D}_{(m\bullet)}^{(\bullet n)} U_3^{K(m)} \mathrm{p}^{(k)}(\zeta);\\
&\sigma_{13}(\zeta, K)\big|_{\kappa=0} = V_{(kn)} \bar{D}_{(m\bullet)}^{(\bullet n)} U_1^{K(m)} \mathrm{p}^{(k)}(\zeta);\\
&\sigma_{33}(\zeta, K)\big|_{\kappa=0} = \beta^{-2} V_{(kn)} \bar{D}_{(m\bullet)}^{(\bullet n)} U_3^{K(m)} \mathrm{p}^{(k)}(\zeta).
\end{aligned} \tag{2.2}$$



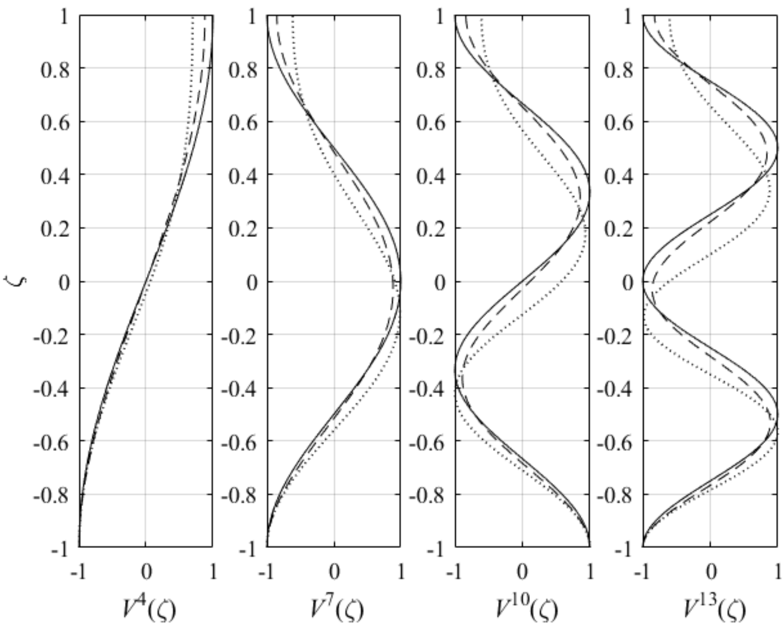


Рис.2. Формы распространяющихся нормальных волн в слое при $\kappa = 0$: однородный материал $(p = 0)$ – сплошная линия, градиентный материал: $p = 5$ – пунктирная линия, $p = 1/5$ – штриховая линия.

