УДК 539.32

СТРУКТУРА РЕШЕНИЙ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ЭШЕЛБИ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГАУССА ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ПОЛИНОМОВ

Волков-Богородский Д.Б.

ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Исследуется структура решений обобщенной задачи Эшелби в теории упругости для многослойных включений сферической и цилиндрической формы с полиномиальным полем перемещений на бесконечности. Такая задача возникает в методе асимптотического усреднения уравнений вязкоупругости с быстроосциллирующими коэффициентами и используется для точного вычисления эффективных характеристик композитного материала. Для ее решения привлекается представление Гаусса для однородных полиномов, которое позволяет указать такие потенциалы представления Папковича-Нейбера в фазах материала, которые разрешают эту задачу в конечном алгебраическом виде.

Ключевые слова: межфазный слой; аналитические решения; точный учет межфазных взаимодействий; эффективные характеристики вязкоупругих материалов; структурный анализ решений уравнений вязкоупругости; обобщенное представление Папковича-Нейбера

STRUCTURE OF THE GENERALIZED ECHELBY PROBLEM SOLUTION AND GAUSS REPRESENTATION FOR HOMOGENEOUS POLYNOMIALS

Volkov-Bogorodsky D.B.

Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

ABSTRACT

Solutions of the generalized Eshelby problem with polynomial displacements at infinity are investigated in elasticity theory for spherical and cylindrical multilayer inclusions. Such problems arise in the asymptotic averaging method for the viscoelasticity equations with rapidly oscillating coefficients. They are used for accurately calculating effective characteristics of the composite materials. To solve this problem we use the Gauss representation for homogeneous polynomials and it’s related potentials of Papkovich-Neuber representation that resolve the Eschelby problem in finite algebraic form.

Keywords: interphase layer; analytical solutions; exact account of interphase interactions; effective characteristics of viscoelastic materials; structural analysis of solutions of viscoelastic equations; generalized Papkovich-Nneuber representation

ВВЕДЕНИЕ

Асимптотическое усреднение уравнений вязкоупругости с быстро осциллирующими коэффициентами [1] в композитном материале с включениями сферической или цилиндрической формы приводит к необходимости эффективного решения задачи на ячейке с периодическими условиями для функций быстрых переменных. Эта задача используется для определения характеристик вязкоупругих композитных материалов, и в случае изотропных компонент, составляющих его структуру, описывается в пространстве образов интегрального преобразования Лапласа с помощью вспомогательных гармонических потенциалов $\boldsymbol{f}$ и ϕ представления Папковича-Нейбера для перемещений

$$\boldsymbol{u}=\frac{\boldsymbol{f}}{\mu^*}+\frac{K^*+\mu^*/3}{K^*+4\mu^*/3}\frac{\nabla\left(\phi-\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{f}\right)}{\mu^*},\quad \nabla^2\boldsymbol{f}=0,\quad \nabla^2\phi=0. \tag{1}$$

Здесь $\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор из начала координат, $\boldsymbol{f}$ – векторный гармонический потенциал, ϕ – скалярный гармонический потенциал, μ^*, K^* – функции сдвиговой и объемной релаксации в пространстве образов, представляющие собой материальные константы в представлении (1), которые принимают комплексное значение и зависят от параметра $s=\xi+i\eta$ интегрального преобразования Лапласа.

На основе этого представления были построены [2,3] полные системы функций, основывающиеся на аппроксимации гармонических потенциалов $\boldsymbol{f}$ и ϕ в уравнении (1) системами гармонических базисных функций с заданными аналитическими свойствами. Эти системы определяются формальным рядом с двумя произвольными функциями $\psi_0(w)$ и $U_0(z)$, $w=x+iy$, в пространстве декартовых координат $P=(x,y,z)$, который имеет конечную форму представления в случае выбора U_0 в виде полинома

$$\Phi=\sum_p\frac{(-1)^p\,\overline{w}^p}{4^p\,p!}\psi_0^{(-p)}(w)U_0^{(2p)}(z),\quad \psi_0^{(-p-1)}=\int\psi_0^{(-p)}dw,$$
$$\psi_0^{(0)}=\psi_0(w),\quad \nabla^2\Phi=0. \tag{2}$$

При выборе определяющих функций в виде $\psi_0=w^m$ и $U_0=z^{n-m}$ ряд (2) совпадает с системой однородных гармонических полиномов $\Phi_n^m(P)$ (системой шаровых функций), представленных в комплексной форме, и является эффективным математическим аппаратом для аналитической работы с ними. Эти системы функций используются для аппроксимации решений в задаче на ячейке в методе асимптотического усреднения блочным методом наименьших квадратов [2,3]. Определение в виде ряда (2) позволяет сформулировать между этими функциями систему рекуррентных соотношений, которая используется для их вычисления, дифференцирования и интегрирования в аналитическом виде.

