

ДИССИПАТИВНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПОЛИМЕРНОЙ КОМПОЗИЦИИ В ПОРИСТОМ КАНАЛЕ

Баранов А.В.

Российский Государственный Университет нефти и газа (национальный исследовательский университет) им. И.М. Губкина, г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Исследуется теплообмен при течении неньютоновской жидкости в плоском канале, заполненном пористым материалом. В качестве уравнения движения взята модель Бринкмана. Многие допущения были сделаны на основании того, что течение осуществляется при низких значениях критерия Рейнольдса и высоком значении критерия Пекле. Это позволяет пренебречь в уравнении движения инерционными членами и в уравнении энергии осевой теплопроводностью. В качестве реологической модели используется модель Фан-Тьен-Таннера. Поперечные нормальные напряжения и поперечная компонента скорости отсутствуют. При записи уравнения энергии используется однотемпературная модель. Такой подход предполагает локальное тепловое равновесие между жидкой и твердой фазами. Учитываются тепловые граничные условия первого рода и диссипация энергии. Температурная зависимость вязкости не учитывается. Температура среды на входе в канал и температура стенок канала не совпадают. Это означает, что композиция по мере течения в канале будет прогреваться как от горячих стенок канала, так и за счет диссипации энергии. Решение проводилось численным методом конечных разностей. Приведены результаты расчетов. Учет вязкоупругости делает профиль скорости еще более плоским. Показано значительное влияние чисел Вайсенберга и Бринкмана на профиль температуры и распределение числа Нуссельта вдоль канала. Отмечено также, что учет вязкоупругости при значительных значениях числа Вайсенберга ведет к снижению диссипативного разогрева среды. Это отражается и на профилях температуры и на локальной теплоотдаче на стенке канала. Из приведенных расчетов видно, что влияние высокоэластических свойств настолько велико, что пренебрежение вязкоупругими эффектами может привести к значительной ошибке.

Ключевые слова: математическое моделирование; вязкоупругая жидкость; неизотермическое течение; полимерная композиция

DISSIPATIVE FLOW OF VISCOELASTIC POLYMER COMPOUND IN A POROUS CHANNEL

Baranov A.V.

*Gubkin Russian State Oil and Gas University (National Research University),
Moscow, Russia*

ABSTRACT

The heat exchange at the flow of non-Newtonian fluid in a flat channel filled with porous material is investigated. Brinkman model is taken as the equation of motion. Many assumptions were made on the basis of the fact that the flow occurs at low values of the Reynolds number and at a high Peclet number. This allows us to neglect inertia terms in the equation of motion

and ignore axial thermal conductivity in the energy equation. The flow is described by the Brinkman equation. Phan-Thien-Tanner model is used as a rheological model. There are no transverse normal stresses and no transverse velocity component. When writing the energy equation, a single-temperature model is used. This approach assumes a local thermal equilibrium between the liquid and solid phases. Thermal boundary conditions of the first kind and the energy dissipation are taken into account. The temperature dependence of the viscosity is not considered. The fluid temperature at the inlet of the channel and the temperature of the walls of the channel are different. This means that the composition in the channel will be heated both because of hot channel walls and due to energy dissipation. The solution was analyzed numerically by the finite difference method. Results of calculations have been presented. Accounting for viscoelasticity makes the velocity profile even more flat. A significant effect of Weissenberg and Brinkman numbers on the temperature profile and Nusselt number distribution along the channel has been shown. It was also noted that the inclusion of viscoelasticity with significant values of Weissenberg number tends to reduce dissipative heating of the liquid. This is reflected both in the temperature profiles and the local heat transfer on the channel wall. The calculations show that the impact of elastic properties is so great that neglect of viscoelastic effects can result in significant error.

Keywords: mathematical modeling; viscoelastic fluid; non-isothermal flow; polymer composition

В литературе достаточно большое количество работ посвящено моделированию процессов течения и теплообмена различных ньютоновских и неньютоновских сред в каналах, заполненным пористым материалом. Достаточно широкий обзор работ на данную тему, появившихся в литературе до 2011 года, приведен в [1]. Из публикаций, не вошедших в данный обзор, можно отметить [2], где численно и экспериментально моделируется процесс трансферного формования, когда реакционноспособная смола впрыскивается в закрытую форму, предварительно заполненную пористым наполнителем. Жидкость считалась ньютоновской и, соответственно, использовалось уравнение Дарси. При этом вязкость считалась зависящей от температуры и степени химического превращения. Расчет проводился на основе одного уравнения энергии в предположении локального термического равновесия между смолой и пористым материалом. Сравнение численных и экспериментальных данных по распределению температуры показало важность учета диссипативного члена в уравнении энергии. Кроме этого, за последние годы появился еще целый ряд статей, в которых на основе уравнения Дарси-Бринкмана исследуется теплообмен при течении ньютоновских и степенных жидкостей в пористых каналах при различных тепловых граничных условиях [3-8].

