

УДК 539.37

DOI 10.33113/mkmk.ras.2019.25.04.453\_472.01

## О СПОСОБНОСТИ ФИЗИЧЕСКИ ЛИНЕЙНОГО СООТНОШЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГОСТИ ОПИСЫВАТЬ СИГМОИДАЛЬНУЮ ФОРМУ ЗАВИСИМОСТИ НАПРЯЖЕНИЯ ОТ СКОРОСТИ ДЕФОРМАЦИИ\*

Хохлов А.В.

*НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия*

### АННОТАЦИЯ

Аналитически изучены свойства кривых деформирования с постоянными скоростями, порождаемых физически линейным интегральным определяющим соотношением вязкоупругости Больцмана-Вольтерры с произвольной функцией релаксации. Доказано, что кривые деформирования всегда возрастают и выпуклы вверх, семейство кривых деформирования возрастает по параметру скорости деформирования (моделируется положительная скоростная чувствительность) и существуют предельные кривые при стремлении скорости к нулю или бесконечности (равновесная и мгновенная диаграммы деформирования). Выведено выражение для показателя скоростной чувствительности диаграмм деформирования, аналитически исследована его зависимость от деформации, скорости деформации и функции релаксации. Доказано, что показатель скоростной чувствительности зависит не от двух, а от одного аргумента (отношения текущей деформации к скорости), а величина показателя всегда лежит в интервале от нуля до единицы (т.е. линейная теория вязкоупругости описывает только псевдопластические среды и не способна описывать дилатантные). Введено понятие функции скоростной чувствительности, которую можно рассматривать как материальную функцию. Показано, что по ней можно восстановить функцию релаксации (с точностью до положительного постоянного множителя). Исследована зависимость показателя скоростной чувствительности от скорости деформации, доказано, что он не только может возрастать или убывать, но может иметь максимум (при мало обременительных ограничениях на функцию релаксации) и может принимать значения, сколь угодно близкие к единице (верхней границе для псевдопластических сред). Тем самым обнаружена способность линейной теории вязкоупругости качественно описывать «сигмоидальную» форму зависимости логарифма напряжения от логарифма скорости деформации и очень высокую скоростную чувствительность, характерные для режима сверхпластического деформирования материалов.

**Ключевые слова:** сверхпластичность; сигмоидальная кривая; показатель скоростной чувствительности; вязкоупругость; диаграммы деформирования; скоростное упрочнение

## ON THE ABILITY OF THE PHYSICALLY LINEAR VISCOELASTICITY THEORY TO SIMULATE SIGMOID SHAPE OF STRESS DEPENDENCE ON STRAIN RATE

Khokhlov Andrew V.

*Lomonosov Moscow State University, Institute of mechanics, Moscow, Russia*

---

\* Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №17-08-01146\_a).

## ABSTRACT

We study analytically properties of the stress-strain curves family generated by the Boltzmann-Volterra linear viscoelasticity constitutive equation with an arbitrary relaxation modulus under uni-axial loadings at constant strain rates. It is proved (for any decreasing relaxation modulus) that every stress-strain curve is an increasing and convex-up function of strain (without any extremum or inflection points), that stress-strain curves rise up as stress rate increase and that the stress-strain curves family converges to limit curve as stress rate tends to zero or to infinity (i.e. to equilibrium and the instantaneous stress-strain curve). We derived and analyzed the general expression for strain rate sensitivity index of stress-strain curves as the function of strain and strain rate. We found out that the strain rate sensitivity index depends only on the single argument that is the ratio of strain to strain rate. So defined function of one real variable is termed “the strain rate sensitivity function” and it may be regarded as a material function. The explicit integral expression for relaxation modulus via the strain rate sensitivity function is derived. It enables one to restore relaxation modulus assuming a strain rate sensitivity function is given. We proved that the strain rate sensitivity value is confined in the interval from zero to unity (the upper bound of strain rate sensitivity for pseudoplastic media) whatever strain and strain rate are. We found out that the linear theory can reproduce increasing or decreasing or non-monotone dependences of strain rate sensitivity on strain rate (for any fixed strain) and it can provide existence of local maximum. The analysis carried out let us to conclude that the linear viscoelasticity theory (supplied with common relaxation function which are non-exotic from any point of view) is able to produce high values of strain rate sensitivity index close to unity and to provide existence of the strain rate sensitivity index maximum with respect to strain rate. Thus, it is able to simulate qualitatively existence of flexure point on log-log graph of stress dependence on strain rate and its sigmoid shape which is one of the most distinctive features of superplastic deformation regime observed in numerous materials tests.

**Keywords:** superplasticity; sigmoid curve; strain rate sensitivity index (function); viscoelasticity; stress-strain curves at constant strain rates, strain hardening

## ВВЕДЕНИЕ

Диаграммы деформирования (ДД) многих материалов (в частности, наследственных) в одноосных испытаниях с постоянными скоростями деформации (СД)  $\dot{\varepsilon} = a$  зависят от скорости  $a$ :  $\sigma = \sigma(\varepsilon, a)$ . Одна из наиболее распространенных мер скоростной чувствительности материала (выраженности зависимости ДД от  $a$ ) – показатель скоростной чувствительности (ПСЧ), или параметр скоростного упрочнения

$$m(a, \varepsilon) := \frac{\partial \lg \sigma(\varepsilon, a)}{\partial \lg a} = \sigma^{-1} a \frac{\partial \sigma}{\partial a}. \quad (1)$$

Для степенной модели вязкой среды (жидкости)  $\sigma = K\dot{\varepsilon}^M$  ПСЧ постоянен и совпадает с показателем  $M$  ( $M \in (0;1)$  для псевдопластических сред,  $M > 1$  – для дилатантных). ПСЧ может быть постоянным и для моделей линейной вязкоупругости со степенными функциями релаксации (см. ниже).

Особенно важна высокая скоростная чувствительность материала и ее характеристика при сверхпластическом деформировании [1-18]. Сверхпластичность – способность материалов в определенных структурно-термомеханических условиях (в определенном диапазоне температур, скоростей и при достаточной степени измельчения зерен) к очень большой пластической деформации (100-200% и более) при относительно низком напряжении течения и его сильной зависимости от скорости деформации. Способность к деформации

не только без разрушения, но и без потери (или даже с улучшением) своих механических характеристик. Напряжение течения в состоянии сверхпластичности может быть в несколько раз меньше предела текучести материала в обычном состоянии (при той же температуре). Сверхпластичность наблюдается у металлов и сплавов (титан, медь, цинк, титановые, алюминиевые и свинцово-оловянные сплавы, стали и др.), интерметаллидов и керамик с ультрамелкозернистой структурой (средний размер равноосных зерен менее 10 мкм) при достаточно высоких температурах ( $T > 0.4T_m$ ,  $T_m$  – температура плавления) и малых скоростях деформации ( $\dot{\epsilon} = 10^{-5} \div 10^{-1} \text{ с}^{-1}$ ) [5-18]. У металлических стекол в переохлажденном жидком состоянии (в диапазоне температур, немного выше точки стеклования) наблюдается сверхпластическое течение с близким к единице ПСЧ и при высоких скоростях деформации [14]. Как правило, чем меньше средний размер зерен поликристаллического материала в состоянии сверхпластичности, тем больше его скоростная чувствительность, меньше напряжение течения, больше деформационный ресурс и вязкость (тогда как для металлов в обычном состоянии пределы текучести и прочности возрастают с уменьшением зерен). Основные механизмы развития структурной сверхпластичности – зернограничное скольжение, внутризеренное дислокационное скольжение и диффузионная ползучесть. Сверхпластическое деформирование лежит в основе важных технологических процессов штамповка изделий сложной формы, получения материалов с нужной структурой и механическими свойствами посредством обработки давлением и большими пластическими деформациями [6,10,14-24] и т.п.

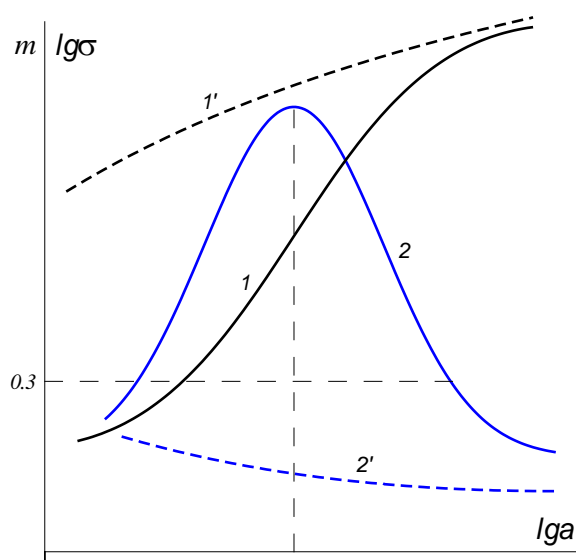


Рис.1. Типичные зависимости напряжения и ПСЧ от скорости деформирования: 1, 2 – в режиме сверхпластического деформирования, 1', 2' – в обычном состоянии.

