

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛОСК ИХ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН В МАТЕРИАЛЕ С ТОЧЕЧНЫМИ ДЕФЕКТАМИ*

Ерофеев В.И.¹, Леонтьева А.В.¹, Шекоян А.В.²

¹*Институт проблем машиностроения РАН, г. Нижний Новгород, Россия*

²*Институт механики НАН Республики Армения, г. Ереван, Армения*

АННОТАЦИЯ

В настоящей работе изучается распространение плоских продольных волн в безграничной среде с точечными дефектами, находящейся в нестационарном неоднородном температурном поле. Задача рассматривается в самосогласованной постановке, учитывающей как влияние акустической волны на образование и перемещение дефектов, так и влияние дефектов на особенности распространения акустической волны. Показано, что в случае отсутствия диффузии тепла система уравнений сводится к нелинейному эволюционному уравнению, которое является обобщением уравнения Кортевега – де Вриза – Бюргерса. Методом усеченных разложений найдено точное решение эволюционного уравнения в виде стационарной ударной волны с монотонным убыванием. Отмечено, что диссипативные эффекты, обусловленные наличием дефектов, преобладают над дисперсией, связанной с миграцией дефектов в среде. Исследовано влияние начальной температуры и типа дефектов на основные параметры стационарной волны: скорость, амплитуду и ширину фронта. Нелинейные волны в средах с вакансиями распространяются быстрее, чем в средах с межузлиями. Увеличение начальной температуры приводит к увеличению скорости стационарной волны, если дефектами являются межузлия и уменьшению, если дефектами являются вакансии. Для гармонических волн показано, что наличие дефектов в среде способствует появлению частотно-зависимой диссипации и дисперсии. На низких частотах близких к нулю затухание волн практически отсутствует, и они распространяются с постоянной скоростью близкой к единице, которая не зависит ни от типа дефектов, ни от их наличия. На высоких частотах волны также распространяются с постоянной скоростью, но она зависит от типа дефектов. В средах с межузлиями гармонические волны имеют большую длину и скорость, чем в средах с вакансиями. Исследовано влияние параметра диффузии на распространение гармонической волны.

Ключевые слова: термоупругая среда; точечные дефекты; продольная волна; стационарная ударная волна; гармоническая волна; дисперсия

PROPAGATION OF PLANE LONGITUDINAL WAVES IN A MATERIAL WITH POINT DEFECTS

Erofeev V.I.¹, Leonteva A.V.¹, Shekoyan A.V.²

¹*Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences,
Nizhny Novgorod, Russia*

²*Institute of Mechanics of the National of Academy of Sciences of the Republic of
Armenia, Yerevan, Armenia*

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №18-29-10073 мк).

ABSTRACT

In this paper, we study the propagation of plane longitudinal waves in an infinite medium with point defects located in a nonstationary inhomogeneous temperature field. The problem is considered in a self-consistent formulation, taking into account both the influence of the acoustic wave on the formation and movement of defects, and the influence of defects on the propagation features of the acoustic wave. It is shown that in the absence of heat diffusion, the system of equations reduces to a nonlinear evolution equation, which is a generalization of the Korteweg – de Vries – Burgers equation. By the method of truncated decompositions, an exact solution of the evolution equation in the form of a stationary shock wave with a monotonic decrease has been found. It is noted that dissipative effects due to the presence of defects prevail over the dispersion associated with the migration of defects in the medium. The influence of the initial temperature and type of defects on the main parameters of a stationary wave is studied: velocity, amplitude and front width. Nonlinear waves propagate faster in media with vacancies than in media with interstitials. An increase in the initial temperature leads to an increase in the velocity of the stationary wave if the defects are interstices and to a decrease if defects are vacancies. For harmonic waves, it is shown that the presence of defects in the medium promotes the appearance of frequency-dependent dissipation and dispersion. At low frequencies close to zero, wave attenuation is practically absent, and they propagate at a constant speed close to unity, which does not depend on the type of defects or on their presence. At high frequencies, the waves also propagate at a constant speed, which depends on the type of defects. Harmonic waves have a greater length and speed in media with interstitial than in media with vacancies. The influence of the diffusion parameter on the propagation of a harmonic wave is investigated.