Полимерные композиции представляют собой, как правило, вязкоупругие среды и их течение сопровождается ярко выраженными высокоэластичными эффектами. Однако до настоящего времени в литературе существует недостаточное количество публикаций, посвященных моделированию течения и теплообмена таких сред в пористых каналах. Из имеющихся немногочисленных работ в первую очередь можно отметить [9], где на основе модифицированного закона Дарси использована реологическая модель жидкости Олдройда и проанализировано влияние вязкоупругости на неустановившийся режим течения. Похожая постановка задачи для жидкости Максвелла осуществлена в [10]. В [11,12] с помощью полуявной схемы метода конечных разностей рассмотрено течение химически реагирующей жидкости в плоскопараллельном канале, заполненном гомогенным пористым материалом. В качестве

реологической модели использовалась дифференциальная модель третьего порядка. В [13] для моделирования изотермического течения вязкоупругой жидкости в пористом канале использовались уравнение Бринкмана и реологическая модель Олдройда с постоянной вязкостью. В [14] представлена достаточно сложная модель неизотермического течения обобщенной жидкости Максвелла через пористый материал между двумя бесконечными параллельными пластинами. На основе модифицированного закона Дарси задача решалась численно методом конечных разностей (неявная схема) с учетом температурной зависимости вязкости. Распределение температуры описывалось дробным законом Фурье. В отсутствие градиента давления движение жидкости осуществлялось с помощью движущейся с переменной скоростью пластиной.

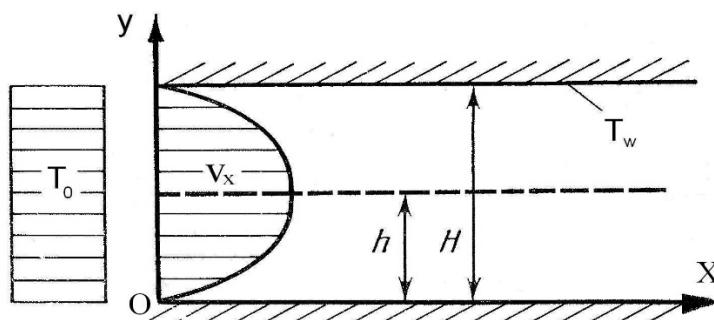


Рис.1. Схема течения в канале.

В последние годы в мировой литературе считается, что наилучшие результаты при описании течений вязкоупругих сред дают реологические модели релаксационного (скоростного) типа. Они не являются слишком громоздкими и не содержат большого количества экспериментально определяемых констант. Одной из наиболее эффективных моделей этого ряда является модель Фан-Гьен-Таннера (ФГТ) [15-18], упрощенная форма которого может быть записана в следующем виде [17]

$$f(tr(\tau))\tau + \lambda \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \tau - \tau \cdot (\nabla \vec{V})^T - \nabla \vec{V} \cdot \tau \right) = \mu \left(\nabla \vec{V} + (\nabla \vec{V})^T \right) \quad (1)$$

где τ – экстра тензор напряжений, $f(tr(\tau))$ – функция первого инварианта (так называемого следа) экстра тензора напряжений, λ – время релаксации, \vec{V} – вектор скорости, μ – вязкость.

Функция $f(tr(\tau))$ может быть записана как в экспоненциальном, так и в линейном виде [17]. В данной работе для упрощения выкладок примем линейную форму зависимости

$$f(tr(\tau)) = 1 + \frac{\varepsilon \lambda}{\mu} tr \tau_{\alpha\alpha} \quad (2)$$

где ε – реологическая константа, обратно пропорциональная продольной вязкости. Так, для некоторых марок резиновых смесей на основе различных каучуков экспериментально определено, что $\varepsilon = 1$ и $\lambda \approx 0,05$ с [18].