Многочисленные эксперименты показали, что сверхбольшие пластические деформации надежно коррелируют с высоким значением ПСЧ (1). Сильная чувствительность напряжения течения к СД – один из главных факторов, обеспечивающих устойчивость сверхпластического течения: в месте зарождения шейки повышается СД, что вызывает повышение напряжения (упрочнение) и стабилизацию (залечивание локального сужения). Сильная зависимость

напряжения течения от СД (режим сверхпластичности) характеризуется величиной  $m > 0.3$  (максимальное значение  $m = 1$  соответствует линейно вязкой жидкости), тогда как для материалов в обычном состоянии  $m \leq 0.1$ . Принято считать [5-18], что для режима сверхпластического деформирования материала характерна «сигмоидальная» форма графика зависимости  $\lg \sigma$  от  $\lg a$  (кривая 1 на рис.1), т.е. наличие точки перегиба с почти прямолинейным участком в ее окрестности и, соответственно, наличие точки максимума на графике зависимости ПСЧ (1) от СД при фиксированной деформации (кривая 2). Для материала в обычном состоянии характерны кривые вида 1' и 2' без точек перегиба и максимума. Точка максимума  $\hat{a}$  указывает оптимальную скорость деформирования для достижения максимальных деформаций и нужной формы изделия с наименьшими энергозатратами. У керамик с ультрамелкозернистой структурой график ПСЧ, как правило, имеет выраженный участок постоянства (плато) [11,14].

Для моделирования сверхпластического деформирования используют и разрабатывают множество моделей, как правило описывающих одноосный случай [3-18,24-31]. Исторически самая популярная (в силу простоты) модель сверхпластичности представляет собой гибрид уравнения состояния вязкой жидкости и нелинейно упругой среды

$$\sigma(t) = K \dot{\varepsilon}(t)^M \varepsilon(t)^N, \quad (2)$$

где  $K, M > 0, N \geq 0$  – материальные постоянные (отметим, что эта зависимость – частный случай модели ползучести с упрочнением [32-34]). Для этой модели ПСЧ (1) совпадает с постоянной  $M$  (она пренебрегает зависимостью  $M$  от скорости). Чаще всего полагают [5-18], что показатель деформационного упрочнения  $N$  равен нулю, и пренебрегают зависимостью  $M$  от  $\varepsilon$ , т.е. считают материал степенной вязкой жидкостью. Нередко используют структурные (одномерные) модели, полученные последовательным или параллельным соединением вязких элементов со степенными зависимостями напряжения от СД с произвольными положительными показателями и коэффициентами [3,5,12,13,26,35]. Чтобы учесть параметры структуры вводят в модель зависимость напряжения от среднего размера зерна (например, степенную) и, возможно, иных параметров структуры (задаваемую кинетическими уравнениями) [11-15,17,27-30]. Авторы работ [24,25] рассматривают сверхпластичность как особый вид ползучести.

Удовлетворительное описание сверхпластического деформирования, учитывающее влияние термомеханической истории и контуры эволюции структуры материала и позволяющее (хоть как-то) предсказывать вход в состояние сверхпластичности и выход из него, пока отсутствует. Одно из базовых феноменологических требований к определяющим соотношениям сверхпластичности – способность моделировать наличие локального максимума у функции  $m(a)$ . Далеко не все модели на это способны. Например, для любого последовательного соединения элементов со степенной вязкостью ПСЧ (1) – убывающая функция от скорости деформации, а для параллельного соединения – возрастающая, т.е. в обоих случаях максимума у функции  $m(a)$  нет [35], а модели Бэкофена и Смирнова способны воспроизводить максимум при некоторых наборах материальных параметров [3,6,12,26].

Цель данной статьи – доказать, что линейное ОС вязкоупругости

$$\sigma(t) = \int_0^t R(t-\tau) d\varepsilon(\tau), \quad \varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau) d\sigma(\tau), \quad t > 0, \quad (3)$$

связывающее истории напряжения и деформации (в одноосных изотермических процессах в стабильных материалах) интегральными операторами, инвариантными относительно сдвигов по времени, способно (как ни странно) описывать максимум ПСЧ диаграмм деформирования, т.е. «сигмоидальность» зависимости  $\lg \sigma - \lg a$ , и очень высокую скоростную чувствительность с  $m \in (0,5;1)$ , характерные для режима сверхпластичности материалов, причем без каких-либо экзотических ограничений на функцию релаксации. И потому, линейные интегральные операторы (3), инвариантные относительно сдвигов по времени, в принципе, можно использовать как инструмент при построении ОС связывающих истории тензоров напряжений и деформаций (конечных, больших), температуры и эволюции параметров структуры материала.

Время и напряжения в (1) и (3) предполагаются безразмерными. В силу линейности операторов (3) изучаемые качественные свойства ДД и ПСЧ не зависят от способа масштабирования напряжений и времени.

## 1. ЛИНЕЙНОЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЕ СООТНОШЕНИЕ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

ОС (3) описывают одномерные изотермические процессы в структурно-стабильных материалах. Их ядра  $R(t)$  и  $\Pi(t)$ ,  $t > 0$  (материальные функции) называются функциями релаксации (ФР) и ползучести. Они предполагаются положительными и дифференцируемыми на  $(0; \infty)$ ,  $\Pi(t)$  – возрастающей и выпуклой вверх на  $(0; \infty)$  [36-39], а  $R(t)$  – убывающей и выпуклой вниз, ФР может быть непрерывной справа в точке  $t=0$  (тогда модель называется регулярной), а может иметь интегрируемую особенность (например, степенную) или включать слагаемое  $\eta \delta(t)$ , где  $\delta(t)$  – дельта-функция,  $\eta > 0$ . Из положительности и монотонности функций релаксации и ползучести на  $(0; \infty)$  следует, что в точке  $t=0$  существуют пределы справа  $\Pi(0+) = \inf \Pi(t) \geq 0$  и  $R(0+) = \sup R(t) > 0$  ( $R(0) = +\infty$ , если  $R(t)$  не ограничена сверху) и предел  $R(+\infty) = \inf R(t) \geq 0$ . Входные процессы  $\sigma(t)$  или  $\varepsilon(t)$  предполагаются кусочно-непрерывными и кусочно-гладкими при  $t \geq 0$ . Если  $\Pi(0) \neq 0$ , то  $R(0) = 1/\Pi(0) < \infty$  и на линейном пространстве *непрерывных* кусочно-гладких при  $t \geq 0$  функций операторы (3) представимы в виде

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= R(0)\varepsilon(t) + \int_0^t \dot{R}(t-\tau)\varepsilon(\tau) d\tau, \\ \varepsilon(t) &= \Pi(0)\sigma(t) + \int_0^t \dot{\Pi}(t-\tau)\sigma(\tau) d\tau, \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (4)$$

( $y(0) := y(0+)$ ) – краткое обозначение предела функции  $y(t)$  справа в т.  $t=0$ ).

Операторы (3) взаимно обратны, и потому  $R(t)$  и  $\Pi(t)$  связаны

$$\int_0^t R(t-\tau)\Pi(\tau) d\tau = t \quad \text{или} \quad \int_0^t \dot{\Pi}(t-\tau)R(\tau) d\tau + \Pi(0)R(t) = 1, \quad t > 0. \quad (5)$$

Зная ФР, можно найти функция ползучести из (5), и наоборот.

Свойства семейств основных теоретических кривых (диаграмм деформирования при постоянных скоростях деформации или нагружения, кривых ползучести и релаксации с любой начальной стадией нагружения, кривых ползучести при ступенчатом нагружении и др.), порождаемых ОС (3) с произвольной ФР, его способности описывать те или иные эффекты, наблюдаемые в квазистатических испытаниях, сферы влияния материальных функций, границы и индикаторы его области применимости и методики идентификации проанализированы в цикле работ [36-39] и др. Анализ, в частности, показал, что среди моделей, задаваемых ОС (3), необходимо выделять, как минимум, три основных класса, поскольку качественные свойства базовых кривых моделей этих классов (а также особенности постановки и решения краевых задач) заметно отличаются. 1) *Регулярные модели* – те, у которых  $\Pi(0) \neq 0$ , или ФР непрерывна справа в точке  $t=0$ . Тогда мгновенный модуль  $E = R(0) = 1/\Pi(0)$  конечен, а ОС (3) и первое уравнение (5) сводятся к уравнениям Вольтерры второго рода (4) и (5). 2) *Сингулярные модели* – модели с ФР, содержащей слагаемое  $\eta\delta(t)$ ,  $\eta > 0$ ; тогда  $\Pi(0) = 0$  и  $\dot{\Pi}(0) = \eta^{-1}$ . ФР  $R = \eta\delta(t)$  задает ньютоновскую жидкость и входит в ФР половины реологических моделей из линейных пружин и демпферов. 3) *Модели с неограниченной ФР*, не содержащей слагаемого  $\eta\delta(t)$ , но имеющей интегрируемую особенность в точке  $t=0$  (в частности, фрактальный элемент Скотт-Блэра и многие фрактальные модели [40-45]). Они тоже не регулярны:  $\Pi(0) = 0$ . В случае  $\Pi(0) = 0$  (4) и (5) – уравнения Вольтерры *первого* рода, что приводит к некорректным задачам, бесконечности мгновенного модуля, отсутствию мгновенной диаграммы деформирования и т.п. [36-39].