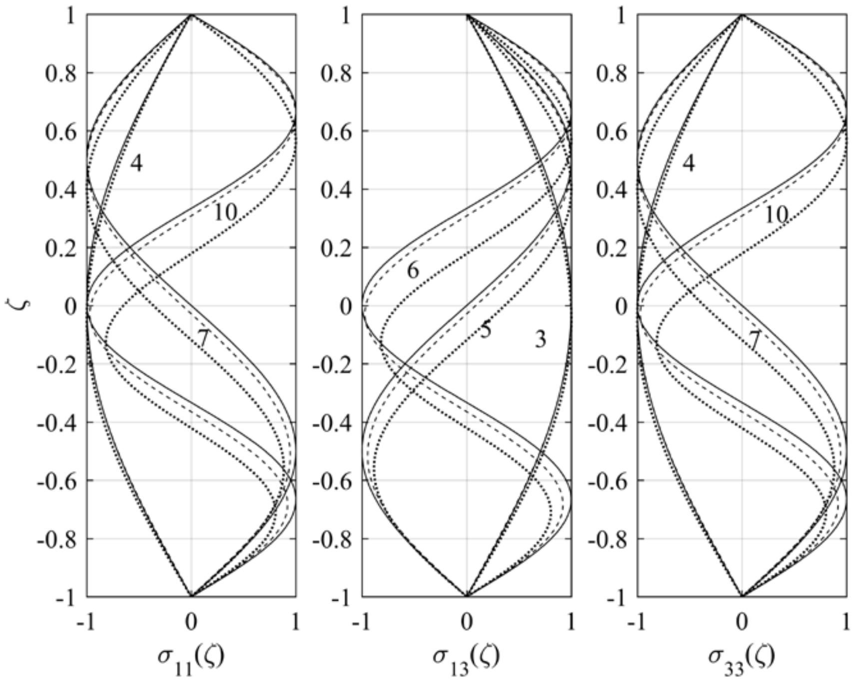


Рис.3. Напряжения в слое, соответствующие модам 4, 7, 10 $(\sigma_{11}, \sigma_{33})$ и 3, 5, 6 (σ_{13}) на частотах запирания $(\kappa = 0)$: однородный материал $(p = 0)$ – сплошная линия, градиентный материал: $p = 5$ – пунктир, $p = 1/5$ – штриховая линия.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе расширенной теории пластин N-го порядка, являющейся частным случаем расширенной теории оболочек [56] и обеспечивающей точное удовлетворение краевым условиям на лицевых поверхностях, построено решение дисперсионной задачи для упругого неоднородного функционально-градиентного слоя со степенной зависимостью физических постоянных по толщине. Оценки сходимости последовательностей частот запирания, образующихся по мере роста порядка теории, позволяют заключить, что в случае показателя степени $p=1/5<1$ (при преобладании структурной составляющей с большим модулем упругости, рис.1) минимально необходимые порядки соответствуют однородному слою, для которого известно точно решение задачи Рэлея-Лэмба [48]. В случае показателя $p=5>1$ (при преобладании структурной составляющей с меньшим модулем упругости и образовании области локального повышения жесткости, рис.1), минимально необходимые порядки теории превышают таковые для однородного слоя на единицу для 5, 6, 8, 9, 12 мод. Формы нормальных мод в случае $P=1/5$ достаточно близки к формам однородного слоя, в случае $p=5$ различие существенно, особенно для высших фазовых частот. Распределения напряжений по толщине слоя для 3 и 4 мод практически идентичны изотропному слою и существенно несимметричны для высших частот, особенно в случае $p=5$. Таким образом, расширенная теория пластин обеспечивает достаточную точность приближенного решения дисперсионных задач для плоского слоя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Jha D.K., Kant T., Singh R.K. *A critical review of recent researches on functionally graded plates* // Composite Structures. – 2013. – Vol.96. – Pp.833-849.
2. Sale M., Rizzo P., Marzani A. *Semi-analytical formulation for the guided waves-based reconstruction of elastic moduli* // Mechanical Systems and Signal Processing. – 2011. – Vol.25. – Pp.2241-2256.
3. Gravenkamp H., Bause F., Song C. *On the computation of dispersion curves for axisymmetric elastic waveguides using the Scaled Boundary Finite Element Method* // Computers and Structures. – 2014. – Vol.131. – Pp.46-55.
4. Fahmy A.H., Adler E.L. *Propagation of acoustic waves in multilayers: A matrix description* // Appl. Phys. Letters. – 1973. – Vol.22. – Pp.495-497.
5. Pasteraud T., Laude V., Ballandras S. *Stable scattering matrix method for surface acoustic waves in piezoelectric multilayers* // Appl. Phys. Letters. – 2002. – Vol.80. – Pp.2544-2546.
6. Gravenkamp H., Song C., Prager J. *A numerical approach for the computation of dispersion relations for plate structures using the scaled boundary finite element method* // J. Sound and Vibration. – 2012. – Vol.331. – Pp.2543-2557.
7. Hedayatrasa S., Bui T.Q., Zhang C., Lim C.W. *Numerical modeling of wave propagation in functionally graded materials using time-domain spectral Chebyshev elememts* // J. Comput. Physics. – 2014. – Vol.258. – Pp.381-404.
8. Cao X., Jin F., Jeon I. *Calculation of propagation properties of Lamb waves in a functionally graded material (FGM) plate by power series technique* // NDT&E International. – 2011. – Vol.44. – Pp.84-92.