Рассматриваемые полимерные композиции обладают высокой вязкостью, поэтому их течение осуществляется при низких значениях критерия Рейнольдса. Это позволяет пренебречь инерционными членами в уравнении движения. Принимается также, что поперечные (вторичные) потоки в канале отсутствуют,

т.е. можно ограничиться только одной продольной компонентой скорости v_x . Поэтому пропитку пористого слоя будем описывать с помощью уравнения Бринкмана

$$-\frac{\mu}{k}v_x + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \frac{dp}{dx}, \quad (3)$$

где v_x – осевая скорость фильтрации; μ – вязкость жидкости; k – коэффициент проницаемости; p – давление, τ_{xy} – напряжение сдвига.

Для упрощения задачи в дальнейшем предполагалось, что в уравнении Бринкмана вязкость жидкости и эффективная вязкость совпадают. Дело в том, что экспериментальное нахождение эффективной вязкости μ_e довольно громоздко и проблематично с точки зрения точности определения ее численного значения, поэтому в многочисленных работах, довольно обширный обзор которых приведен в [1], многие авторы просто задаются соотношением $M = \frac{\mu_e}{\mu}$ и часто проводят расчеты только для $M = 1$. В следующей работе автор планирует проанализировать влияние числа M на гидродинамические и тепловые процессы в пористом канале.

Давление p считается независимым от поперечной координаты y . При этом реологические уравнения записываются в виде следующей системы [17]

$$f(\tau_{xx})\tau_{xx} = 2\lambda\tau_{xy}\frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad (4)$$

$$f(\tau_{xx})\tau_{xy} = \mu\frac{\partial v_x}{\partial y}. \quad (5)$$

Уравнения (4) и (5) записаны в предположении $\tau_{yy} = 0$. Если поделить (4) на (5), то получим

$$\tau_{xx} = \frac{2\lambda}{\mu}\tau_{xy}^2, \quad (6)$$

где τ_{xx} – продольная растягивающая компонента напряжений.

Таким образом, система реологических уравнений, записанных в безразмерном виде, представляется следующим образом

$$\sigma_{xx} = 2Wi\sigma_{xy}^2, \quad (7)$$

$$f(\sigma_{xx})\sigma_{xy} = \frac{\partial V_x}{\partial Y}, \quad (8)$$

где

$$f(\sigma_{xx}) = 1 + \varepsilon Wi\sigma_{xx}, \quad (9)$$

$Y = y/h$, $V_x = v_x/\bar{v}_x$, $\sigma_{xy} = \frac{\tau_{xy}h}{\mu\bar{v}_x}$, $Wi = \frac{\lambda\bar{v}_x}{h}$, Wi – число Вайсенберга, \bar{v}_x –

средняя скорость потока, h – полувысота плоской полости (см. рис.1).

Соответственно уравнение Бринкмана в безразмерном виде запишется

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial Y} = \frac{dP}{dX} + \frac{V_x}{Da}, \quad (10)$$

где $P = \frac{ph}{\mu \bar{v}_x}$, $V_x = \frac{v_x}{\bar{v}_x}$; $X = \frac{x}{h}$; $Da = \frac{k}{h^2}$ – число Дарси.

Условие постоянства расхода

$$\int_0^1 V_x dY = 1 \quad (11)$$

Граничные условия записываются следующим образом

$$Y = 0, \quad V_x = 0 \quad (12)$$

$$Y = 1, \quad \frac{\partial V_x}{\partial y} = 0 \quad (13)$$

Ввиду очевидной симметричности потока с точки зрения гидродинамики и теплообмена расчеты можно проводить как в интервале $0 \leq Y \leq 1$, так и в интервале $0 \leq Y \leq 2$. Поэтому граничное условие (13) можно записать для оси канала, а не для противоположной стенки канала.

Подстановка (7) в (9) дает

$$f(\sigma_{xx}) = 1 + 2\varepsilon Wi^2 \sigma_{xy}^2 \quad (14)$$

В свою очередь, после подстановки (14) в (8) получим

$$\frac{\partial V_x}{\partial Y} = \sigma_{xy} + 2\varepsilon Wi^2 \sigma_{xy}^3 \quad (15)$$

Система уравнений (10), (11) и (15) решалась численно методом конечных разностей с использованием итераций.