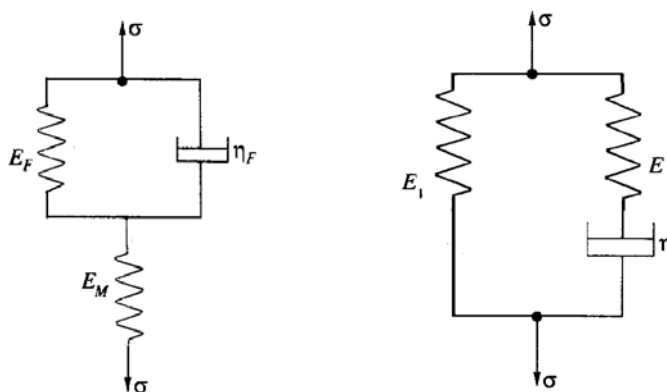


Рис.2. Структурные модели Кельвина и Пойнтинга-Томсона.

Все структурные реологические модели из линейных пружин и демпферов описываются ОС (3). Для любого  $n$  множество неприводимых  $n$ -звенных моделей распадается ровно на два класса эквивалентности (модели класса задаются одним и тем же семейством ФР): регулярные и сингулярные. В частности, эквивалентны модель Пойнтинга-Томсона и модель Кельвина (модели из двух пружин и одного вязкого элемента – рис.2).

Операторами вида (3) задаются и трехмерные ОС вязкоупругости изотропных сред: тогда под  $\sigma(t)$  и  $\varepsilon(t)$  понимаются компоненты девиаторов

тензоров напряжений и деформаций или среднее напряжение и объемная деформация, связанные сдвиговой или объемной ФР [39].

## 2. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ДИАГРАММ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ОС (3)

Процесс деформирования  $\varepsilon = at$  с постоянной скоростью ОС (3) переводит в напряжение

$$\sigma(t) = atP(t), \quad \text{где} \quad P(t) := t^{-1} \int_0^t R(\tau) d\tau, \quad t > 0. \quad (6)$$

$P(t)$  – осреднение ФР. В [36] доказаны следующие свойства  $P(t)$  (они будут полезны при анализе свойств ДД и ПСЧ).

**Лемма.** Пусть  $P(t)$  – положительная непрерывная убывающая функция. Тогда  $P(t)$ ,  $t > 0$ , – гладкая убывающая функция, обладающая свойствами: 1)  $P(t) > 1/\Pi(t) > R(t)$  при  $t > 0$ ; 2)  $\dot{P}(t) = t^{-1}(R(t) - P(t))$ ; 3) для регулярной ФР  $P(0+) = R(0+)$ ; 4) если  $\dot{R}(0+) < \infty$ , то  $\dot{P}(0+) = \dot{R}(0+)/2$ , 5)  $P(+\infty) = R(+\infty)$ ; 6) при  $t \rightarrow \infty$   $\dot{P}(t) = o(t^{-1})$ ; 7) функция  $tP(t)$  возрастает и выпукла вверх.

Исключив параметр  $t = \varepsilon/a$ , получим из (6) ДД в явной форме

$$\sigma(\varepsilon, a) = P(\varepsilon/a)\varepsilon. \quad (7)$$

Секущий и касательный модули выражаются формулами  $\sigma(\varepsilon, a)/\varepsilon = P(\varepsilon/a)$ ,  $\sigma'_\varepsilon(\varepsilon, a) = R(\varepsilon/a)$ . При  $\varepsilon \rightarrow 0+$  они стремятся к пределу  $E := \sigma'(0) = R(0) = P(0)$  (если модель не регулярна, то  $E = \infty$ ), а при  $\varepsilon \rightarrow \infty$  – к пределу  $r := R(\infty) \geq 0$ ;  $E$  и  $r$  – мгновенный и длительный модули (модули сдвига, объемные модули или модули Юнга – в зависимости от физического смысла  $\sigma$  и  $\varepsilon$ ).

В статье [36] доказаны следующие общие свойства ДД (7) (для любой ФР):

**Теорема 1.** Пусть  $R(t)$  – положительная непрерывная убывающая и выпуклая вниз функция при  $t > 0$ . Тогда:

- 1) при любом  $a > 0$  ДД  $\sigma(\varepsilon)$  монотонна и выпукла вверх на луче  $\varepsilon > 0$ ;
- 2) семейство ДД (7) возрастает по  $a$  (поскольку  $\dot{P}(t) < 0$ );
- 3) мгновенный и длительный модули  $E$  и  $r$  не зависят от скорости деформации;
- 4) при любом  $a > 0$  справедлива оценка  $r\varepsilon < \sigma(\varepsilon, a) < E\varepsilon$  (правое неравенство содержательно при  $E < \infty$ , т.е. в случае  $R \in C[0; \infty)$ );
- 5) при  $a \rightarrow 0$  семейство ДД (7) всегда сходится (сверху) к прямой  $\sigma = r\varepsilon$  (равновесной ДД) равномерно на любом отрезке полуоси  $\varepsilon > 0$ ;
- 6) при  $a \rightarrow +\infty$  семейство ДД (7) любой *регулярной* модели сходится (снизу) к прямой  $\sigma = E\varepsilon$  (мгновенной ДД) равномерно на любом отрезке оси  $\varepsilon$ ;
- 7) если модель не регулярна ( $R \notin C[0; \infty)$ ), то  $E = \infty$ , касательная к любой ДД в нуле вертикальна, а семейство ДД  $\varepsilon(\sigma, a)$  сходится при  $a \rightarrow \infty$  к прямой  $\varepsilon = 0$ ;
- 8) при  $\varepsilon \rightarrow \infty$   $\sigma/\varepsilon \rightarrow r$ , и ДД (7) обладает асимптотой лишь тогда, когда сходится интеграл  $I := \int_0^\infty (R(\tau) - r) d\tau$ ; тогда каждая ДД (7) имеет асимптоту  $\sigma = r\varepsilon + Ia$ ,  $I > 0$ , и  $\sigma < r\varepsilon + Ia$ .

Отсутствие любого из обнаруженных свойств у ДД материала – достаточный признак неприменимости ОС (3) к его моделированию. В частности, линейное ОС (3) не способно описывать материалы с отрицательной скоростной чувствительностью, с падающей ДД, с выпуклыми вниз или имеющими точки перегиба ДД и те, у которых установлена зависимость мгновенного или длительного модуля от СД (см. обзор в [31]).

**Пример.** Рассмотрим трехпараметрическое семейство ФР

$$R(t) = (E - r)e^{-\mu t} + r, \quad E > r \geq 0, \quad \mu > 0. \quad (8)$$

ФР (8) при  $r > 0$  порождает трехзвенную регулярную модель Кельвина с двумя пружинами (рис.2), при  $r = 0$  (8) вырождается в модель Максвелла, а при  $E = r \neq 0$  – в упругий элемент. Осреднение ФР (8) и ДД (7) имеют вид

$$P(t) = (E - r)\mu^{-1}t^{-1}(1 - e^{-\mu t}) + r, \quad (9)$$

$$\sigma(\varepsilon, a) = (E - r)\mu^{-1}a(1 - e^{-\mu\varepsilon/a}) + r\varepsilon. \quad (10)$$

При любом  $a$  ДД (10) обладает асимптотой  $\sigma = r\varepsilon + Ia$ ,  $I = (E - r)/\mu$ .

Для модели Фойгта  $R = \eta\delta(t) + rh(t)$ ,  $P(t) = r + \eta t^{-1}$ , и ДД (7) имеют вид

$$\sigma(\varepsilon, a) = r\varepsilon + \eta a. \quad (11)$$

Все ДД модели Фойгта прямолинейны и параллельны друг другу,  $\sigma(0, a) = \eta a$  (наличие вертикального участка на ДД характерно для всех сингулярных моделей). ДД модели Фойгта напоминают формой ДД жесткопластического тела с линейным упрочнением, но пороговое напряжение  $\sigma(0)$  зависит от СД. При  $a \rightarrow \infty$  семейство ДД Фойгта сходится к вертикальному лучу  $\varepsilon = 0$  ( $E = \infty$ ), а при  $a \rightarrow 0$  – к прямой  $\sigma = r\varepsilon$ .

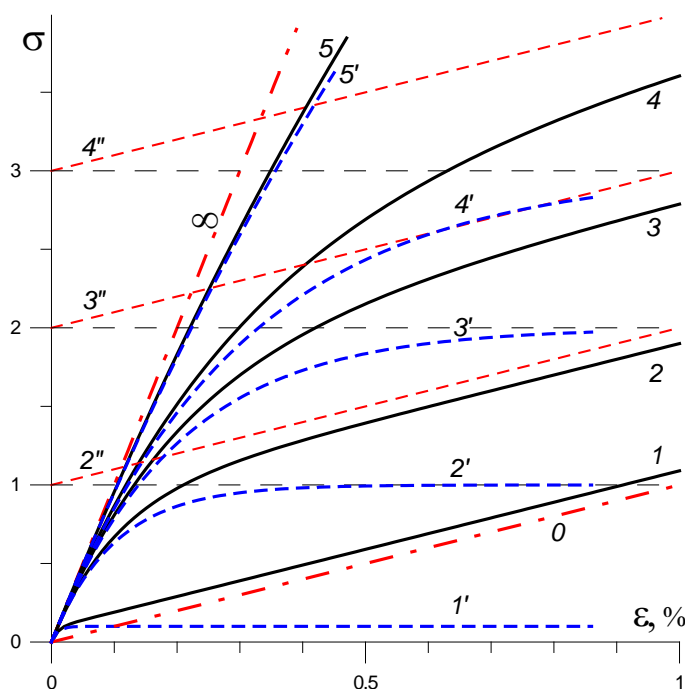


Рис.3. Диаграммы деформирования моделей Кельвина-Пойнтинга, Максвелла и Фойгта при разных скоростях деформации.