Key words: thermoelastic medium; point defects; longitudinal wave; stationary shock wave; harmonic wave; dispersion

ВВЕДЕНИЕ

При воздействии на материал лазерного излучения или потока частиц (например, при ионной имплантации) в нем создаются точечные дефекты (вакансии, межузлия) [1]. Прохождение интенсивной продольной акустической волны способствует изменению в областях растяжения и сжатия энергии активации образования точечных дефектов, приводя к их пространственному перераспределению. Дефекты, мигрирующие по материалу, рекомбинируют на различного рода центрах. Роль таких центров могут играть дислокации, примеси внедрения и др.

Волновые эффекты в ансамблях дислокаций изучались в работах [2-9]. Также в [6] рассматривались задачи распространения упругой волны в вязкотермоупругом композите с шариковыми неоднородностями.

В [10] показано, что задачу о распространении акустической волны в материале с точечными дефектами следует рассматривать как самосогласованную, включающую в себя, наряду с динамическим уравнением теории упругости, кинетическое уравнение для плотности дефектов.

В [11] исследовано взаимодействие нелинейной волны деформации с полем концентрации точечных дефектов (вакансий, межузлий), приводящее как к рассеянию волны, так и к изменению энергии активации образования дефектов и их пространственному перераспределению.

При этом предполагалось, что основными процессами, определяющими поведение дефектов, являются процессы генерации, рекомбинации и диффузии. Объемная взаимная рекомбинация разноименных дефектов не учитывалась.

Распространение нелинейных продольных волн в пластине при учете взаимодействия продольной компоненты смещений среды с полями температуры и концентрации неравновесных атомных точечных дефектов исследовано в [12].

В работе [13] исследовано воздействие дислокаций и точечных дефектов на пространственную локализацию нелинейных акустических волн, распространяющихся в материалах. Влияние дефектов на пространственную локализацию нелинейных волн с учетом взаимной рекомбинации разноименных дефектов изучалось в [14,15]. В работах показано, что вакансии и межузлия способствуют формированию пространственно локализованных нелинейных волн.

В данной работе рассматриваем распространение плоской продольной волны в безграничной среде с точечными дефектами, при образовании которых меняется температура среды. Считаем, что в среде возникают дефекты только одного типа либо вакансии, либо межузлия.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Самосогласованная задача, включающая в себя динамическое уравнение теории упругости, уравнение теплопроводности и кинетическое уравнение для плотности дефектов, примет вид

$$\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - a \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} - \beta_N \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} = -\gamma \frac{\partial \theta}{\partial x_3} - d_j \frac{\partial n_j}{\partial x_3}, \quad (1)$$

$$c_\varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial t} - \chi \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} = -\gamma T_0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3 \partial t} - T_0 p_j \frac{\partial n_j}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} = q_\varepsilon \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + D_j \frac{\partial^2 n_j}{\partial x_3^2} - \beta_j n_j, \quad (3)$$

где $u_3(x_3, t)$ – смещение частиц среды вдоль координаты x_3 , $\theta(x_3, t)$ – перепад температуры ($\theta = T - T_0$), T_0 – температура естественного состояния, $n_j(x_3, t)$ – объемная концентрация точечных дефектов j -го типа ($j = V$ – для вакансий, $j = i$ – для межузлий), ρ – плотность, $a = \lambda + 2\mu$, λ , μ – постоянные Ламе, $c_l = \sqrt{a/\rho}$ – скорость распространения продольной волны в отсутствие дефектов, β_N – коэффициент нелинейности ($\beta_N = 3\lambda + 6\mu + 2A + 6B + 2C$), A, B, C – модули Ландау третьего порядка, γ – термический коэффициент, $d_j = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)\Omega_j$, Ω_j – дилатационный параметр, характеризующий изменение объема среды при образовании в нем одного точечного дефекта ($\Omega_V < 0$, $\Omega_i > 0$), c_ε – теплопроводность при постоянной деформации, χ – коэффициент теплопроводности, p_j – теплоемкость дефекта типа j , q_ε – темп генерации точечных дефектов при наличии деформации, D_j – коэффициент диффузии дефекта типа j , β_j – скорость рекомбинации на стоках дефекта j -го типа.

Системой уравнений (1)-(3) описывается распространение плоской продольной волны в среде, как с дефектами типа «вакансия» так и с дефектами типа «межузлие». Системы отличаются между собой знаками перед последним

слагаемым первого уравнения системы. При дальнейшем анализе рассматриваются оба случая.