Математическая модель переноса энергии основывается на так называемой однотемпературной модели, когда используется одно уравнение энергии [19-26]. Такой подход предполагает локальное тепловое равновесие между жидкой и твердой фазами. Полимеры и композиции на их основе обладают низкой теплопроводностью. В результате течение таких сред осуществляется, как правило, при высоких значениях критерия Пекле ($Pe > 100$). Это позволяет пренебречь в уравнении энергии осевой теплопроводностью по сравнению с конвективным теплопереносом. Таким образом, уравнение энергии в безразмерном виде с учетом диссипации запишется

$$V_x \frac{\partial \theta}{\partial X} = \frac{1}{Pe} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} + \frac{Br}{Pe} \frac{V_x^2}{Da} + \frac{Br}{Pe} \sigma_{xy} \frac{\partial V_x}{\partial Y} \quad (16)$$

где $\theta = \frac{T - T_w}{T_0 - T_w}$, $Pe = \frac{\bar{v}_x h}{a}$, $Br = \frac{\mu \bar{v}_x^2}{\xi (T_0 - T_w)}$, Pe – число Пекле, Br – число

Бринкмана, T_w – температура стенок канала, T_0 – температура среды на входе в канал, ξ – коэффициент теплопроводности, a – коэффициент теплопроводности.

Функция, описывающая диссипативные тепловыделения, может быть записана в различном виде. При этом в [1] отмечено, что при малых значениях критерия Дарси все формы записи дают идентичный результат. В (16) диссипативный член записывается в виде суммы. Такая форма записи является совместимой с предельным случаем течения чистой (свободной) жидкости при бесконечно больших числах Дарси.

Уравнение (16) необходимо дополнить также граничными условиями

$$Y = 0 \quad \theta = 0 \quad (17)$$

$$Y = 1 \quad \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad (18)$$

$$X = 0 \quad \theta = 1 \quad (19)$$

Среднемассовая температура в размерном и безразмерном виде определяется следующим образом

$$T_m = \frac{\int_0^h T v_x dy}{\int_0^h v_x dy}; \quad \theta_m = \int_0^1 \theta v_x dY \quad (20)$$

Число Нуссельта, характеризующее локальную теплоотдачу на стенке канала, в размерном и безразмерном виде определяется таким образом

$$Nu = \frac{\alpha h}{\lambda} = \frac{h}{|T_m - T_w|} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=h}, \quad Nu = \frac{1}{\theta_m} \left(\frac{\partial \theta}{\partial Y} \right)_{Y=1} \quad (21)$$

где α – коэффициент теплоотдачи на стенке канала, T_m – среднемассовая температура среды в данном сечении канала. На основании полученного решения были проведены расчеты основных параметров данного процесса течения.

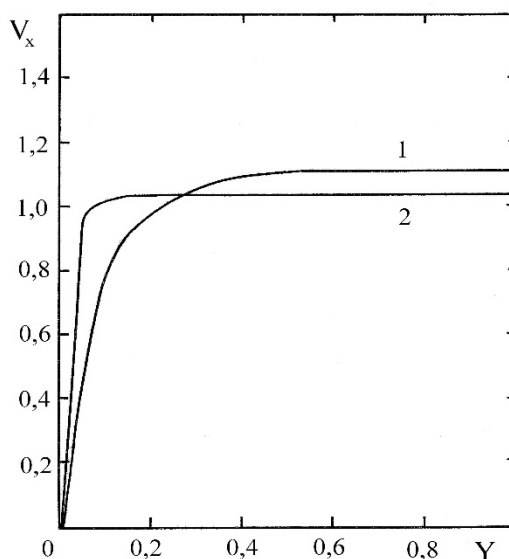


Рис.2. Влияние вязкоупругости на профиль скорости. $Da = 0,05$. 1. – $\varepsilon Wi^2 = 0,1$; 2. – $\varepsilon Wi^2 = 1,0$.

На рис.2 показано влияние значения параметра вязкоупругости на профиль скорости. Из рис.2 вытекает, что увеличение параметра вязкоупругости εWi^2 при фиксированном значении числа Дарси приводит к тому, что профиль скорости становится более плоским. Расчеты показывают, что при выполнении условий $Da \leq 10^{-4}$ и (или) $\varepsilon Wi^2 > 10$ профиль скорости становится настолько наполненным, что практически это приводит к пробковому режиму течения. При таких условиях систему (10), (11), (15) можно не решать и с достаточной для инженерных расчетов степенью точности принять абсолютно плоский профиль скорости по всей длине потока.