На рис.3 показаны ДД (10) модели Кельвина-Пойнтинга с  $r = 100$ ,



$E = \eta = 1000$ ,  $\mu = 1$  (кривые 1-5) и Максвелла (с  $r = 0$  – кривые 1'-5') для пяти разных скоростей  $a = 0.0001; 0.001; 0.002; 0.003; 0.010$ . При  $a \rightarrow \infty$  оба семейства ДД сходятся к прямой  $\sigma = E\varepsilon$  (штрих-пунктирная линия с символом  $\infty$ ). При  $a \rightarrow 0$  семейства ДД модели Кельвина-Пойнтинга сходятся к прямой  $\sigma = r\varepsilon$  (штрих-пунктирная линия 0), а ДД модели Максвелла – к прямой  $\sigma = 0$ . Штриховые прямые 2"-4" – ДД модели Фойгта (11) (11) с  $r = 100$ ,  $\eta = 1000$  при  $a = 0.001; 0.002; 0.003$ , они совпадают с асимптотами ДД 2-4. Асимптоты ДД модели Максвелла горизонтальны и совпадают с ДД вязкого элемента Ньютона (штриховые прямые – для  $a = 0.001; 0.002; 0.003$ ): для  $R = \eta\delta(t)$  имеем  $P(t) = \eta t^{-1}$  и  $\sigma(\varepsilon, a) = \eta a$ .

### 3. ФУНКЦИЯ СКОРОСТНОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ОС (3) И ЕЕ СВОЙСТВА

Вычислим по ДД (7) ПСЧ (1) (1), используя формулу  $P'(x) = x^{-1}(R(x) - P(x))$ :  $\partial\sigma/\partial a = -(\varepsilon/a)^2 P'(\varepsilon/a) = \varepsilon a^{-1}(P(\varepsilon/a) - R(\varepsilon/a))$ ,  $m(a, \varepsilon) = \varepsilon\sigma^{-1}[P(\varepsilon/a) - R(\varepsilon/a)]$ .

Т.к.  $\sigma/\varepsilon = P(\varepsilon/a)$ , то

$$m(x) = 1 - R(x)/P(x), \quad x := \varepsilon/a > 0. \quad (12)$$

Итак, ПСЧ – непрерывная функция, зависящая от одного аргумента  $x := \varepsilon/a$  (линии уровня  $m(a, \varepsilon)$  – лучи  $\varepsilon = xa$ ,  $a > 0$ ). Будем называть функцию (12) функцией скоростной чувствительности (ФСЧ), а ее график – кривой скоростной чувствительности (КСЧ). Каждой конкретной модели (3) (каждой ФР  $R(x)$ ) соответствует своя КСЧ  $m(x)$ , характеризующая ее скоростную чувствительность (и остальные свойства). Ее можно рассматривать как материальную функцию, так как по ней можно восстановить ФР (см. п.5) и построить модель с заданной формой КСЧ (зарегистрированной в испытаниях материала). Отметим, что теоретическая КСЧ может быть определена не только по заданной ФР, но и по одной ДД (по одной экспериментальной ДД в случае адекватности ОС (3)) ведь по (12) и (7)  $m(x) = 1 - E_T(x)/E_S(x)$ , где  $E_T(x) = \partial\sigma/\partial\varepsilon$  и  $E_S(x) := \sigma/\varepsilon$  – касательный и секущий модули.

Так как по лемме  $P(x) > R(x) > 0$  при  $x > 0$ , то из (12) следует *общая оценка*

$$0 < m(x) < 1,$$

*справедливая для любой ФР*. Предельные случаи реализуются для упругого элемента с  $R(t) = E = \text{const}$ ,  $P(x) = E$  и  $m(x) \equiv 0$  и для ньютоновской жидкости:  $R = \eta\delta(t)$ ,  $P(t) = \eta t^{-1}$  и  $m(x) \equiv 1$  при  $x > 0$ . Таким образом, линейное ОС (3) описывает лишь псевдопластические среды и не может моделировать дилатантные среды (у которых кажущаяся вязкость  $\eta := \sigma/\dot{\varepsilon}$  – возрастающая функция скорости деформации).

Предел ФСЧ при  $x \rightarrow 0$  зависит от класса, к которому принадлежит модель (ФР). Если ФР непрерывна справа в точке  $t = 0$  (модель регулярна), то при  $x \rightarrow 0$  (т.е. при  $\varepsilon \rightarrow 0$  или  $a \rightarrow \infty$ ) имеем  $m \rightarrow 0$ , поскольку  $P(0+) = R(0+)$  по лемме. Если еще существует конечный предел  $R'(0+)$ , то  $m(x) = Ax + o(x)$  при  $x \rightarrow 0$ , где  $A := -0.5R'(0)/R(0) > 0$ , так как  $P(x) - R(x) = -0.5R'(0)x + o(x)$  (см. лемму), поэтому в некоторой правой окрестности точки  $x = 0$  КСЧ  $m(x)$  возрастает (если  $R'(0+) < \infty$ ). Для сингулярных моделей  $R(0+) < \infty$  и  $P(t) = \eta t^{-1}$  и потому  $m(0+) = 1$ . Если  $R(t) \sim x^{-\alpha}$  при  $x \rightarrow 0$ ,  $\alpha \in (0; 1)$ , то  $P(t) \sim (1 - \alpha)^{-1} x^{-\alpha}$  и по (12)  $m(0+) = \alpha$ .

Предел при  $x \rightarrow \infty$  также может принимать любые значения из  $[0; 1]$ . Если  $r = R(\infty) > 0$ , то  $m \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$  (т.е. при  $\varepsilon \rightarrow \infty$  или  $a \rightarrow 0$ ), поскольку по лемме  $P(\infty) = R(\infty) := r$  и  $R(x)/P(x) \rightarrow 1$ . В случае  $r = 0$  за неопределённостью  $0/0$  может скрываться любой предел (из отрезка  $[0; 1]$ ). Если  $R(t) \sim x^{-\alpha}$  при  $x \rightarrow \infty$ , то по (12)  $m(\infty) = \alpha$ . А для модели Максвелла с  $R = Ee^{-\mu t}$  имеем  $P(t) = E\mu^{-1}t^{-1}(1 - e^{-\mu t})$ ,  $R(x)/P(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ , и потому  $m \rightarrow 1$ .

Итак, если  $R(0+) < \infty$  (т.е. модель регулярна) и  $R(\infty) \neq 0$ , то положительная непрерывная функция  $m(x)$  стремится к нулю на концах интервала  $(0; +\infty)$ , следовательно, она имеет хотя бы один локальный максимум (в той точке  $x = \hat{x}$ , в которой достигает своей точной верхней грани  $\hat{m} := m(\hat{x})$ ). При фиксированной СД  $a$  функция  $m(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ , имеет максимум в т.  $\hat{\varepsilon} = a\hat{x}$ . А при фиксированном  $\varepsilon$  функция  $m(a)$ ,  $a > 0$ , имеет максимум в т.  $\hat{a} = \varepsilon/\hat{x}$ . Чем больше  $\varepsilon$ , тем больше  $\hat{a}$  и тем шире диапазон СД, в котором значения  $m(a)$  близки к максимальной величине ПСЧ  $\hat{m} = m(\hat{x})$ . Таким образом, физически линейная теория способна моделировать наличие максимума ПСЧ и сигмоидальность зависимости  $\lg \sigma$  от  $\lg a$  (рис.1), столь важные для описания сверхпластичности.

Для определения  $\hat{x}$  и  $\hat{m}$  надо найти критические точки  $m(x)$

$$m'(x) = -[P(x)]^{-2} (R'(x)P(x) - R(x)P'(x)), \quad (13)$$

условие  $m'(x) = 0$  равносильно

$$R'(x)/R(x) = P'(x)/P(x) \quad \text{или} \quad xR'(x)/R(x) = R(x)/P(x) - 1.$$

Для конкретной ФР решения этого уравнения – критические точки  $m(x)$ , разбивающие ось на интервалы монотонности  $m(x)$ . Из общих качественных свойств ФР не следуют ограничения на количество точек экстремума у КСЧ. Анализ показывает, что КСЧ могут иметь несколько точек экстремума (например, модель стандартного тела, т.е. параллельное соединение двух моделей Максвелла с разными временами релаксации).

Для неограниченных и для сингулярных ФР (например, для модели Фойгта с  $R = \eta\delta(t) + r$ ) многие свойства КСЧ, доказанные для регулярных ФР, могут нарушаться. Например, для степенной ФР  $R(t) = Ct^{-M}$ ,  $M \in (0;1)$ , имеем  $P(t) = Kt^{-M}$ ,  $K := C/(1-M)$ , ДД (7) и КСЧ (12) имеют вид

$$\sigma(\varepsilon, a) = K\varepsilon(\varepsilon/a)^{-M} = K\varepsilon^{1-M}a^M, \quad m(x) \equiv M, \quad x > 0.$$

Таким образом, для степенных ФР линейное ОС (3) совпадает на одномерном пространстве процессов деформирования  $\varepsilon = at$  с нелинейной моделью (2) при  $N + M = 1$ , и ПСЧ не зависит от  $a$  и  $\varepsilon$ . Используя (13), можно доказать, что это свойство присуще только степенным ФР.