Пусть коэффициент теплопроводности является малой величиной ($\chi = 0$), тогда из второго уравнения системы получаем выражение для температуры

$$\theta(x_3, t) = -\frac{T_0}{c_\epsilon} \left(\gamma \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + p_j n_j \right). \quad (4)$$

С учетом (4) систему (1), (3) можно свести к одному уравнению относительно смещений частиц среды u_3

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - \left(\left(\frac{a}{\rho} + \frac{\gamma^2 T_0}{\rho c_\epsilon} \right) + \frac{q_\epsilon}{\rho \beta_j} \left(\frac{\gamma T_0 p_j}{c_\epsilon} - d_j \right) \right) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + \\ + \frac{1}{\beta_j} \left(\frac{\partial}{\partial t} - D_j \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - \left(\frac{a}{\rho} + \frac{\gamma^2 T_0}{\rho c_\epsilon} \right) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right) - \\ - \frac{\beta_N}{\rho} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + \frac{1}{\beta_j} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3 \partial t} \right) \right) + \\ + \frac{\beta_N D_j}{\rho \beta_j} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

В уравнении (5) введем безразмерные величины для продольного перемещения, координаты и времени соответственно $U = u_3/u_0$, $z = x_3/X$, $\tau = t/T$. Уравнение примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - a_1 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) - a_2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - a_1 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) - \\ - a_3 \left(\frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \tau} \right) \right) + a_2 a_3 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где a_i – безразмерные комплексы параметров, имеют вид

$$\begin{aligned} a_1 = \frac{\frac{a}{\rho} + \frac{\gamma^2 T_0}{\rho c_\epsilon}}{\frac{a}{\rho} + \frac{\gamma^2 T_0}{\rho c_\epsilon} + \frac{q_\epsilon}{\rho \beta_j} \left(\frac{\gamma T_0 p_j}{c_\epsilon} - d_j \right)}, \quad a_2 = \frac{D_j \beta_j}{\frac{a}{\rho} + \frac{\gamma^2 T_0}{\rho c_\epsilon} + \frac{q_\epsilon}{\rho \beta_j} \left(\frac{\gamma T_0 p_j}{c_\epsilon} - d_j \right)}, \\ a_3 = \frac{\beta_j \beta_N u_0}{\rho} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{\rho} + \frac{\gamma^2 T_0}{\rho c_\epsilon} + \frac{q_\epsilon}{\rho \beta_j} \left(\frac{\gamma T_0 p_j}{c_\epsilon} - d_j \right) \right)^3}}. \end{aligned}$$

В качестве характерных величин длины и времени приняты соответственно

$$X = \frac{1}{\beta_j} \sqrt{\frac{a}{\rho} + \frac{\gamma^2 T_0}{\rho c_\epsilon} + \frac{q_\epsilon}{\rho \beta_j} \left(\frac{\gamma T_0 p_j}{c_\epsilon} - d_j \right)}, \quad T = \frac{1}{\beta_j}.$$

В уравнении (6) диссипативные слагаемые (производные третьего порядка) обусловлены наличием дефектов в среде, дисперсионные (производные четвертого порядка) – диффузионными процессами, протекающими в среде.

Полагаем, что диффузионные процессы протекают медленнее, чем процессы взаимодействия дефектов с акустической волной.

2. ЛИНЕАРИЗОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ

Отбросив нелинейную часть уравнения (6), получим уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - a_1 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) - a_2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - a_1 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) = 0, \quad (7)$$

позволяющее исследовать дисперсионные свойства термоупругих волн.

Отыскивая решение уравнения (7) в виде бегущей гармонической волны $U(z, \tau) = U_0 e^{i(\omega\tau - kz)} + \text{к.с.}$, где ω – частота, k – волновое число, к.с. – комплексно-сопряжённая величина, получаем комплексное дисперсионное уравнение

$$i\omega^3 + (1 + a_2 k^2) \omega^2 - ia_1 k^2 \omega - a_1 a_2 k^4 - k^2 = 0$$

или

$$(\omega^2 - a_1 k^2)(i\omega + a_2 k^2) = (k^2 - \omega^2), \quad (8)$$

где $k = k_1 + ik_2$ – комплексное волновое число. Действительная часть волнового числа соответствует распространению волны, а мнимая часть – затуханию волны в процессе распространения. Выделяя действительную и мнимую части в уравнении (8), приходим к следующей системе алгебраических уравнений