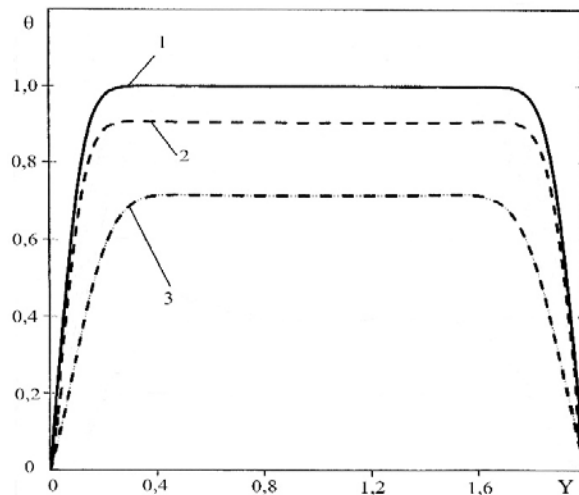


Рис.3. Профили температуры на начальном тепловом участке канала при $X = 5$.
 1. – $Br = 0, Wi = 0$; 2. – $Br = -0.3, \varepsilon Wi^2 = 4$; 3. – $Br = -0.3, Wi = 0$.

На рис.3 показано существенное влияние чисел Вайсенберга и Бринкмана на профиль температуры. Рассчитаны профили температуры на начальном тепловом участке, когда без учета диссипации четко прослеживается тепловой пограничный слой (кривая 1). Из рис.3 также отчетливо видно, что учет вязкоупругих свойств полимерной композиции приводит к снижению роли диссипации (сравнение кривых 2 и 3).

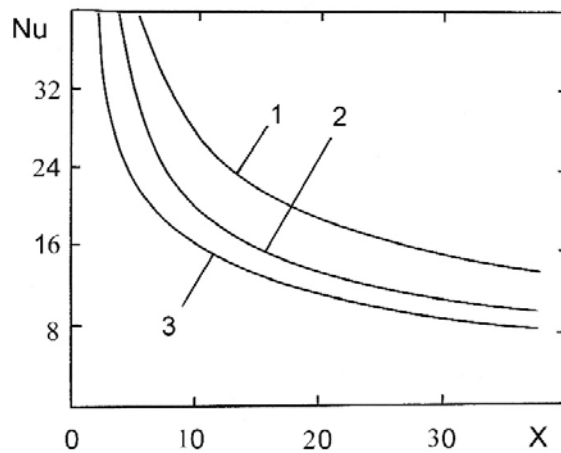


Рис.4. Изменение локального числа Нуссельта по длине канала. 1. – $Br = 0, Wi = 0$; 2. – $Br = -0.3, \varepsilon Wi^2 = 4$; 3. – $Br = -0.3, Wi = 0$.

На рис.4 показано влияние критериев Wi и Br на распределение числа Нуссельта по длине канала. Сравнение кривых 2 и 3 позволяет оценить влияние вязкоупругости на локальную теплоотдачу при заданном уровне диссипации ($Br = -0,3$). Сравнение кривых 1 и 3 показывает влияние диссипации на число Нуссельта при отсутствии вязкоупругости, т.е. при заданном числе $Wi = 0$. Видно, что при значительном уровне числа Wi диссипативные тепловыделения значительно скромнее влияют на число Nu , чем ожидалось.

ВЫВОДЫ

Поставлена и решена задача о теплообмене при диссипативном течении вязкоупругой жидкости Фан-Тьен-Таннера в плоском канале, заполненном пористым материалом. В качестве уравнения движения использовалась модель Бринкмана. Результаты расчетов показали значительное влияние чисел Вайсенберга и Бринкмана на трансформацию профиля температуры и локальную теплоотдачу на стенке канала. При этом отмечено, что учет вязкоупругих свойств жидкости при значительных значениях числа Вайсенберга ведет к заметному снижению роли диссипации в процессе разогрева среды. Также очевидно, что при учете температурной зависимости вязкости вклад диссипативного разогрева будет еще меньше. Из приведенных выше рисунков видно, что влияние высокоэластических свойств настолько велико, что пренебрежение вязкоупругими эффектами может привести к значительной ошибке. Обозначены условия, при которых течение в канале может считаться «пробковым».