9. Моисеенко И.А., Сторожев В.И. *Спектры неосесимметричных нормальных упругих волн ортотропных цилиндрах с функционально-градиентной неоднородностью* // Механика твердого тела. – 2015. – №45. – С.112-124.
10. Моисеенко И.А., Волчков В.В. *Распространение нормальных волн в трансверсально-изотропном радиально-неоднородном полом цилиндре с секторным вырезом* // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2016. – №4. – С.35-49.
11. Моисеенко И.А. *Распространение нормальных волн вдоль трансверсально-изотропных функционально-градиентных цилиндров* // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2018. – №1. – С.37-54.
12. Моисеенко И.А. *Нормальные волны вдоль ортотропных функционально-градиентных цилиндров секторного поперечного сечения* // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2017. – №4. – С.35-48.
13. Ватульян А.О., Моргунова А.В. *Исследование дисперсионных свойств цилиндрических волноводов с переменными свойствами* // Акустический журнал. – 2015. – Т.61. – №3. – С.295-301.
14. Lefebvre J.E., Zhang V., Gazalet J., Gryba T. *Legendre polynomial approach for modelling free-ultrasonic waves in multilayered plates* // J. of Appl. Physics. – 1999. – Vol.85. – P.3419.
15. Elmaimouni L., Lefebvre J. E., Zhang V., Gryba T. *Guided waves in radially graded cylinders: a polynomial approach* // NDT&E International. – 2005. – Vol.38. – Pp.344-353.
16. Lefebvre J.E., Yu J.G., Ratolojanahary F.E., Elmaimouni L., Xu W.J., Gryba T. *Mapped orthogonal polynomial method applied to elastic waves-based devices* // AIP Advances. – 2016. – Vol.6. – P.065307.
17. Dahmen S., ben Amor M., ben Ghozlen M.H. *Investigation of the coupled Lamb waves propagation in viscoelastic and anisotropic multilayer composites by Legendre polynomial method* // Composite Structures. – 2016. – Vol.153. – Pp.557-568.
18. Zheng M., He C., Lu Y., Wu B. *State-vector formalism and the Legendre polynomial solution for modelling guided waves in anisotropic plates* // J. Sound and Vibration. – 2018. – Vol.412. – Pp.372-388.
19. Гольденвейзер А.Л., Каплунов Ю.Д. *Динамический погранслой в задачах колебаний оболочек* // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1988. – №4. – С.152-162.
20. Вильде М.В., Каплунов Ю.Д., Коссович Л.Ю. *Краевые и резонансные явления в упругих телах.* – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 280 с.
21. Вильде М.В. *Исследование явления краевого резонанса в пластинах на основе трехмерных уравнений теории упругости* // Механика деформируемых сред. – 2010. – №16. – С.7-14.
22. Вильде М.В. *Кромочные волны высшего порядка в толстой пластине* // Вестник Нижегородского ун-та им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – №4-5. – С.2060-2062.
23. Вильде М.В., Коссович Л.Ю., Шевцова Ю.В. *Асимптотическое интегрирование динамических уравнений теории упругости для случая многослойной тонкой оболочки* // Изв. Саратовского ун-та. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2012. – Т.12. – №2. – С.56-64.

24. Вильде М.В., Сергеева Н.В. *Моды наследственно-упругого слоя с перекрестными граничными условиями на лицевых поверхностях* // Математика. Механика. – 2016. – №18. – С.94-97.
25. Векуа И.Н. *Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек*. – М: Наука, 1982. – 282 с.
26. Гуляев В.И., Баженов В.А., Лизунов П.П. *Неклассическая теория оболочек и ее приложение к решению инженерных задач*. – Львов: Вища школа. – 1978, 192 с.
27. Аннин Б.Д., Волчков Ю.М. *Неклассические модели в теории пластин и оболочек* // Прикладная механика и техническая физика. – 2016. – Т.57. – №5. – С.5-14.
28. Schwab C., Wright S. *Boundary layers in hierarchical beam and plate models* // J. of Elasticity. – 1995. – Vol.38. – Pp.1-40.
29. Амосов А.А., Жаворонок С.И., Леонтьев К.А. *О решении некоторых задач о напряженно-деформированном состоянии анизотропных толстостенных оболочек вращения в трехмерной постановке* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2004. – Т.10. – №3. – С.301-310.
30. Волчков Ю.М., Дергилева Л.А. *Уравнения упругого анизотропного слоя* // Прикладная механика и техническая физика. – 2004. – Т.45. – №2(264). – С.188-198.
31. Волчков Ю.М., Дергилева Л.А. *Сведение трехмерной задачи теории упругости к двумерной на основе аппроксимации перемещений и напряжений полиномами Лежандра* // Прикладная механика и техническая физика. – 2007. – Т.48. – №3(283). – С.450-459.
32. Волчков Ю.М. *Модифицированные уравнения слоистых пластин конечных размеров из ортотропного материала. Сравнение результатов численных расчетов с аналитическими решениями* // Прикладная механика и техническая физика. – 2017. – Т.58. – №5(345). – С.167-177.
33. Никабадзе М.У. *Вариант системы уравнений тонких тел* // Вестник Московского ун-та им. М.В. Ломоносова. Сер.1: Математика. Механика. – 2006. – №1. – С.30-34.
34. Никабадзе М.У. *Применение системы полиномов Чебышева к теории тонких тел* // Вестник Московского ун-та им. М.В. Ломоносова. Сер.1: Математика. Механика. – 2007. – №5. – С.54-56.
35. Zozulya V.V. *A higher order theory for shells, plates and rods* // International Journal of Mechanical Sciences. – 2015. – Vol.103. – Pp.40-54.
36. Егорова О.В., Жаворонок С.И., Рабинский Л.Н. *Взаимодействие оболочки средней толщины с акустической волной* // Вестник Московского авиационного института. – 2010. – Т.17. – №2. – С.127-135.
37. Абросимов Н.А., Баженов В.Г., Куликова Н.А. *Идентификация вязкоупругих характеристик композитных материалов по результатам экспериментально-теоретического анализа динамического поведения полусферических оболочек* // Прикладная механика и техническая физика. – 2006. – Т.47. – №3(276). – С.126-133.
38. Абросимов Н.А., Новосельцева Н.А. *Идентификация параметров моделей нелинейного деформирования изотропных и композитных материалов на основе расчетно-экспериментального анализа динамического поведения металлопластиковых цилиндрических оболочек* // Прикладная механика и техническая физика. – 2015. – Т.56. – №6(335). – С.5-13.