#### 4. КРИВЫЕ СКОРОСТНОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ МОДЕЛЕЙ КЕЛЬВИНА-ПОЙНТИНГА, МАКСВЕЛЛА И ФОЙГТА

Для модели Фойгта  $R = \eta\delta(t) + rh(t)$ ,  $P = r + \eta t^{-1}$ , и ФСЧ (12) имеет вид

$$m(x) = (1 + \lambda x)^{-1}, \quad x := \varepsilon/a > 0, \quad \lambda := r/\eta > 0.$$

ФСЧ модели Фойгта зависит не от двух параметров, а только от времени ретардации  $\tau = 1/\lambda$ . Очевидно,  $m(x)$  убывает при всех  $x \geq 0$ , причем  $m(0) = 1$  и  $m(\infty) = 0$ . ФСЧ модели Фойгта не имеет максимума и кардинально отличается от ФСЧ регулярных моделей (рис.4 и 5). Зависимость  $m(a)$  от СД возрастает при всех  $a > 0$ ,  $m \rightarrow 0$  при  $a \rightarrow 0$  и  $m \rightarrow 1$  при  $a \rightarrow \infty$ . При  $\lambda \rightarrow 0$   $m(x)$  равномерно сходится к  $m(x) \equiv 1$  (т.е. к КСЧ линейно вязкого элемента) на любом отрезке.

Для моделей с трехпараметрической ФР (8) (моделей Кельвина-Пойнтинга и Максвелла) в силу (12) и (9) ФСЧ выражается уравнением

$$m(x) = 1 - \frac{(1 - \bar{r})\mu x e^{-\mu x} + \mu \bar{r} x}{(1 - \bar{r})(1 - e^{-\mu x}) + \mu \bar{r} x}, \quad \bar{r} := r/E.$$

При  $\bar{r} = 0$  (модель Максвелла) ее ФСЧ возрастает,  $m(0+) = 0$ ,  $m(\infty) = 1$ . В случае  $\bar{r} > 0$ , поскольку  $R(0+) = E < \infty$  и  $R(\infty) = r \neq 0$ , то  $m(0+) = 0$ ,  $m(\infty) = 0$  и ФСЧ имеет хотя бы один максимум (можно доказать, что экстремум единственный).

На рис.4 приведены КСЧ  $m(x)$  шести моделей вида (8) с  $\mu = 1$  и  $\bar{r} = 0; 0.1; 0.2; 0.3; 0.4; 0.5$  (линии 0-5: кривая 0 с  $r = 0$  – соответствует модели Максвелла, остальные – Кельвина-Пойнтинга). Штриховые линии 6-8 – КСЧ трех моделей Фойгта с  $r/\eta = 0.01; 0.1; 0.5$ . У модели Максвелла  $m(x)$  возрастает при всех  $x > 0$ , а для моделей с  $r \neq 0$   $m(x)$  имеет точку максимума. Чем больше  $\bar{r}$ , тем меньше  $m(x)$  на всей полуоси. Очевидно, модель Максвелла демонстрирует наивысший ПСЧ при всех  $x$ , стабильно близкий к единице вне некоторой окрестности т.  $x = 0$ . Единственный ее «конкурент» – модель Фойгта с большим временем ретардации (кривая 6). Штрих-пунктирные кривые 10, 11 –

КСЧ при увеличении времени релаксации (вязкости) в 10 раз, т.е. при  $1/\mu = 10$  для  $\bar{r} = 0$  и  $\bar{r} = 1$ ; увеличение времени релаксации делает КСЧ более пологой.

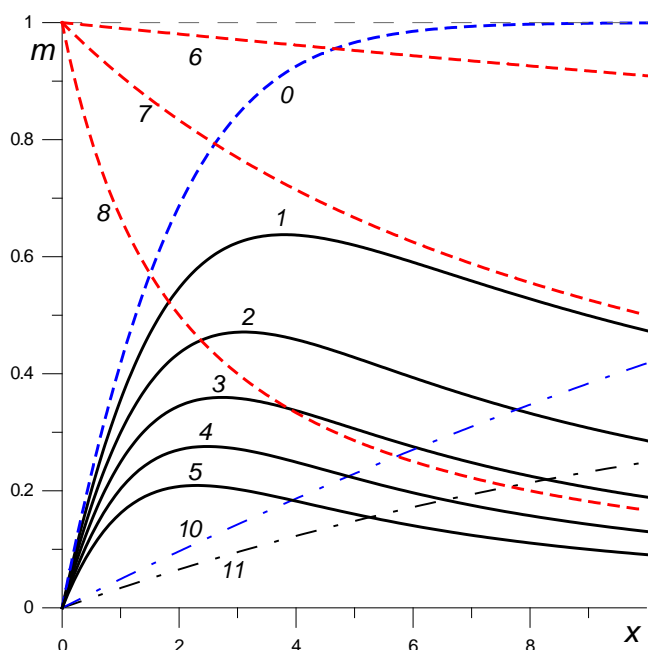


Рис.4. Кривые скоростной чувствительности  $m(x)$  для пяти моделей Кельвина-Пойнтинга (8) с  $r/E = 0.1; 0.2; 0.3; 0.4; 0.5$ , модели Максвелла (с  $r = 0$ ) и Фойгта.

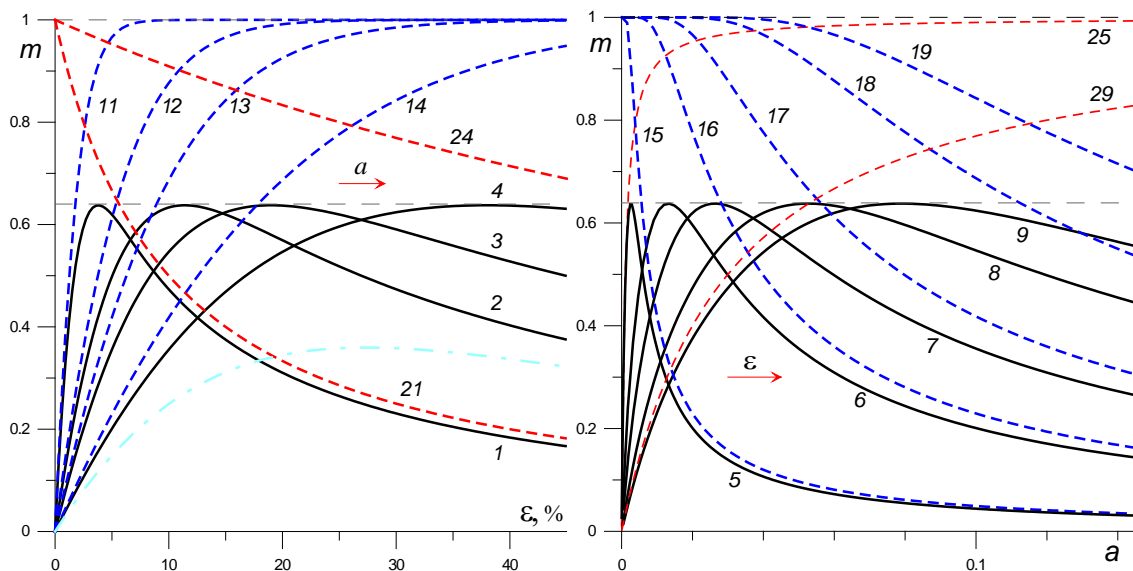


Рис.5. Зависимость ПСЧ: а) от деформации  $m(\epsilon)$  при  $a = 0.01; 0.03; 0.05; 0.10$  для модели Кельвина-Пойнтинга (8) с  $r = 1$  и Максвелла ( $r = 0$ ); б) от скорости деформации  $m(a)$  при  $\epsilon = 0.01; 0.05; 0.1; 0.2; 0.3$  для модели Кельвина-Пойнтинга (8) с  $r = 1$  и Максвелла.

На рис.5а,б приведены зависимости ПСЧ  $m(\epsilon)$  при фиксированных  $a = 0.01; 0.03; 0.05; 0.10$  и  $m(a)$  при  $\epsilon = 0.01; 0.05; 0.1; 0.2; 0.3$  для двух моделей:

Кельвина с  $\bar{r} = 0.1$  (кривые I-9) и Максвелла с  $\bar{r} = 0$  (кривые II-19). Стрелками указаны направления смещения кривых с ростом параметров  $a$  и  $\varepsilon$ . Для модели Максвелла  $m(\varepsilon)$  возрастает при всех  $\varepsilon > 0$ , а  $m(a)$  убывает при всех  $a > 0$ . Для модели Кельвина  $m(\varepsilon)$  и  $m(a)$  имеют точку максимума, максимальная величина ПСЧ  $\hat{m}$  для конкретной модели не зависит ни от  $a$  ни от  $\varepsilon$ . У модели Фойгта  $m(\varepsilon)$  убывает (штриховые кривые 21 и 24 – для модели с  $r/\eta = 0.1$  при  $a = 0,01$  и  $a = 0,1$ ), а  $m(a)$  возрастает при всех  $a > 0$  (штриховые кривые 25 и 29 – при  $\varepsilon = 0.01$  и  $\varepsilon = 0.3$ ).