$$\begin{cases} (1 + a_2(k_1^2 - k_2^2))\omega^2 + 2a_1 k_1 k_2 \omega + a_1 a_2 (4k_1^2 k_2^2 - (k_1^2 - k_2^2)^2) - (k_1^2 - k_2^2) = 0 \\ \omega^3 + 2a_2 k_1 k_2 \omega^2 - a_1 (k_1^2 - k_2^2) \omega - 2k_1 k_2 (1 + 2a_1 a_2 (k_1^2 - k_2^2)) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Графики зависимостей действительной и мнимой частей волнового числа от частоты представлены на рис.1 ($a_1 > 0$, $a_2 > 0$). На рисунке изображены две пары кривых $(k_1(\omega); k_2(\omega))$. Здесь рассматриваем только те пары, у которых действительная часть волнового числа имеет положительные значения. Ветви кривой действительной части $k_1(\omega)$, имеющей наклонную асимптоту $\omega - \sqrt{a_1} k_1 = 0$, соответствует ветвь мнимой части $k_2(\omega)$ с горизонтальной нулевой асимптотой $k_2 = 0$. Оставшиеся две ветви действительной и мнимой частей волнового числа имеют разные знаки и общую нелинейную асимптоту в виде квадратичной параболы $\omega - 2a_2 k_{1,2}^2 = 0$. Ветвь мнимой части имеет отсечку

по волновому числу $k_2 = -\sqrt{\frac{1}{a_1 a_2}}$. Асимптоты здесь и далее на рисунках отмечены штриховой линией.

Зависимость коэффициента затухания от частоты $\gamma(\omega)$ изображена на рис.2.

Величина коэффициента затухания $\gamma = \frac{k_2}{k_1}$ показывает наличие (при $|\gamma| < 1$) или отсутствие (при $|\gamma| > 1$) распространяющихся волн. График имеет две ветви: ограниченную и неограниченную. Распространяющейся термоупругой волне соответствует ограниченная ветвь зависимости $\gamma(\omega)$, которой, в свою очередь,

соответствует пара ветвей $k_1(\omega)$, $k_2(\omega)$ с наклонной и горизонтальной асимптотами. Зависимость $k_1(\omega)$ не является линейной.

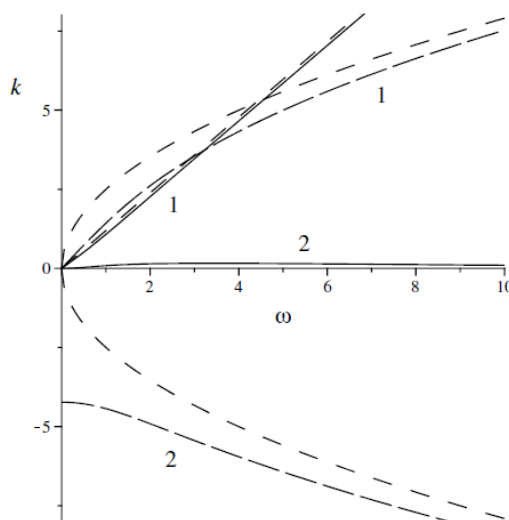


Рис.1. Зависимости $k_1(\omega)$ (1), $k_2(\omega)$ (2).

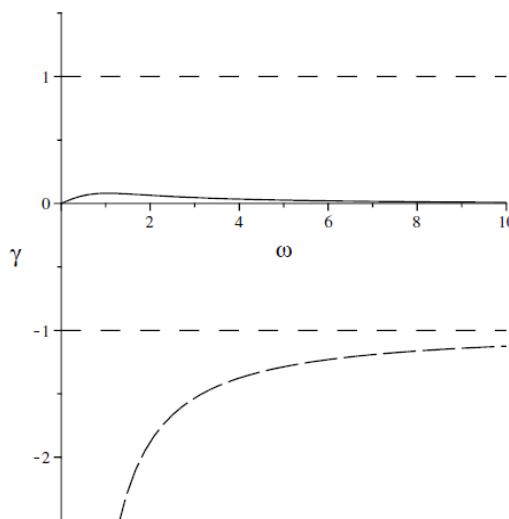


Рис.2. Зависимости $\gamma(\omega)$.