ЛИТЕРАТУРА

1. Baranov A.V., Yunitskii S.A. *Influence of dissipation on heat transfer during flow of a non-Newtonian fluid in a porous channel* // J. Eng. Physics and Thermophysics. – 2017. – Vol.90. – No.4. – Pp.1003-1009.
2. Shahnazari M.R., Nejad A. Abbas *Numerical and experimental evaluation of dispersion coefficient for resin transfer modeling* // Transp. Porous Media. – 2012. – Vol.91. – No.2. – Pp.605-625.
3. Mazhar Iqbal, Hamna Afaq *Fluid flow and heat transfer through an annular sector duct filled with porous media* // J. Porous Media. – 2015. – Vol.18. – No.7. – Pp.679-687.
4. Asterios Pantokratoras *Forced convection in a Darcy-Brinkman porous medium with a convective thermal boundary condition* // J. Porous Media. – 2015. – Vol.18. – No.9. – Pp.873-878.
5. Hooman K., Dahari M. *Thermal dispersion effects on forced convection in a parallel plate porous channel* // Meccanica (Netherlands). – 2015. – Vol.50. – No.8. – Pp.1971-1976.
6. Xingwang Tian, Ping Wang, Shiming Xu *Comparison study of different viscous dissipation effects on forced convection heat transfer in a power law fluid saturated porous medium* // J. Porous Media. – 2016. – Vol.19. – No.10. – Pp.885-900.
7. Ozgur Cekmer, Moghtada Mobedi, Baris Ozerdem *Effect of an inserted porous layer into a channel on heat transfer and pressure drop* // J. Porous Media. – 2016. – Vol.19. – No.1. – Pp.65-82.
8. Cloete M., Smit G.J.F., Kosinski P. *Analytical modeling and numerical verification of non-Newtonian fluid flow through and over two-dimensional porous media* // J. Non-Newton. Fluid Mech. – 2016. – Vol.227. – No.1. – Pp.1-16.
9. Tan Wenchang, Masuoka Tasashi *Stokes' first problem for an Oldroyd-B fluid in a porous half space* // Physics of Fluids. – 2005. – Vol.17. – No.2. – Pp.023101/1-023101/7.
10. Tan Wen-Chang *Velocity overshoot of start-up flow for a Maxwell fluid in a porous half-space* // Chinese Physics. – 2006. – Vol.15. – No.11 – Pp.2644-144.
11. Chinyoka T., Makinde O.D. *Analysis of non-Newtonian flow with reacting species in a channel filled with a saturated porous medium* // J. Petroleum Sci. and Eng. – 2014. – Vol.121. – No.1. – Pp.1-8.