Однако, в случае включений сферической и цилиндрической формы, может быть предложен еще более эффективный аппарат аппроксимирующих функций на основе решения задачи Эшелби [4] для одного многослойного включения в матрице с полиномиальной асимптотикой на бесконечности. Здесь аналитическим механизмом, обеспечивающим решение этой задачи в конечном виде с точным учетом контактных условий, является метод радиальных множителей [3,5], а также представление Гаусса [6] для однородных гармонических полиномов. Отметим, что решение задачи Эшелби первого порядка является необходимой частью метода Эшелби-Кристенсена [7] для оценки эффективных характеристик композитных материалов методом трех сферических тел.

Развиваемый в данной работе аналитический аппарат переносится также и на другие модели механики сплошных сред: на градиентные уравнения теории упругости [8-10], на уравнения Бринкмана и Стокса, применяемые в задачах фильтрации [11], на уравнения теплопроводности и т.д.

ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА ЭШЕЛБИ В МНОГОСЛОЙНЫХ ОБЛАСТЯХ СФЕРИЧЕСКОЙ И ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

Будем называть задачу для уединенного многослойного включения в пространстве с полиномиальной асимптотикой на бесконечности обобщенной задачей Эшелби по аналогии с задачей, возникающей при оценке эффективных характеристик композитных материалов методом трех сферических тел [7]. Задача решается с помощью метода радиальных множителей над полем комплексных чисел на основе представления Папковича-Нейбера (1), в котором K^* и μ^* – комплексные модули исходных материалов. Полноту аппроксимирующей системы функций обеспечивает полиномиальная асимптотика $\boldsymbol{U}_n^{(0)}$ на бесконечности

$$\boldsymbol{u}(P) \to \boldsymbol{U}_n^{(0)}, \quad \boldsymbol{U}_n^{(0)}(P) = \frac{\boldsymbol{f}_n^{(0)}}{\mu_M^*} - \frac{3K_M^* + \mu_M^*}{3K_M^* + 4\mu_M^*} \frac{\nabla\left(\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{f}_n^{(0)}\right)}{2\mu_M^*}, \quad P = \{x, y, z\} \to \infty,$$

где $\boldsymbol{f}_n^{(0)}$ – гармонический векторный полином степеним n, K_M^* и μ_M^* – комплексные модули материала матрицы. Контактные условия на межфазных границах между слоями включают два векторных уравнения $[\boldsymbol{u}] = 0$ и $\left[\boldsymbol{p}(\boldsymbol{u})\right] = 0$, где $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{u}) = \left\{\sigma_{ij}(\boldsymbol{u}) n_j\right\}$ – напряжения на границе контакта, n_j – компоненты вектора внешней нормали $\boldsymbol{n}$. Анализируя уравнения контакта, представим входящие в них величины на сферической и цилиндрической поверхности радиуса r в следующем виде через потенциалы представления (1)

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{f}}{\mu^*} + \frac{3K^* + \mu^*}{3K^* + 4\mu^*} \frac{\nabla(\phi - \boldsymbol{r}\boldsymbol{f})}{2\mu^*}, \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{u}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial n} + \boldsymbol{n}\nabla \boldsymbol{f} + \left(\frac{6K^* + 2\mu^*}{3K^* + 4\mu^*} - 1\right)\boldsymbol{n}\operatorname{div} \boldsymbol{f} + \\ + \frac{3K^* + \mu^*}{3K^* + 4\mu^*} \frac{\partial \nabla(\phi - \boldsymbol{r}\boldsymbol{f})}{\partial n}.\end{aligned} \tag{4}$$