## 5. ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ РЕЛАКСАЦИИ ПО ФУНКЦИИ СКОРОСТНОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ

Каждой конкретной модели (3) (каждой ФР  $R(x)$ ) соответствует по (12) своя ФСЧ  $m(x)$ , характеризующая её скоростную чувствительность, и, соответственно, значения  $\hat{x}$  и  $\hat{m}$  (если есть максимум и другие характерные точки). ФСЧ можно рассматривать как материальную функцию, поскольку по заданной ФСЧ можно однозначно восстановить ФР и таким образом построить модель с заданной формой КСЧ, зарегистрированной в испытаниях материала. В самом деле по заданной непрерывной кусочно-гладкой функции  $m(x)$ , такой, что  $0 < m < 1$  при  $x > 0$ , можно восстановить ФР  $R(x)$  с точностью до положительного множителя, т.к. по (12) всем ФР  $\lambda R(t)$ ,  $\lambda > 0$  соответствует одна и та же ФСЧ  $m(x)$ . Для определения  $\lambda > 0$  надо задать еще начальное условие  $R(t_0) = R_0 > 0$ . Из (12) следуют интегральное и дифференциальное уравнения для  $R(x)$ :  $\int_0^x R(t) dt = x(1 - m(x))^{-1} R(x)$ , или

$$R' = f(x)R, \quad f(x) := -x^{-1}m(x) - m'(x)(1 - m(x))^{-1}. \quad (14)$$

Функция  $f(x)$  кусочно-непрерывна, и множество её точек разрыва совпадает с множеством точек разрыва  $m'(x)$  на  $(0, \infty)$  (как правило, пустым), а наличие разрывов у  $m'(x)$  равносильно наличию разрывов у  $\dot{R}(t)$  в силу (14) (такие ФР иногда используют, склеивая задаваемые представления для ФР, в частности, полагая  $R(t) = \text{const}$  при больших  $t$ ).

Решение дифференциального уравнения (14) с начальным условием  $R(t_0) = R_0 > 0$  имеет вид:  $R(t) = R_0 \exp\left(\int_{t_0}^t f(x) dx\right)$ . Обозначив  $y(x) := x^{-1}m(x)$ , получим после преобразований

$$R(t) = R_0 \frac{1 - m(t)}{1 - m(t_0)} \exp(-Y(t)), \quad Y(t) := \int_{t_0}^t y(x) dx, \quad (15)$$

$$y := x^{-1}m(x), \quad t \geq t_0 > 0.$$

ФР (15) непрерывна, и  $R(t) > 0$ , поскольку  $m(t) < 1$ . Точки разрыва  $\dot{R}(t)$  совпадают с точками разрыва  $m'(x)$ . Так как  $0 < m < 1$ , то  $0 < y < x^{-1}$ , функция

$Y(t)$  возрастает,  $0 < Y(t) < \ln(t/t_0)$  при  $t > t_0$ ,  $t_0/t < \exp(-Y(t)) < 1$ , и потому верна оценка для ФР (15)

$$t_0 t^{-1} \frac{1-m(t)}{1-m(t_0)} < \frac{R(t)}{R(t_0)} < \frac{1-m(t)}{1-m(t_0)}, \quad t > t_0 > 0. \quad (16)$$

Предел ФР (15) при  $t \rightarrow \infty$  зависит от поведения интеграла  $Y(t)$ . Если  $Y(\infty) < \infty$  (интеграл сходится), то  $m(\infty) = 0$  (в предположении, что предел  $m(\infty)$  существует) и  $R(\infty) = R_0(1-m(t_0))^{-1} e^{-Y(\infty)} > 0$ . Если же интеграл  $Y(t)$  расходится, то  $\exp(-Y(t)) \rightarrow 0$  и  $R(\infty) = 0$ . Для этого достаточно, чтобы  $m(\infty) > 0$ .

Для того, чтобы ФР (15), восстановленная по ФСЧ, удовлетворяла необходимым ограничениям на ФР в ОС (3) (монотонного убывания  $R(t)$  и ее выпуклости вниз) надо наложить дополнительные ограничения на  $m(x)$ . Из дифференциального уравнения (14) следует, что *критерий (нестрогого) убывания*  $R(x)$  при  $x > 0$  – выполнение неравенства  $f(x) \leq 0$ , т.е.

$$m'(x) \geq -x^{-1}m(x)(1-m(x)), \quad x > 0. \quad (17)$$

*Критерий выпуклости вниз* ФР (15) найдем из (14):  $R'' = fR + fR' = (f' + f^2)R$ , где  $R > 0$ , поэтому  $R'' > 0$  равносильно условию  $f' + f^2 > 0$  для всех  $x > 0$ , т.е.

$$x^2 m'' < m(1-m^2) + x m'(3m-1). \quad (18)$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе аналитически исследована скоростная чувствительность семейства диаграмм деформирования (7), порождаемых физически линейным ОС вязкоупругости (3) с произвольной функцией релаксации в одноосных испытаниях с постоянными скоростями деформации. Выведено общее выражение (12) для показателя скоростной чувствительности (параметра скоростного упрочнения)  $m(a, \varepsilon)$ , исследованы его общие качественные свойства и их зависимость от характеристик функций релаксации и скорости деформации  $a$ . Установлено, что ПСЧ зависит не от двух, а от одного аргумента  $x := \varepsilon/a$  и может быть вычислен по одной диаграмме деформирования. Доказано, что значения ПСЧ всегда лежат в интервале от нуля до единицы (т.е. линейное ОС (3) описывает только псевдопластические среды и не может описывать поведение дилатантных сред), и что ПСЧ не только может возрастать или убывать с ростом скорости деформации, но может иметь максимум, и может принимать значения, сколь угодно близкие к единице (верхней границе для псевдопластических сред). Точнее, доказано, что если  $R(0+) < \infty$  (т.е. модель регулярна) и  $R(\infty) \neq 0$ , то ПСЧ  $m(x)$  стремится к нулю на концах интервала  $(0; +\infty)$  и имеет хотя бы один локальный максимум, а для степенных ФР ПСЧ постоянен и совпадает с показателем ФР.

Тем самым обнаружена (неожиданная) способность линейного ОС вязкоупругости (3) качественно описывать сигмоидальность зависимости напряжения от скорости деформации в логарифмических осях (рис.1) и очень

высокую скоростную чувствительность, характерные для режима сверхпластического деформирования. И потому линейные интегральные операторы вида (3), в принципе, можно использовать как инструмент при построении ОС сверхпластичности, связывающих истории тензоров напряжений и деформаций (конечных, больших), температуры и эволюции параметров структуры материала.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бочвар А.А., Свидерская З.А. *Явление сверхпластичности в сплавах цинка с алюминием* // Изв. АН СССР. ОТН. – 1945. – №9. – С.821-824.
2. Holt D.L., Backofen W.A. *Superplasticity in the Al-33Cu eutectic alloy* // Transactions of American Society for Metals. – 1966. – Vol.59. – Pp.755-768.
3. Zehr S.W., Backofen W.A. *Superplasticity in Lead-Tin alloys* // Trans. ASM. – 1968. – Vol.61. – Pp.300-313.
4. Hedworth J., Stowell M.J. *The measurement of strain rate sensitivity in superplastic alloys* // J. Mater. Sci. – 1971. – Vol.6. – Pp.1061-1069.
5. Грабский М.В. *Структурная сверхпластичность металлов*. – М: Металлургия, 1975. – 272 с.
6. Смирнов О.М. *Обработка металлов давлением в состоянии сверхпластичности*. – М.: Машиностроение, 1979. – 184 с.
7. Padmanabhan K.A., Davies J.J. *Superplasticity*. – Berlin: Springer-Verlag, 1980. – 314 p.
8. Новиков И.И., Портной В.К. *Сверхпластичность сплавов с ультрамелким зерном*. – М.: Металлургия, 1981. – 168 с.
9. Кайбышев О.А. *Сверхпластичность промышленных сплавов*. – М.: Металлургия, 1984. – 264 с.
10. Сегал В.М., Резников В.И., Копылов В.И., Павлик Д.А. *Процессы пластического структурообразования металлов*. – Минск: Наука и техника, 1994. – 232 с.
11. Nieh T.G., Wadsworth J., Sherby O.D. *Superplasticity in metals and ceramics*. Cambridge Univ. Press, 1997. – 287 p.
12. Васин Р.А., Еникеев Ф.У. *Введение в механику сверхпластичности*. – Уфа: Гилем, 1998. – 280 с.
13. Padmanabhan K.A., Vasin R.A., Enikeev F.U. *Superplastic Flow: Phenomenology and Mechanics*. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2001. – 363 p.
14. Чумаченко Е.Н., Смирнов О.М., Цепин М.А. *Сверхпластичность: Материалы, теория, технологии*. – М.: КомКнига, 2005. – 320 с.
15. Segal V.M., Beyerlein I.J., Tome C.N., Chuvil'deev V.N., Kopylov V.I. *Fundamentals and Engineering of Severe Plastic Deformation*. – N.-Y.: Nova Science Pub. Inc., 2010. – 542 p.
16. Langdon T.G. *Forty-Five Years of Superplastic Research: Recent Developments and Future Prospects* // Materials Science Forum. – 2016. – Vol.838-839. – Pp.3-12. DOI: 10.4028/www.scientific.net/MSF.838-839.3
17. Mikhaylovskaya A.V., Mosleh A.O., Kotov A.D., Kwame J.S., Pourcelot T., Golovin I.S., Portnoy V.K. *Superplastic deformation behaviour and microstructure evolution of near- $\alpha$ -Ti-Al-Mn alloy* // Materials Science & Engineering.A. – 2017. – Vol.708. – Pp.469-477. DOI: 10.1016/j.msea.2017.10.017
18. Шарифуллина Э.Р., Швейкин А.И., Трусов П.В. *Обзор экспериментальных исследований структурной сверхпластичности: эволюция микроструктуры*