12. Makinde O.D., Chinyoka T., Rundora L. *Unsteady flow of a reactive variable viscosity non-Newtonian fluid through a porous saturated medium with asymmetric convective boundary conditions* // Comput. and Math. Appl. – 2011. – Vol.62. – No.9. – Pp.3343-3352.
13. Memon G.Q., Shaikh A.W., Shaikh P. *Application of viscoelastic fluid flow through porous channels coupled with Oldroyd-B constitutive model: analysis of viscoelastic stresses* // Sindh Univ. Res. J. (Sci. Ser.). – 2015. – Vol.47. – No.3. – Pp.497-502.
14. Chunrui Li, Liancun Zheng, Xinxin Zhang *Flow and heat transfer of a generalized Maxwell fluid with modified fractional Fourier's law and Darcy's law* // Computers and Fluids. – 2016. – Vol.125. – Pp.25-38.
15. Chinyoka T. *Poiseuille flow of reactive Phan-Thien-Tanner liquids in 1D channel flow* // Trans. ASME. J. Heat Transfer. – 2010. – Vol.132. – No.11. – Pp.111701/1-111701/7.
16. Yapici K., Karasozen B., Uludag Yu. *Numerical analysis of viscoelastic fluids in steady pressure-driven channel flow* // Trans. ASME. J. Fluids Eng. – 2012. – Vol.134. – No.5. – Pp.051206/1-051206/9.
17. Ferras Luis L., Nobrega Joao M., Pinho Fernando T. *Analytical solutions for channels flows of Phan-Thien_Tanner and Giesekus fluids slip* // J. Non-Newton. Fluid Mech. – 2012. – Vol.171-172. – Pp.97-105.
18. Вачагина Е.К., Кайдыров А.И., Кайнова А.А., Халитова Г.Р. *Течение вязкоупругой жидкости в призматическом канале квадратного поперечного сечения на примере резиновых смесей* // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2016. – №1. – С.9-17.
19. Nield D.A., Kuznetsov A.V. *Thermally developing forced convection in a channel occupied by a porous medium saturated by a non-Newtonian fluid* // Int. J. Heat and Mass Transfer. – 2005. – Vol.48. – No.6. – Pp.1214-1218.
20. Khashan S.A., Al-Nimr M.A. *Validation of the local thermal equilibrium assumption in forced convection of non-Newtonian fluids through porous channels* // Transp. Porous Media. – 2005. – Vol.61. – No.3. – Pp.291-305.
21. Cekmer O., Mobedi M., Ozerdem B., Pop I. *Fully developed forced heat transfer in a porous channel with asymmetric heat flux boundary conditions* // Transp. Porous Media. – 2011. – Vol.90. – Pp.791-806.
22. Nield D.A., Kuznetsov A.V., Ming Xiong *Effects of viscous dissipation and flow on forced convection in a channel filled by a saturated porous medium* // Transp. Porous Media. – 2004. – Vol.56. – Pp.351-367.
23. Nield D.A. *The modeling of viscous dissipation in a saturated porous medium* // Trans. ASME. J. Heat Transfer. – 2007. – Vol.129. – Pp.1459-1463.
24. Haji-Sheikh A., Nield D.A., Hooman K. *Heat transfer in the thermal entrance region for flow through rectangular porous passages* // Int. J. Heat and Mass Transfer. – 2006. – Vol.49. – Pp.3004-3015.
25. Chen G.M., Tso C.P. *Effects of viscous dissipation on forced convective heat transfer in a channel embedded in a power-law fluid saturated porous medium* // Int. Commun. Heat and Mass Transfer. – 2011. – Vol.38. – Pp.57-62.
26. Barletta A., Rossi di Schio E., Celli M. *Instability and viscous dissipation in the horizontal Brinkman flow through a porous medium* // Transp. Porous Media. – 2011. – Vol.87. – No.1. – Pp.105-119.

REFERENCES

1. Baranov A.V., Yunitskii S.A. *Influence of dissipation on heat transfer during flow of a non-Newtonian fluid in a porous channel*. J. Eng. Physics and Thermophysics, 2017, Vol.90, No.4, Pp.1003-1009.
2. Shahnazari M.R., Nejad A. Abbas *Numerical and experimental evaluation of dispersion coefficient for resin transfer modeling*. Transp. Porous Media, 2012, Vol.91, No.2, Pp.605-625.
3. Mazhar Iqbal, Hamna Afaq *Fluid flow and heat transfer through an annual sector duct filled with porous media*. J. Porous Media, 2015, Vol.18, No.7, Pp.679-687.
4. Asterios Pantokratoras *Forced convection in a Darcy-Brinkman porous medium with a convective thermal boundary condition*. J. Porous Media, 2015, Vol.18, No.9, Pp.873-878.
5. Hooman K., Dahari M. *Thermal dispersion effects on forced convection in a parallel plate porous channel*. Meccanica (Netherlands), 2015, Vol.50, No.8, Pp.1971-1976.
6. Xingwang Tian, Ping Wang, Shiming Xu *Comparison study of different viscous dissipation effects on forced convection heat transfer in a power law fluid saturated porous medium*. J. Porous Media, 2016, Vol.19, No.10, Pp.885-900.
7. Ozgur Cekmer, Moghtada Mobedi, Baris Ozerdem *Effect of an inserted porous layer into a channel on heat transfer and pressure drop*. J. Porous Media, 2016, Vol.19, No.1, Pp.65-82.
8. Cloete M., Smit G.J.F., Kosinski P. *Analytical modeling and numerical verification of non-Newtonian fluid flow through and over two-dimensional porous media*. J. Non-Newton. Fluid Mech, 2016, Vol.227, No.1, Pp.1-16.
9. Tan Wenchang, Masuoka Tasashi *Stokes' first problem for an Oldroyd-B fluid in a porous half space*. Physics of Fluids, 2005, Vol.17, No.2, Pp.023101/1-023101/7.
10. Tan Wen-Chang *Velocity overshoot of start-up flow for a Maxwell fluid in a porous half-space*. Chinese Physics, 2006, Vol.15, No.11, Pp.2644-144.
11. Chinyoka T., Makinde O.D. *Analysis of non-Newtonian flow with reacting species in a channel filled with a saturated porous medium*. J. Petroleum Sci. and Eng., 2014, Vol.121, No.1, Pp.1-8.
12. Makinde O.D., Chinyoka T., Rundora L. *Unsteady flow of a reactive variable viscosity non-Newtonian fluid through a porous saturated medium with asymmetric convective boundary conditions*. Comput. and Math. Appl., 2011, Vol.62, No.9, Pp.3343-3352.
13. Memon G.Q., Shaikh A.W., Shaikh P. *Application of viscoelastic fluid flow through porous channels coupled with Oldroyd-B constitutive model: analysis of viscoelastic stresses*. Sindh Univ. Res. J. (Sci. Ser.), 2015, Vol.47, No.3, Pp.497-502.
14. Chunrui Li, Liancun Zheng, Xinxin Zhang *Flow and heat transfer of a generalized Maxwell fluid with modified fractional Fourier's law and Darcy's law*. Computers and Fluids, 2016, Vol.125, Pp.25-38.
15. Chinyoka T. *Poiseuille flow of reactive Phan-Thien-Tanner liquids in 1D channel flow*. Trans. ASME. J. Heat Transfer, 2010, Vol.132, No.11, Pp.111701/1-111701/7.
16. Yapici K., Karasozen B., Uludag Yu. *Numerical analysis of viscoelastic fluids in steady pressure-driven channel flow*. Trans. ASME. J. Fluids Eng., 2012, Vol.134, No.5, Pp.051206/1-051206/9.