Структура потенциалов $\boldsymbol{f}$ и ϕ в задаче Эшелби, обеспечивающая разрешение контактных уравнений для величин (3), (4) в алгебраической форме, устанавливается с помощью представления фундаментальных решений уравнения Лапласа [3,5] в виде произведений радиальных множителей $h_n(r)$ и однородных гармонических полиномов $\boldsymbol{\psi}_n(P)$, а также на основе разложения Гаусса [6] для однородных полиномов $\boldsymbol{\phi}_n(P)$ в ряд по гармоническим полиномам

$$\boldsymbol{\phi}_n(P) = \sum_{k=0}^{[n/2]} r^{2k} \boldsymbol{\psi}_{n-2k}(P), \quad \nabla^2 \boldsymbol{\psi}_{n-2k}(P) = 0,$$
$$r = |P| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2}. \tag{5}$$

Для полигармонической функции ряд (5) обрывается на соответствующем шаге, и для бигармонической функции содержит только два члена. Функцию $\boldsymbol{\psi}_n$, стоящую при свободном члене, можно вычислить в явном виде

$$\boldsymbol{\psi}_n = \sum_k \alpha_k r^{2k} \nabla^{2k} \boldsymbol{\phi}_n, \quad \alpha_k = -\alpha_{k-1} \big/ \big(2k(2n+m-2k-2)\big), \quad \alpha_0 = 1.$$

В развиваемом методе необходимые потенциалы определяются в подобластях G_I, G_j, G_M, где G_I – включение, G_M – матрица, G_j – произвольное число промежуточных слоев, с помощью радиальных множителей на основе базового гармонического полинома $\boldsymbol{f}_n^{(0)}$. При подстановке такой формы потенциалов в соотношения (3), (4) произведение радиального множителя и функции преобразуется в сумму двух слагаемых, одно из которых содержит некоторый однородный полином. В результате получаем дифференциальные соотношения следующего вида, которые используются при выводе контактных уравнений на межфазных границах

$$\operatorname{div}(h\boldsymbol{f}) = h \operatorname{div} \boldsymbol{f} + \frac{h'}{r}(\boldsymbol{r}\boldsymbol{f}), \quad \nabla(h\boldsymbol{r}\boldsymbol{f}) = h\nabla(\boldsymbol{r}\boldsymbol{f}) + \frac{h'}{r}\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\boldsymbol{f}). \tag{6}$$

Анализируя с помощью представления Гаусса получающиеся в уравнениях (6) однородные полиномы, находим, что при вычислении контактных уравнений, возникают пять базисных гармонических полиномов

$$\boldsymbol{\psi}_0 = \nabla \operatorname{div} \boldsymbol{f}_n^{(0)}, \quad \boldsymbol{\psi}_1 = \boldsymbol{f}_n^{(0)},$$
$$\boldsymbol{\psi}_2 = \boldsymbol{r} \operatorname{div} \boldsymbol{f}_n^{(0)} - \frac{r^2}{2n+m-4} \nabla \operatorname{div} \boldsymbol{f}_n^{(0)} = -\left(\hat{h}_n(r)\right)^{-1} \nabla\left(\hat{h}_{n-1}(r) \operatorname{div} \boldsymbol{f}_n^{(0)}\right),$$
$$\boldsymbol{\psi}_3 = \nabla\left(\boldsymbol{r}\boldsymbol{f}_n^{(0)}\right) - \boldsymbol{r} \operatorname{div} \boldsymbol{f}_n^{(0)} = \left(\hat{h}_n(r)\right)^{-1}\left[\nabla\left(\boldsymbol{r}\left(\hat{h}_n(r)\,\boldsymbol{f}_n^{(0)}\right)\right) - \boldsymbol{r} \operatorname{div}\left(\hat{h}_n(r)\,\boldsymbol{f}_n^{(0)}\right)\right],$$
$$\boldsymbol{\psi}_4 = \boldsymbol{r}\left(\boldsymbol{r}\boldsymbol{f}_n^{(0)}\right) - \frac{r^2}{2n+m}\left(\boldsymbol{r} \operatorname{div} \boldsymbol{f}_n^{(0)} + \nabla\left(\boldsymbol{r}\boldsymbol{f}_n^{(0)}\right)\right) + \frac{r^4 \nabla \operatorname{div} \boldsymbol{f}_n^{(0)}}{(2n+m)(2n+m-2)} =$$
$$= \left(\hat{h}_{n+2}(r)\right)^{-1} \nabla \operatorname{div}\left(\hat{h}_n(r)\,\boldsymbol{f}_n^{(0)}\right),$$

где $\hat{h}_n(r) = r^{-2n-m+2}$ – сингулярный радиальный множитель, m – размерность пространства.