*материалов и механизмы деформирования // Вестник Пермского нац. исслед. политех. ун-та. Механика. – 2018. – №3. – С.103-127.*

19. Валиев Р.З., Александров И.В. *Объемные наноструктурные металлические материалы: получение, структура и свойства.* – Москва: Академкнига, 2007. – 398 с.
20. Ефимов О.Ю., Громов В.Е., Иванов Ю.Ф. *Формирование структуры, фазового состава и свойств сталей и сплавов в упрочняющих технологиях обработки давлением.* – Новокузнецк: Сиб. гос. индустр. ун-т, Интер-Кузбасс, 2012. – 345 с.
21. Faraji G., Kim H.S., Kashi H.T. *Severe Plastic Deformation: Methods, Processing and Properties.* – Elsevier, 2018. – 324 p.
22. Валиев Р.З., Исламгалиев Р.К. *Структура и механическое поведение ультрамелкозернистых металлов и сплавов, подвергнутых интенсивной пластической деформации // Физика металлов и металловедение. – 1998. – Т.85. – Вып. 3. – С.161-177.*
23. Глезер А.М., Метлов Л.С. *Мегапластическая деформация твердых тел // Физика и техника высоких давлений. – 2008. – Т.18. – №4. – С.21-35.*
24. Малинин Н.Н. *Ползучесть в обработке металлов давлением.* – М.: Машиностроение, 1986. – 221 с.
25. Соснин О.В., Горев Б.В., Любашевская И.В. *Высокотемпературная ползучесть и сверхпластичность материалов // ПМТФ. – 1997. – Т.38. – №2. – С.140-145.*
26. Vasin R.A., Enikeev F.U., Mazurski M.I., Munirova O.S. *Mechanical modelling of the universal superplastic curve // J. Mater. Sci. – 2000. – Vol.35. – No.10. – Pp.2455-2466.*
27. Lin Y.C., Chen X.-M. *A critical review of experimental results and constitutive descriptions for metals and alloys in hot working // Materials and Design. – 2011. – Vol.32. – Pp.1733-1759.*
28. Bylya O.I., Sarangi M.K., Ovchinnikova N.V. et al. *FEM simulation of microstructure refinement during severe deformation / IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2014. – Vol.63. – No.012033. – Pp.1-10. DOI: 10.1088/1757-899X/63/1/012033*
29. Alabort E., Putman D., Reed R.C. *Superplasticity in Ti-6Al-4V: characterisation, modelling and applications // Acta Mater. – 2015. – Vol.95. – Pp.428-442. DOI:10.1016/j.actamat.2015.04.056*
30. Bylya O.I., Vasin R.A., Blackwell P.L. *The mechanics of superplastic forming – how to incorporate and model superplastic and superplastic-like condition // Materials Science Forum. – 2016. – Vol.838. – Pp.468-476.*
31. Khokhlov A.V. *Applicability indicators and identification techniques for a nonlinear Maxwell-type elastoviscoplastic model using loading-unloading curves // Mechanics of Composite Materials. – 2019. – Vol.55. – No.2. – Pp.195-210. DOI:10.1007/s11029-019-09809-w*
32. Работнов Ю.Н. *Ползучесть элементов конструкций.* – М.: Наука, 1966. – 752 с.
33. Локощенко А.М. *Ползучесть и длительная прочность металлов.* – М.: Физматлит, 2016. – 504 с.
34. Никитенко А.Ф., Соснин О.В., Торшенов Н.Г., Шокало И.К. *О ползучести упрочняющихся материалов с разными свойствами на растяжение и сжатие // ПМТФ. – 1971. – Т.12. – №2. – С.118-122.*
35. Беякова Т.А., Гончаров И.А., Хохлов А.В. *О невозможности моделирования сигмоидальных кривых скоростной чувствительности параллельным*



- или последовательным соединениями степенных вязких элементов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2019. – Т.25. – №3. – С.299-315. DOI: 10.33113/mkmk.ras.2019.25.03.299\_315.01
36. Хохлов А.В. *Общие свойства диаграмм деформирования линейных моделей вязкоупругости при постоянной скорости деформации* // Проблемы прочности и пластичности. – 2015. – Вып.77. – №1. – С.60-74.
37. Хохлов А.В. *Анализ общих свойств кривых ползучести при циклических ступенчатых нагружениях, порождаемых линейной теорией наследственности* // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2017. – Т.21. – №2. – С.326-361. DOI:10.14498/vsgtu1533
38. Хохлов А.В. *Двусторонние оценки для функции релаксации линейной теории наследственности через кривые релаксации при ramp-деформировании и методики ее идентификации* // Изв. РАН. МТТ. – 2018. – №3. – С.81-104. DOI:10.7868/S0572329918030108
39. Хохлов А.В. *Индикаторы неприменимости линейной теории вязкоупругости по данным испытаний материала на ползучесть при растяжении с наложением гидростатического давления* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2019. – Т.25. – №2. – С.259-280. DOI: 10.33113/mkmk.ras.2019.25.02.259\_280.09
40. Scott-Blair G.W., Caffyn J. *Significance of power-law relations in rheology* // Nature. – 1945. – Vol.155. – Pp.171-172.
41. Герасимов А.Н. *Обобщение линейных законов деформирования и его применение к задачам внутреннего трения* // ПММ. – 1948. – Т.12. – Вып.3. – С.251-260.
42. Podlubny I. *Fractional differential equations. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. Mathematics in Science and Engineering. Vol.198.* – San Diego: Academic Press, 1999. – xxiv+340 p.
43. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies. Vol.204.* – Amsterdam: Elsevier, 2006. – xx+523 pp.
44. Mainardi F., Spada G. *Creep, relaxation and viscosity properties for basic fractional models in rheology* // The European Physical Journal. Special Topics. – 2011. – Vol.193. – No1. – Pp.133-160.
45. Огородников Е.Н., Радченко В.П., Унгарова Л.Г. *Математическое моделирование наследственно упругого деформируемого тела на основе структурных моделей и аппарата дробного интегро-дифференцирования Римана–Лиувилля* // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. Науки. – 2016. – Т.20. – №1. – С.167-194.

## REFERENCES

1. Bochvar A.A., Sviderskaia Z.A. *Yavlenie sverkhplastichnosti v splavakh tsinka s alyuminiem [Phenomenon of superplasticity in zinc-aluminum alloys]*. Izvestiya akademii nauk SSSR. Otdelenie tekhnicheskikh nauk, 1945, No.9, Pp.821-824.
2. Holt D.L., Backofen W.A. *Superplasticity in the Al-33Cu eutectic alloy*. Transactions of American Society for Metals, 1966, Vol.59, Pp.755-768.
3. Zehr S.W., Backofen W.A. *Superplasticity in Lead-Tin alloys*. Trans. ASM, 1968, Vol.61, Pp.300-313.