17. Ferras Luis L., Nobrega Joao M., Pinho Fernando T. *Analytical solutions for channels flows of Phan-Thien_Tanner and Giesekus fluids slip*. J. Non-Newton. Fluid Mech., 2012, Vol.171-172, Pp.97-105.
18. Vachagina E.K., Kaidirov A.I., Kainova A.A., Khalitova G.R. *Techenie vyazkouprugoj zhidkosti v prizmaticheskom kanale kvadratnogo poperechnogo secheniya na primere rezinovykh smesey [Flow of viscoelastic fluid in a prismatic square cross-section channel on the example of rubber mixtures]*. Izvestiya RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza, 2016, No.1, Pp.9-17.
19. Nield D.A., Kuznetsov A.V. *Thermally developing forced convection in a channel occupied by a porous medium saturated by a non-Newtonian fluid*. Int. J. Heat and Mass Transfer, 2005, Vol.48, No.6, Pp.1214-1218.
20. Khashan S.A., Al-Nimr M.A. *Validation of the local thermal equilibrium assumption in forced convection of non-Newtonian fluids through porous channels*. Transp. Porous Media, 2005, Vol.61, No.3, Pp.291-305.
21. Cekmer O., Mobedi M., Ozerdem B., Pop I. *Fully developed forced heat transfer in a porous channel with asymmetric heat flux boundary conditions*. Transp. Porous Media, 2011, Vol.90, Pp.791-806.
22. Nield D.A., Kuznetsov A.V., Ming Xiong *Effects of viscous dissipation and flow on forced convection in a channel filled by a saturated porous medium*. Transp. Porous Media, 2004, Vol.56, Pp.351-367.
23. Nield D.A. *The modeling of viscous dissipation in a saturated porous medium*. Trans. ASME. J. Heat Transfer, 2007, Vol.129, Pp.1459-1463.
24. Haji-Sheikh A., Nield D.A., Hooman K. *Heat transfer in the thermal entrance region for flow through rectangular porous passages*. Int. J. Heat and Mass Transfer, 2006, Vol.49, Pp.3004-3015.
25. Chen G.M., Tso C.P. *Effects of viscous dissipation on forced convective heat transfer in a channel embedded in a power-law fluid saturated porous medium*. Int. Commun. Heat and Mass Transfer, 2011, Vol.38, Pp.57-62.
26. Barletta A., Rossi di Schio E., Celli M. *Instability and viscous dissipation in the horizontal Brinkman flow through a porous medium*. Transp. Porous Media, 2011, Vol.87, No.1, Pp.105-119.

Поступила в редакцию 25 мая 2019 года.

Сведения об авторе:

Баранов Александр Викторович – д.ф.-м.н., проф. кафедры Высшей математики Российского Государственного Университета нефти и газа имени И.М. Губкина, г. Москва, Россия; e-mail: alexvbaranov@yahoo.co.uk