Таким образом, мы располагаем пятью гармоническими полиномами и десятью потенциалами, которые образуются на основе этих полиномов и сингулярных радиальных множителей $\hat{h}_n$. В результате любое из соотношений (3), (4) (которое обозначим $\boldsymbol{F}$) представляется в виде линейных комбинаций этих полиномов с радиальными множителями $h_0, h_1, h_2, h_3, h_4,$ принимающими постоянное значение на поверхности контакта сферической или цилиндрической формы

$$\boldsymbol{F} = h_0 r^2 \nabla \operatorname{div} \boldsymbol{f}_n^{(0)} + h_1 \boldsymbol{f}_n^{(0)} + h_2 \nabla\left(\boldsymbol{r}\boldsymbol{f}_n^{(0)}\right) + h_3 \boldsymbol{r} \operatorname{div} \boldsymbol{f}_n^{(0)} +$$
$$+ h_4 r^{-2} \boldsymbol{r}\left(\boldsymbol{r}\boldsymbol{f}_n^{(0)}\right). \tag{7}$$

Общая форма потенциала $\boldsymbol{f}$ в представлении (1) имеет в соответствии с выражением полиномов $\boldsymbol{\psi}_0$, $\boldsymbol{\psi}_1$, $\boldsymbol{\psi}_2$, $\boldsymbol{\psi}_3$, $\boldsymbol{\psi}_4$ через $\boldsymbol{f}_n^{(0)}$ следующий общий вид с неопределенными коэффициентами в каждой фазе материала

$$\boldsymbol{f} = \left(A_j + \hat{A}_j r^{-2n-m+2}\right)\boldsymbol{f}_n^{(0)} + \left(B_j r^{2n+m-2} + \hat{B}_j\right)\nabla\left(r^{-2n-m+4}\operatorname{div}\boldsymbol{f}_n^{(0)}\right) +$$
$$+\left(C_j r^{2n+m-2} + \hat{C}_j\right)\left[\nabla\left(r^{-2n-m+2}\left(\boldsymbol{r}\boldsymbol{f}_n^{(0)}\right)\right) - \boldsymbol{r}\operatorname{div}\left(r^{-2n-m+2}\boldsymbol{f}_n^{(0)}\right)\right] + \tag{8}$$
$$+\left(D_j r^{2n+m+2} + \hat{D}_j\right)\nabla\operatorname{div}\left(r^{-2n-m+2}\boldsymbol{f}_n^{(0)}\right) + \left(E_j + \hat{E}_j r^{-2n-m+6}\right)\nabla\operatorname{div}\boldsymbol{f}_n^{(0)}.$$

Подставляя (8) в (3) на межфазных границах и приравнивая радиальные функции в (7) нулю, получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения всех неизвестных коэффициентов в соотношениях (8).

Таким образом, мы получаем полную систему функций для аппроксимации периодических решений в задаче на ячейке с многослойными включениями сферической и цилиндрической формы. Эта система функций позволяет с высокой степенью точности аппроксимировать локальные поля напряжений в окрестности включений и вычислить эффективные вязкоупругие характеристики композитных материалов.