39. Абросимов Н.А., Куликова Н.А. *Определение параметров моделей нелинейного деформирования изотропных и композитных материалов по результатам расчетно-экспериментального анализа импульсного нагружения круглых пластин* // Прикладная механика и техническая физика. – 2011. – Т.52. – №1(306). – С.163-172.
40. Kulikov G.M., Plotnikova S.V. *On the use of a new concept of sampling surfaces in shell theory* // Advanced Structured Materials. – 2011. – Vol.15. – Pp.715-726.
41. Kulikov G.M., Plotnikova S.V. *Exact electroelastic analysis of functionally graded piezoelectric shells* // Int. J. of Solids and Structures. – 2014. – Vol.51. – No.1. – Pp.13-25.
42. Kulikov G.M., Plotnikova S.V. *Three-dimensional exact analysis of functionally graded laminated composite materials* // Advanced Structured Materials. – 2015. – Vol.45. – Pp.223-241.
43. Жаворонок С.И. *Вариационные уравнения трехмерной теории анизотропных оболочек* // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – №4-5. – С.2154-2156.
44. Жаворонок С.И. *Обобщенные уравнения Лагранжа второго рода трехмерной теории анизотропных оболочек* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2011. – Т.17. – №1. – С.116-132.
45. Жаворонок С.И. *Исследование гармонических волн в упругом слое на основе трехмерной теории оболочек N-го порядка* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2010. – Т.16. – №4-2. – С.693-701.
46. Жаворонок С.И. *Исследование распространяющихся мод гармонических волн в упругом слое на базе трехмерной теории оболочек N-го порядка* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2011. – Т.17. – №2. – С.278-287.
47. Kuznetsova E.L., Kuznetsova E.L., Rabinskiy L.N., Zhavoronok S.I. *On the equations of the analytical dynamics of the quasi-3D plate theory of I. N. Vekua type and some their solutions* // Journal of Vibroengineering. – 2018. – Vol.20. – No.2. – Pp.1108-1117.
48. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. *Гармонические колебания и волны в упругих телах*. – Киев: Наукова думка, 1981. – 284 с.
49. Жаворонок С.И. *Исследование кинематики нормальных волн в упругом слое на основе трехмерной теории оболочек N-го порядка для различных значений волновых чисел* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2012. – Т.18. – №1. – С.45-56.
50. Егорова О.В., Жаворонок С.И., Курбатов А.С. *О приложении различных вариантов теории оболочек N-го порядка к некоторым задачам о прогрессивных волнах* // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2014. – №11-1. – С.255-266.
51. Egorova O.V., Kurbatov A.S., Rabinskiy L.N., Zhavoronok S.I. *Modeling of the dynamics of plane functionally graded waveguides based on the different formulations of the plate theory of I.N.Vekua type* // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2019. https://doi.org/10.1080/15376494.2019.1578008
52. Жаворонок С.И. *Формулировка начально-краевой задачи приближенной трехмерной теории N-го порядка в обобщенных перемещениях и ее приложение к задачам стационарной динамики* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2012. – Т.18. – №3. – С.333-344.