4. Hedworth J., Stowell M.J. *The measurement of strain rate sensitivity in superplastic alloys*. J. Mater. Sci., 1971, Vol.6, Pp.1061-1069.
5. Grabskii M.V. *Strukturnaya sverkhplastichnost' metallov [Structural superplasticity of metals]*. Moskva, Metallurgiya, 1975, 272 p.
6. Smirnov O.M. *Obrabotka metallov davleniem v sostoyanii sverkhplastichnosti [Shaping of Metals in the Superplasticity State]*. Moskva, Mashinostroenie, 1979, 184 p.
7. Padmanabhan K.A., Davies J.J. *Superplasticity*. Berlin, Springer-Verlag, 1980, 314 p.
8. Novikov I.I., Portnoi V.K. *Sverkhplastichnost' splavov s ul'tramelkim zernom [Superplasticity of ultrafine-grained alloys]*. Moskva, Metallurgiya, 1981, 168 p.
9. Kaibyshev O.A. *Sverkhplastichnost' promyshlennykh splavov [Superplasticity of industrial alloys]*. Moskva, Metallurgiya, 1984, 264 p.
10. Segal V.M., Reznikov V.I., Kopylov V.I., Pavlik D.A. *Protsessy plasticheskogo strukturoobrazovaniya metallov [Processes of plastic structure formation of metals]*. Minsk, Nauka i tekhnika, 1994, 232 p.
11. Nieh T.G., Wadsworth J., Sherby O.D. *Superplasticity in metals and ceramics*. Cambridge Univ. Press, 1997, 287 p.
12. Vasin R.A., Enikeev F.U. *Vvedenie v mekhaniku sverkhplastichnosti [Introduction to the superplasticity mechanics]*. Ufa, Gilem, 1998, 280 p.
13. Padmanabhan K.A., Vasin R.A., Enikeev F.U. *Superplastic Flow: Phenomenology and Mechanics*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2001, 363 p.
14. Chumachenko E.N., Smirnov O.M., Tsepin M.A. *Sverkhplastichnost': Materialy, teoriya, tekhnologii [Superplasticity: materials, theory, technologies]*. Moskva, KomKniga, 2005, 320 p.
15. Segal V.M., Beyerlein I.J., Tome C.N., Chuvil'deev V.N., Kopylov V.I. *Fundamentals and Engineering of Severe Plastic Deformation*. N.-Y., Nova Science Pub. Inc., 2010, 542 p.
16. Langdon T.G. *Forty-Five Years of Superplastic Research: Recent Developments and Future Prospects*. Materials Science Forum, 2016, Vol.838-839, Pp.3-12.
17. Mikhaylovskaya A.V., Mosleh A.O., Kotov A.D., Kwame J.S., Pourcelot T., Golovin I.S., Portnoi V.K. *Superplastic deformation behaviour and microstructure evolution of near- $\alpha$ -Ti-Al-Mn alloy*. Materials Science & Engineering.A, 2017, Vol.708, Pp.469-477. DOI: 10.1016/j.msea.2017.10.017
18. Sharifullina E.R., Shveikin A.I., Trusov P.V. *Obzor ehksperimental'nykh issledovaniy strukturnoj sverkhplastichnosti: ehvolyutsiya mikrostruktury materialov i mekhanizmy deformirovaniya [Review of experimental studies of structural superplasticity: evolution of the microstructure of materials and deformation mechanisms]*. Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika, 2018, No.3, Pp.103-127.
19. Valiev R.Z., Aleksandrov I.V. *Ob"emnye nanostrukturnye metallicheskie materialy: poluchenie, struktura i svoystva [Bulk nanocrystalline metallic materials: synthesis, structure and properties]*. Moskva, Akademkniga, 2007, 398 p.
20. Efimov O.U., Gromov V.E., Ivanov U.F. *Formirovanie struktury, fazovogo sostava i svoystv staley i splavov v uprochnyayushhikh tekhnologiyakh obrabotki davleniem [Forming of structure, phase composition and properties of steels and alloys in the hardening technologies of pressure treatment]*. Novokuznetsk, Sibirskij gosudarstvennyj industrial'nyj universitet, Inter-Kuzbass, 2012, 345 p.
21. Faraji G., Kim H.S., Kashi H.T. *Severe Plastic Deformation: Methods, Processing and Properties*. Elsevier, 2018, 324 p.

22. Valiev R.Z., Islamgaliev R.K. *Struktura i mekhanicheskoe povedenie ul'tramelkozernistykh metallov i splavov, podvergnutykh intensivnoj plasticheskoj deformatsii [Structure and Mechanical behavior of ultrafine-grained metals and alloys subjected to severe plastic deformation]*. Fizika metallov i metallovedenie, 1998, Vol.85, Iss.3, Pp.161-177.
23. Glezer A.M., Metlov L.S. *Megaplasticheskaya deformatsiya tverdykh tel [Megaplastic deformation of solids]*. Fizika i tekhnika vysokikh davlenij, 2008, Vol.18, No.4, Pp.21-35.
24. Malinin H.N. *Polzuchest' v obrabotke metallov davleniem [Creep in metals processing by pressure]*. Moskva, Mashinostroenie, 1986, 221 p.
25. Sosnin O.V., Gorev B.V., Lyubashevskaya I.V. *High-temperature creep and superplasticity of materials*. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 1997, Vol.38, No.2, Pp.293-297.
26. Vasin R.A., Enikeev F.U., Mazurski M.I., Munirova O.S. *Mechanical modelling of the universal superplastic curve*. J. Mater. Sci., 2000, Vol.35, No.10, Pp.2455-2466.
27. Lin Y.C., Chen X.-M. *A critical review of experimental results and constitutive descriptions for metals and alloys in hot working*. Materials and Design, 2011, Vol.32, Pp.1733-1759.
28. Bylya O.I., Sarangi M.K., Ovchinnikova N.V. et al. *FEM simulation of microstructure refinement during severe deformation*. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2014, Vol.63, No.012033. Pp.1-10.  
DOI: 10.1088/1757-899X/63/1/012033
29. Alabort E., Putman D., Reed R.C. *Superplasticity in Ti-6Al-4V: characterisation, modelling and applications*. Acta Mater., 2015, Vol.95, Pp. 428-442.  
DOI: 10.1016/j.actamat.2015.04.056
30. Bylya O.I., Vasin R.A., Blackwell P.L. *The mechanics of superplastic forming – how to incorporate and model superplastic and superplastic-like condition*. Materials Science Forum, 2016, Vol.838, Pp.468-476.
31. Khokhlov A.V. *Applicability indicators and identification techniques for a nonlinear Maxwell-type elastoviscoplastic model using loading-unloading curves*. Mechanics of Composite Materials, 2019, Vol.55, No.2, Pp.195-210.  
DOI: 10.1007/s11029-019-09809-w
32. Rabotnov Yu.N. *Polzuchest' ehlementov konstruksij [Creep problems in structural members]*. Moskva, Nauka, 1966, 752 p.
33. Lokoshchenko A.M. *Creep and Long-Term Strength of Metals*. Boca, Raton, London, N.Y., CRC Press, 2018, 546 p.
34. Nikitenko A.F., Sosnin O.V., Torshenov N.G., Shokalo I.K. *Creep of hardening materials with different properties in tension and compression*. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 1971, Vol.12, No.2, Pp.277-281.
35. Beliakova T.A., Goncharov I.A., Khokhlov A.V. *O nevozmozhnosti modelirovaniya sigmoidal'nykh krivykh skorostnoj chuvstvitel'nosti parallel'nym ili posledovatel'nym soedineniyami stepennykh vyazkikh ehlementov [The impossibility of modelling of sigmoid superplasticity curves using only parallel or series connections of power-law viscous elements]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2019, Vol.25, No.3, Pp.299-315.  
DOI: 10.33113/mkkm.ras.2019.25.03.299\_315.01
36. Khokhlov A.V. *Obshhie svoystva diagramm deformirovaniya linejnykh modelej vyazkouprugosti pri postoyannoj skorosti deformatsii [General properties of stress-strain curves at constant strain rate yielding from the linear theory]*

- of viscoelasticity*]. Problemy prochnosti i plastichnosti, 2015, Vol.77, No.1, Pp.60-74. DOI: 10.32326/1814-9146-2015-77-1-60-74.
37. Khokhlov A.V. *Analiz obshchikh svoystv krivykh polzuchesti pri tsiklicheskikh stupenchatykh nagruzheniyakh, porozhdaemykh linejnoy teoriej nasledstvennosti [Analysis of creep curves produced by the linear viscoelasticity theory under cyclic stepwise loadings]*. Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Ser. fiz.-mat. nauki, 2017, Vol.21, No.2, Pp.326-361. DOI: 10.14498/vsgtu1533
38. Khokhlov A.V. *Two-sided estimates for the relaxation function of the linear theory of heredity via the relaxation curves during the ramp-deformation and the methodology of identification*. Mechanics of Solids, 2018, Vol.53, No.3, Pp.307-328. DOI: 10.3103/S0025654418070105
39. Khokhlov A.V. *Indikatory neprimenimosti linejnoy teorii vyazkouprugosti po dannym ispytaniy materiala na polzuchest' pri rastyazhenii s nalozheniem gidrostaticheskogo davleniya [Applicability indicators of the linear viscoelasticity theory using creep curves under tensile load combined with constant hydrostatic pressure]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2019, Vol.25, No.2, Pp.259-280. DOI: 10.33113/mkmk.ras.2019.25.02.259\_280.09
40. Scott-Blair G.W., Caffyn J. *Significance of power-law relations in rheology*. Nature, 1945, Vol.155, Pp.171-172.
41. Gerasimov A.N. *Obobshhenie linejnykh zakonov deformirovaniya i ego primenenie k zadacham vnutrennego treniya [A generalization of linear laws of deformation and its application to internal friction problem]*. Prikl. Mat. Mekh., 1948, Vol.12, No.3, Pp.251-260.
42. Podlubny I. *Fractional differential equations. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. Mathematics in Science and Engineering, Vol.198*. San Diego, Academic Press, 1999, xxiv+340 p.
43. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies, Vol.204*. Amsterdam, Elsevier, 2006, xx+523 pp.
44. Mainardi F., Spada G. *Creep, relaxation and viscosity properties for basic fractional models in rheology*. The European Physical Journal. Special Topics, 2011, Vol.193, No.1, Pp.133-160.
45. Ogorodnikov E.N., Radchenko V.P., Ungarova L.G. *Matematicheskoe modelirovanie nasledstvenno uprugogo deformiruemogo tela na osnove strukturnykh modelej i apparata drobnogo integro-differentsirovaniya Rimana–Liuvillya [Mathematical modeling of hereditary elastically deformable body on the basis of structural models and fractional integrodifferentiation Riemann–Liouville apparatus]*. Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Ser. fiz.-mat. nauki, 2016, Vol.20, No.1, Pp.167-194.

Поступила в редакцию 11 октября 2019 года.

---

Сведения об авторе:

Хохлов Андрей Владимирович – к.т.н., в.н.с., Лаборатория упругости и пластичности НИИ механики МГУ им.М.В.Ломоносова, доц. Кафедры механики композитов механико-математического факультета МГУ, г. Москва, Россия; e-mail: [andrey-khokhlov@ya.ru](mailto:andrey-khokhlov@ya.ru)