Зависимости фазовой $v_{ph} = \frac{\omega}{k_1}$ и групповой $v_{gr} = \frac{d\omega}{dk_1}$ скоростей от частоты при фиксированных значениях параметров, представленные на рис.3, показывают наличие дисперсии у распространяющейся волны. При $\omega = 0$ значения фазовой и групповой скоростей совпадают и равны единице $v_{ph} = v_{gr} = 1$. На бесконечности значения скоростей стремятся к общему значению $v_{ph} = v_{gr} = \sqrt{a_1}$ (на рисунке – штриховая линия).

Уравнение (7) содержит два положительных параметра a_1, a_2 , которые характеризуют наличие дефектов, их тип и степень диффузии в среде. Если дефектами являются вакансии, то параметр принимает значения $0 < a_1 < 1$. Если дефектами являются межузлия, то значение параметра может быть любым

в пределах полуинтервала $a_1 > 0$. В случае, когда затухание, обусловленное наличием дефектов в среде, отсутствует, значения параметров равны $a_1 = 1$, $a_2 = 0$.

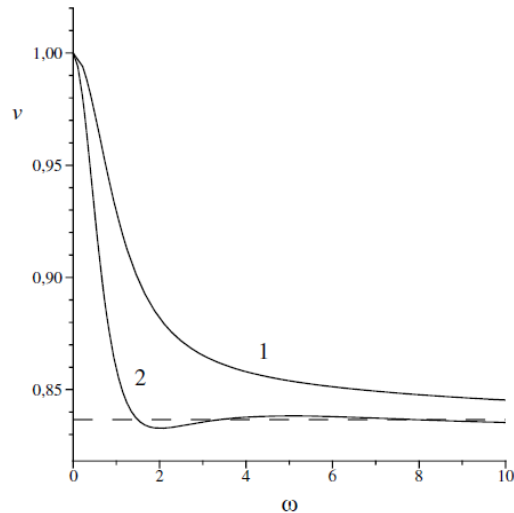


Рис.3. Зависимости $v_{ph}(\omega)$ (1), $v_{gr}(\omega)$ (2).

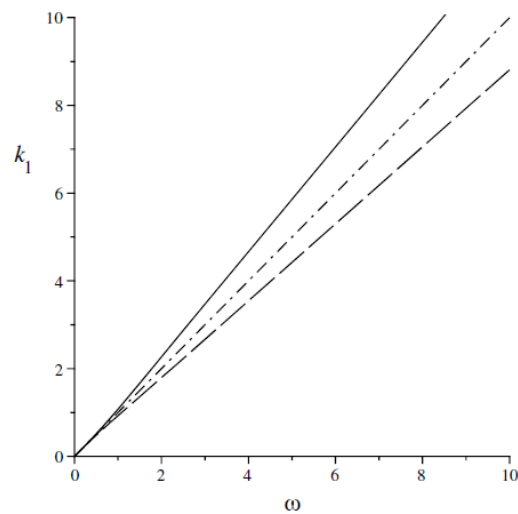


Рис.4. Зависимости $k_1(\omega)$ при различных значениях параметра a_1 ($a_2 \geq 0$): $0 < a_1 < 1$ (сплошная линия), $a_1 = 1$ (штрихпунктир), $a_1 > 1$ (длинный штрих).

Исследуем влияние этих параметров на дисперсионные кривые термоупругой волны. Расположение ветвей дисперсионных кривых зависит от значения параметра a_1 : при значениях параметра в интервале $0 < a_1 < 1$ обе ветви (действительная и мнимая) распространяющейся волны находятся в одной четверти, а при $a_1 > 1$ – в разных (рис.4,5). Штрихпунктиром на рис.4 отмечена прямая $\omega = k_1$.

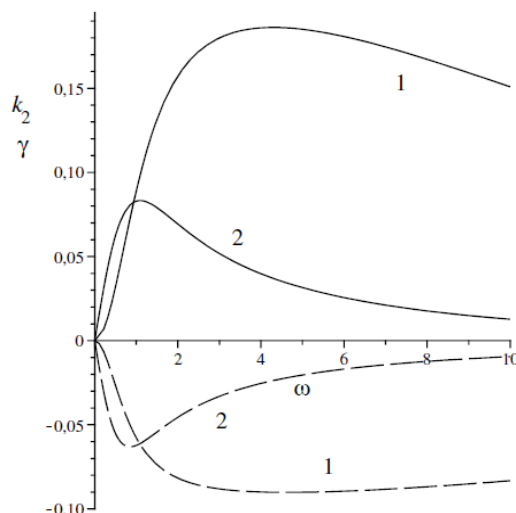


Рис.5. Зависимости $k_2(\omega)$ (1), $\gamma(\omega)$ (2) при различных значениях параметра a_1 ($a_2 > 0$): $0 < a_1 < 1$ (сплошная линия), $a_1 > 1$ (длинный штрих).