53. Волчков Ю.М., Баев Л.В. *Моделирование напряженно-деформированного состояния слоистых сред при смешанных краевых условиях* // Вестник Нижегородского ун-та им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – №4-5. – С.2091-2093.
54. Волчков Ю.М. *Уравнения цилиндрического изгиба ортотропных пластин с произвольными условиями на их лицевых поверхностях* // Прикладная механика и техническая физика. – 2014. – Т.55. – №1. – С.84-90.
55. Никабадзе М.У. *Уравнения теории оболочек, согласованные с граничными условиями на лицевых поверхностях*. Вестник Московского ун-та им. М.В. Ломоносова. Сер.1: Математика. Механика. – 2007. – №2. – С.72-76.
56. Жаворонок С.И. *Обобщенные уравнения Лагранжа второго рода расширенной трехмерной теории N-го порядка анизотропных оболочек* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т.21. – №3. – С.370-381.
57. Егорова О.В., Жаворонок С.И., Курбатов А.С. *О вариационных уравнениях расширенной теории N-го порядка упругих оболочек и их приложении к некоторым задачам динамики* // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического ун-та. Механика. – 2015. – №2. – С.36-59.
58. Zhavoronok S. I. *On the use of extended plate theories of Vekua-Amosov type for wave dispersion problems* // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2018. – Vol.14. – No.1. – Pp.36-48.
59. Golub G. H., Underwood R. *Stationary value of the ratio of quadratic forms subject to linear constraints*. – Stanford University, 1969. – Technical Report CS 142.
60. Matsunaga H. *Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2D higher order deformation theory* // Composite Structures. – 2008. – Vol.82. – Pp.499-512.

REFERENCES

1. Jha D.K., Kant T., Singh R.K. *A critical review of recent researches on functionally graded plates*. Composite Structures, 2013, Vol.96, Pp.833-849.
2. Sale M., Rizzo P., Marzani A. *Semi-analytical formulation for the guided waves-based reconstruction of elastic moduli*. Mechanical Systems and Signal Processing, 2011, Vol.25, Pp.2241-2256.
3. Gravenkamp H., Bause F., Song C. *On the computation of dispersion curves for axisymmetric elastic waveguides using the Scaled Boundary Finite Element Method*. Computers and Structures, 2014, Vol.131, Pp.46-55.
4. Fahmy A.H., Adler E.L. *Propagation of acoustic waves in multilayers: A matrix description*. Appl. Phys. Letters, 1973, Vol.22, Pp.495-497.
5. Pasteraud T., Laude V., Ballandras S. *Stable scattering matrix method for surface acoustic waves in piezoelectric multilayers*. Appl. Phys. Letters, 2002, Vol.80, Pp.2544-2546.
6. Gravenkamp H., Song C., Prager J. *A numerical approach for the computation of dispersion relations for plate structures using the scaled boundary finite element method*. J. Sound and Vibration, 2012, Vol.331, Pp.2543-2557.
7. Hedayatrasa S., Bui T.Q., Zhang C., Lim C.W. *Numerical modeling of wave propagation in functionally graded materials using time-domain spectral Chebyshev elememts*. J. Comput. Physics, 2014, Vol.258, Pp.381-404.