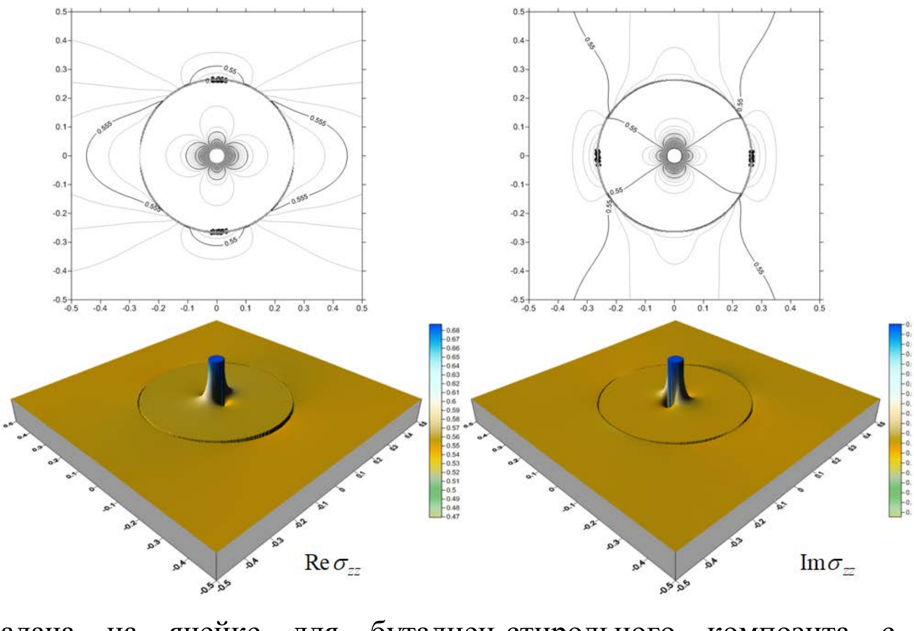

Рис.1. Задача на ячейке для бутадиен-стирольного композита с зонами стеклования и интенсивных потерь.

На рис.1 представлен пример решения такой задачи на ячейке с помощью построенной системы функций; аппроксимация периодических условий осуществлялась методом наименьших квадратов. Представлена величина напряжений (действительная и мнимая части) для бутадиен-стирольного каучука, армированного углеродными нанотрубками с учетом зон стеклования и интенсивных потерь. Параметры включений: $E_I = 1500\,\mathrm{GPa}$, $\nu_I = 0.32$; параметры матрицы: $E_M = 3.2\,\mathrm{MPa}$, $\nu_M = 0.499$, $\mathrm{tg}_\mu = 0.26$, $\mathrm{tg}_K = 0$; параметры зоны стеклования: $E_L = 3.2\,\mathrm{GPa}$, $\nu_L = 0.42$; параметры зоны высокой эластичности (включая ее геометрический размер): $E_{L_2} = 3.4\,\mathrm{MPa}$, $\nu_{L_2} = 0.46$,

$\mathrm{tg}_{L_2} = 1$, $l_2/(r + l_1) = 0.01$, где r – радиус цилиндрических включений, l_1 – ширина зоны стеклования, l_2 – ширина зоны интенсивных потерь. Эффективные вязкоупругие характеристики в направлении оси z определяются как средние значения приведенных на рис.1 величин.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан математический аппарат, позволяющий в достаточно простой форме представить точное аналитическое решение обобщенной задачи Эшелби для многослойных включений сферической или цилиндрической формы в бесконечной матрице, и тем самым построить полные системы функций для аппроксимации решений в структурно-неоднородных областях с многослойными включениями. Построенные системы функций могут применяться для уравнений теории упругости, вязкоупругости, теплопроводности и фильтрации в рамках блочного аналитико-численного метода для оценки эффективных характеристик структурно-неоднородных материалов и для моделирования масштабных эффектов усиления в современных композитах с промежуточным межфазным слоем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Vlasov A.N., Volkov-Bogorodskii D.B. *Method of asymptotic homogenization of thermoviscoelasticity equations in parametric space (Part I)* // Composites: Mechanics, Computations, Applications. – 2018. – Vol.9. – No.4. – Pp.331-343.
2. Волков-Богородский Д.Б. *Аналитико-численный метод оценки эффективных характеристик структурно-неоднородных материалов* // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – №4(2). – С.407-409.
3. Волков-Богородский Д.Б. *Метод радиальных множителей в задачах механики неоднородных сред с многослойными включениями* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2016. – Т.22. – №1. – С.19-39.
4. Эшелби. Дж. Континуальная теория дислокаций. – М.: Иностранная литература, 1963. – 248 с.
5. Lurie S., Volkov-Bogorodskiy D., Moiseev E., Kholomeeva A. *Radial multipliers in solutions of the Helmholtz equations* // Integral Transforms and Special Functions. – 2019. – Vol.30. – No.4. – Pp.254-263.
6. Соболев С.Л. *Введение в теорию кубатурных формул.* – М.: Наука, 1974. – 808 с.
7. Кристенсен Р. *Введение в механику композитов.* – М.: Мир, 1982. – 334 с.
8. Lurie S., Belov P., Volkov-Bogorodsky D., Tuchkova N. *Interphase layer theory and application in the mechanics of composite materials* // J. Mater. Sci. – 2006. – Vol.41. – No.20. – Pp.6693-6707.
9. Lurie S., Volkov-Bogorodskii D., Tuchkova N. *Exact solution of Eshelby-Christensen problem in gradient elasticity for composites with spherical inclusions* // Acta Mechanica. – 2016. – Vol.227. – No.1. – Pp.127-138.
10. Волков-Богородский Д.Б., Лурье С.А. *Решение задачи Эшелби в градиентной теории упругости для многослойных сферических включений* // Механика твердого тела. – 2016. – №2. – С.32-50.