8. Cao X., Jin F., Jeon I. *Calculation of propagation properties of Lamb waves in a functionally graded material (FGM) plate by power series technique.* NDT&E Intern., 2011, Vol.44, Pp.84-92.
9. Moiseenko I.A., Storozhev V.I. *Spektry neosesimmetrichnykh normal'nykh uprugikh voln v ortotropnykh tsilindrakh s funktsional'no-gradientnoj neodnorodnost'yu [Spectra of non-axisymmetric normal elastic waves in orthotropic cylinders with functionally graded heterogeneity]*. Mekhanika tverdogo tela, 2015, No.45, Pp.112-124.
10. Moiseenko I.A., Volchkov V.V. *Rasprostranenie normal'nykh voln v transversal'no-izotropnom radial'no-neodnorodnom polom tsilindre s sektornym vyrezom [Propagation of normal waves in transversely isotropic radially inhomogeneous hollow cylinder with a sector cut]*. Vestnik DonNU. Ser.A: Estestvennye nauki, 2016, No.4, Pp.35-49.
11. Moiseenko I.A. *Rasprostranenie normal'nykh voln vdol' transversal'no-izotropnykh funktsional'no-gradientnykh tsilindrov [Propagation of normal waves along transversely isotropic functionally graded cylinders]*. Vestnik DonNU. Ser.A: Estestvennye nauki, 2018, No.1, Pp.37-54.
12. Moiseenko I.A. *Normal'nye volny vdol' ortotropnykh funktsional'no-gradientnykh tsilindrov sektornogo poperechnogo secheniya [Normal waves along the orthotropic functionally gradient cylinders of the sectoral cross section]*. Vestnik DonNU. Ser.A: Estestvennye nauki, 2017, No.4, Pp.35-48.
13. Vatul'yan A.O., Morgunova A.V. *Study of the Dispersion Properties of Cylindrical Waveguides with Variable Properties*. Acoustical Physics, 2015, Vol.61, No.3, Pp.265-271.
14. Lefebvre J.E., Zhang V., Gazalet J., Gryba T. *Legendre polynomial approach for modelling free-ultrasonic waves in multilayered plates*. J. of Appl. Physics, 1999, Vol.85, P.3419.
15. Elmaimouni L., Lefebvre J.E., Zhang V., Gryba T. *Guided waves in radially graded cylinders: a polynomial approach*. NDT&E Intern., 2005, Vol.38, Pp.344-353.
16. Lefebvre J.E., Yu J.G., Ratolojanahary F.E., Elmaimouni L., Xu W.J., Gryba T. *Mapped orthogonal polynomial method applied to elastic waves-based devices*. AIP Advances, 2016, Vol.6, P.065307.
17. Dahmen S., ben Amor M., ben Ghozlen M.H. *Investigation of the coupled Lamb waves propagation in viscoelastic and anisotropic multilayer composites by Legendre polynomial method.* Composite Struct., 2016, Vol.153, Pp.557-568.
18. Zheng M., He C., Lu Y., Wu B. *State-vector formalism and the Legendre polynomial solution for modelling guided waves in anisotropic plates.* J. Sound and Vibration, 2018, Vol.412, Pp.372-388.
19. Gol'denveizer A.L., Kaplunov Yu.D. *Dinamicheskij pogransloj v zadachakh kolebanij obolochek [Dynamic boundary layer in problems of shell oscillations]*. Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela, 1988, No.4, Pp.152-162.
20. Wilde M.V., Kaplunov Yu.D., Kossovich L.Yu. *Kraevye i rezonansnye yavleniya v uprugikh telakh [Boundary and resonant phenomena in elastic bodies]*. Moskva, FIZMATLIT, 2010, 280 p.
21. Wilde M.V. *Issledovanie yavleniya kraevogo rezonansa v plastinakh na osnove trekhmernykh uravnenij teorii uprugosti [Study of Boundary Resonance in plates on the basis of 3D elasticity equations]*. Mekhanika deformiruemykh sred, 2010, No.16, Pp.7-14.

22. Wilde M.V. *Kromochnye volny vysshego poryadka v tolstoj plastine [Higher order edge waves in thick plates]*. Vestnik Nizhegorodskogo un-ta im. N.I. Lobachevskogo, 2011, No.4-5, Pp.2060-2062.
23. Wilde M.V., Kossovich L.Yu., Shevtsova Yu.V. *Asimptoticheskoe integrirovanie dinamicheskikh uravnenij teorii uprugosti dlya sluchaya mnogoslojnoj tonkoj obolochki [Asymptotic Integration of Dynamic Elasticity Theory Equations in the Case of Multilayered Thin Shell]*. Izv. Saratovskogo un-ta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika., 2012, Vol.12, No.2, Pp.56-64.
24. Wilde M.V., Sergeeva N.V. *Mody nasledstvenno-uprugogo sloya s perekrestnymi granichnymi usloviyami na litsevykh poverkhnostyakh [Modes of hereditary elastic layer with cross boundary conditions on faces]*. Matematika. Mekhanika, 2016, No.18, Pp.94-97.
25. Vekua I.N. *Shell Theory: General Methods of Construction, Pitman Advanced Publ. Program, Boston, 1985, 282 p.*
26. Gulyaev V.I., Bazhenov V.A., Lizunov P.P. *Neklassicheskaya teoriya obolochek i ee prilozhenie k resheniyu inzhenernykh zadach [Nonclassical shell theory and its application to the engineering problems solution]*. L'vov, Vishha shkola, 1978, 192 p.
27. Annin B.D., Volchkov Yu.M. *Nonclassical Models of the Theory of Platea and Shells*. J. Appl. Mech. and Techn. Physics, 2016, Vol.57, No.5, Pp.769-776.
28. Schwab C., Wright S. *Boundary layers in hierarchical beam and plate models*. J. of Elasticity, 1995, Vol.38, Pp.1-40.
29. Amosov A.A., Leon’tiev K.A., Zhavoronok S.I. *O reshenii nekotorykh zadach o napryazhenno-deformirovannom sostoyanii anizotropnykh tolstostennykh obolochek vrashheniya v trekhmernoj postanovke [About solving some problem on the stressed-strained state thick anisotropic shells of revolution in three-dimensional statement]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2004, Vol.10, No.3, Pp.301-310.
30. Volchkov Yu.M., Dergileva L.A. *Equations of an Elastic Anisotropic Layer*. J. Appl. Mech. and Techn. Physics, 2004, Vol.45, No.2, Pp.301-309.
31. Volchkov Yu.M., Dergileva L.A. *Reducing three-dimensional elasticity problems to two-dimensional problems by approximating stresses and displacements by legendre polynomials*. Appl. Mech. and Techn. Physics, 2007, Vol.48, No.3, Pp.450-459.
32. Volchkov Yu.M. *Modified equations of finite-size layered plates made of orthotropic material. Comparison of the results of numerical calculations with analytical solutions*. Appl. Mech. and Techn. Physics, 2017, Vol.58, No.5, Pp.904-913.
33. Nikabadze M.U. *Variant sistemy uravnenij teorii tonkikh tel [A variant of system of equations of the theory of thin bodies]*. Vestnik Moskovskogo un-ta im. M.V. Lomonosova. Ser.1: Matematika. Mekhanika., 2006, No. 1, Pp. 30-34.
34. Nikabadze M.U. *Primenenie sistemy polinomov CHebysheva k teorii tonkikh tel [Application of Chebyshev polynomials to the theory of thin bodies]*. Vestnik Moskovskogo un-ta im. M.V. Lomonosova. Ser.1: Matematika. Mekhanika, 2007, No.5, Pp.54-56.
35. Zozulya V.V. *A higher order theory for shells, plates and rods*. International Journal of Mechanical Sciences, 2015, Vol.103, Pp.40-54.
36. Egorova O.V., Rabinskiy L.N., Zhavoronok S.I. *Vzaimodejstvie obolochki srednej tolshhiny s akusticheskoj volnoj [Middle thickness shell's interaction with*

acoustical wave]. Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo instituta, 2010, Vol.17, No.2, Pp.127-135.

37. Abrosimov N.A., Bazhenov V.G., Kulikova N.A. *Identification of viscoelastic characteristics of composite materials on the basis of results of an experimental and theoretical analysis of the dynamic behavior of hemispherical shells*. Appl. Mech. and Techn. Physics, 2006, Vol.47, No.3, Pp.412-418.
38. Abrosimov N. A., Novosel'tseva N. A. *Identification of parameters of models of nonlinear deformation of isotropic and composite materials on the basis of calculations and experiments aimed at analyzing the dynamic behavior of cylindrical metal-plastic shells.* Appl. Mech. and Techn. Physics, 2015, Vol.56, No.6, Pp.937-944.
39. Abrosimov N.A., Kulikova N.A. *Determining the model parameters of nonlinear deformation of isotropic and composite materials from the results of an experimental-computational analysis of impulsively loaded circular plates*. Appl. Mech. and Techn. Physics, 2011, Vol.52, No.1, Pp.132-140.
40. Kulikov G.M., Plotnikova S.V. *On the use of a new concept of sampling surfaces in shell theory*. Advanced Structured Materials, 2011, Vol.15, Pp.715-726.
41. Kulikov G.M., Plotnikova S.V. *Exact electroelastic analysis of functionally graded piezoelectric shells*. Int. J. of Solids and Structures, 2014, Vol.51, No.1, P.125.
42. Kulikov G.M., Plotnikova S.V. *Three-dimensional exact analysis of functionally graded laminated composite materials*. Advanced Structured Materials, 2015, Vol.45, Pp.223-241.
43. Zhavoronok S.I. *Variatsionnye uravneniya trekhmernoj teorii anizotropnykh obolochek [Variational equations of a three-dimensional anisotropic theory of shells]*. Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo, 2011, No.4-5, Pp.2154-2156.
44. Zhavoronok S.I. *Obobshhennye uravneniya Lagranzha vtorogo roda trekhmernoj teorii anizotropnykh obolochek [Generalized Lagrange equations of the second kind of three-dimensional anisotropic shell theory]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2011, Vol.17, No.1, Pp.116-132.
45. Zhavoronok S.I. *Issledovanie garmonicheskikh voln v uprugom sloe na osnove trekhmernoj teorii obolochek N-go poryadka [Investigation of harmonic waves in elastic layer using Nth order three-dimensional shells theory]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2010, Vol.16, No.4-2, Pp.693-701.
46. Zhavoronok S. I. *Issledovanie rasprostranyayushhikhsya mod garmonicheskikh voln v uprugom sloe na baze trekhmernoj teorii obolochek N-go poryadka [Investigation of propagating modes of harmonic waves in elastic layer using Nth order three-dimensional shells theory]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2011, Vol.17, No.2, Pp.278-287.
47. Kuznetsova E.L., Kuznetsova E.L., Rabinskiy L.N., Zhavoronok S.I. *On the equations of the analytical dynamics of the quasi-3D plate theory of I.N. Vekua type and some their solutions*. Journal of Vibroengineering, 2018, Vol.20, No.2, Pp.1108-1117.
48. Grin'chenko V.T., Meleshko V.V. *Garmonicheskie kolebaniya i volny v uprugikh telakh [Harmonic oscillations and waves in elastic bodies]*. Kiev, Naukova dumka, 1981, 284 p.
49. Zhavoronok S.I. *ssledovanie kinematiki normal'nykh voln v uprugom sloe na osnove trekhmernoj teorii obolochek N-go poryadka dlya razlichnykh znachenij volnovykh chisel [Kinematics of normal modes in elastic layer for some wave*