11. Власов А.Н., Волков-Богородский Д.Б. *Асимптотическое усреднение уравнений фильтрации Бринкмана в многофазных средах с периодической структурой* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2012. – Т.18. – №1. – С.92-110.

REFERENCES

1. Vlasov A.N., Volkov-Bogorodskii D.B. *Method of asymptotic homogenization of thermoviscoelasticity equations in parametric space (Part I).* Composites: Mechanics, Computations, Applications, 2018, Vol.9, No.4, Pp.331-343.
2. Volkov-Bogorodskii D.B. *Analitiko-chislennyj metod otsenki ehffektivnykh kharakteristik strukturno-neodnorodnykh materialov [Analytical-numerical method for estimating the effective characteristics of structurally heterogeneous materials]*. Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo, 2011, No.4(2), Pp.407-409.
3. Volkov-Bogorodskii D.B. *Metod radial'nykh mnozhitelej v zadachakh mekhaniki neodnorodnykh sred s mnogoslojnymi vklyucheniyami [Method of radial multipliers in problems of mechanics of inhomogeneous media with multilayered inclusions]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2016, Vol.22, No.1, Pp.19-39.
4. Eshelbi. Dzh. *Kontinual'naya teoriya dislokatsij. [Continual theory of dislocations]*. Moskva, Inostrannaya literatura, 1963, 248 p.
5. Lurie S., Volkov-Bogorodskiy D., Moiseev E., Kholomeeva A. *Radial multipliers in solutions of the Helmholtz equations.* Integral Transforms and Special Functions, 2019, Vol.30, No.4, Pp.254-263.
6. Sobolev S.L. *Vvedenie v teoriyu kubaturnykh formul. [Introduction to the theory of cubature formulas]*. Moskva, Nauka, 1974, 808 p.
7. Kristensen R. *Vvedenie v mekhaniku kompozitov. [Introduction to the mechanics of composites]*. Moskva, Mir, 1982, 334 p.
8. Lurie S., Belov P., Volkov-Bogorodsky D., Tuchkova N. *Interphase layer theory and application in the mechanics of composite materials.* J. Mater. Sci., 2006, Vol.41, No.20, Pp.6693-6707.
9. Lurie S., Volkov-Bogorodskii D., Tuchkova N. *Exact solution of Eshelby-Christensen problem in gradient elasticity for composites with spherical inclusions.* Acta Mechanica, 2016, Vol.227, No.1, Pp.127-138.
10. Volkov-Bogorodskii D.B., Lurie S.A. *Reshenie zadachi Ehshelbi v gradientnoj teorii uprugosti dlya mnogoslojnykh sfericheskikh vklyuchenij [Solution of the Eshelby problem in the gradient theory of elasticity for multilayer spherical inclusions]*. Mekhanika tverdogo tela, 2016, No.2, Pp.32-50.
11. Vlasov A.N., Volkov-Bogorodskii D.B. *Asimptoticheskoe usrednenie uravnenij fil'tratsii Brinkmana v mnogofaznykh sredakh s periodicheskoj strukturoj [Asymptotic homogenization of Brinkman's filtration equations in the multiphase media with periodic structure]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2012, Vol.18, No.1, Pp.91-110.

Поступила в редакцию 10 сентября 2019 года.

Сведения об авторе:

Волков-Богородский Дмитрий Борисович – к.ф.-м.н., с.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: volkov-bogorodskij@iam.ras.ru