numbers investigation based on n-th order three-dimensional shells' theory]. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2012, Vol.18, No.1, Pp.45-56.

50. Egorova O.V., Kurbatov A.S., Zhavoronok S.I. *O prilozhenii razlichnykh variantov teorii obolochek N-go poryadka k nekotorym zadacham o progressivnykh volnakh [An application of various N-th order shell theories to normal waves propagation problems]*. Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki, 2014, No.11-1, Pp.255-266.
51. Egorova O.V., Kurbatov A.S., Rabinskiy L.N., Zhavoronok S.I. *Modeling of the dynamics of plane functionally graded waveguides based on the different formulations of the plate theory of I.N. Vekua type*. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2019. https://doi.org/10.1080/15376494.2019.1578008
52. Zhavoronok S.I. *Formulirovka nachal'no-kraevoj zadachi priblizhennoj trekhmernoj teorii N-go poryadka v obobshhennykh peremeshheniyakh i ee prilozhenie k zadacham statsionarnoj dinamiki [A formulation of the three-dimensional approximated shells theory of N-th order using generalized displacements and its application to steady dynamics]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2012, Vol.18, No.3, Pp.333-344.
53. Volchkov Yu.M., Baev L.V. *Modelirovanie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya sloistykh sred pri smeshannykh kraevykh usloviyakh [Simulation of the stressed-strained state of layered media with mixed boundary conditions]*. Vestnik Nizhegorodskogo un-ta im. N.I. Lobachevskogo, 2011, No.4-5, Pp.2091-2093.
54. Volchkov Yu.M. *Equations of cylindrical bending of orthotropic plates with arbitrary conditions on their front surfaces*. Appl. Mech. and Techn. Physics, 2014, Vol.55, No.1, Pp.84-90.
55. Nikabadze M.U. *Uravneniya teorii obolochek, soglasovannye s granichnymi usloviyami na litsevykh poverkhnostyakh [Shell theory equations consistent with boundary conditions at face surfaces]*. Vestnik Moskovskogo un-ta im. M.V. Lomonosova. Ser.1: Matematika. Mekhanika, 2007, No.2, Pp.72-76.
56. Zhavoronok S.I. *Obobshhennye uravneniya Lagranzha vtorogo roda rasshirennoj trekhmernoj teorii N-go poryadka anizotropnykh obolochek [The generalized lagrange equations of the second kind for the extended three-dimensional n'th order theory of anisotropic shells]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2015, Vol.21, No.3, Pp.370-381.
57. Egorova O.V., Zhavoronok S.I., Kurbatov A.S. *An application of various n-th order shell theories to normal waves propagation problems*. PNRPU Mechanics Bulletin. 2015. No.2. Pp.36-59.
58. Zhavoronok S.I. *On the use of extended plate theories of Vekua-Amosov type for wave dispersion problems*. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2018, Vol.14, No.1, Pp.36-48.
59. Golub G.H., Underwood R. *Stationary value of the ratio of quadratic forms subject to linear constraints*. Stanford University, 1969. Technical Report CS 142.
60. Matsunaga H. *Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2D higher order deformation theory*. Composite Struct., 2008, Vol.82, Pp.499-512.

Поступила в редакцию 30 апреля 2019 года.

Сведения об авторе:

Жаворонок Сергей Игоревич – к.ф.-м.н., с.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: zhavor71@mail.ru