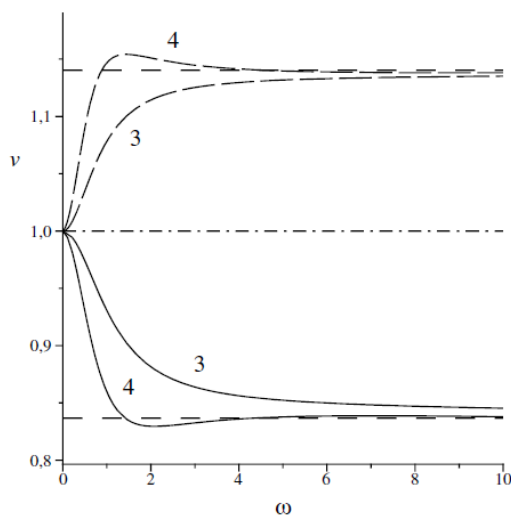


Рис.6. Зависимости $v_{ph}(\omega)$ (3), $v_{gr}(\omega)$ (4) при различных значениях параметра a_1 ($a_2 \geq 0$): $0 < a_1 < 1$ (сплошная линия), $a_1 = 1$ (штрихпунктир), $a_1 > 1$ (длинный штрих).

При увеличении значения параметра a_1 угол наклона асимптоты действительной ветви уменьшается (рис.4), амплитуда кривой коэффициента затухания сначала падает до нуля (при $a_1 = 1$) затем растет, изменив знак (рис.5). Диапазоны фазовой и групповой скоростей сокращаются до нуля, при увеличении значения параметра до единицы. Кривая фазовой скорости расположена выше кривой групповой скорости, значения скоростей ограничены сверху единицей $v_{gr} < v_{ph} < 1$. При $a_1 = 1$ значения скоростей совпадают $v_{ph} = v_{gr} = 1$. Дальнейшее увеличение значения параметра способствует росту диапазонов скоростей, при этом кривая групповой скорости расположена выше кривой фазовой скорости (рис.6), значения скоростей ограничены снизу $1 < v_{ph} < v_{gr}$.

Изменение значения параметра a_2 не влияет на асимптотическое поведение кривой $k_1(\omega)$ и влияет на поведение кривой $k_2(\omega)$, которая при $a_2 = 0$ имеет ненулевую асимптоту $k_2 = \frac{1-a_1}{2a_1\sqrt{a_1}}$. При увеличении значения параметра a_2 ($0 < a_1 < 1$): значение коэффициента затухания уменьшается во всем частотном диапазоне (рис.7); значения фазовой и групповой скоростей на низких частотах убывают, а на высоких – возрастают (рис.8). При $a_1 > 1$, наоборот, на низких частотах значения скоростей увеличиваются и на высоких уменьшаются.

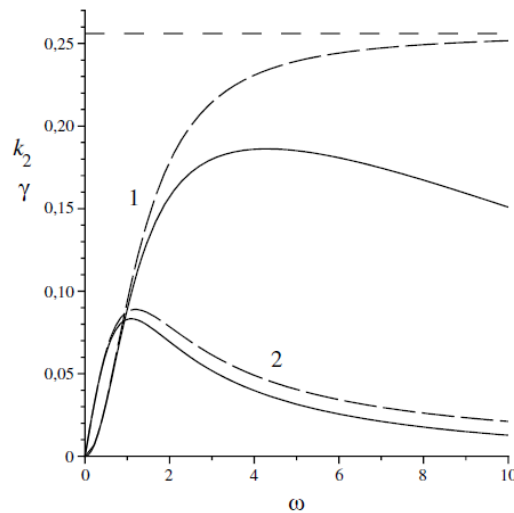


Рис.7. Зависимости $k_2(\omega)$ (1), $\gamma(\omega)$ (2) при различных значениях параметра a_2 ($0 < a_1 < 1$): $a_2 > 0$ (сплошная линия), $a_2 = 0$ (длинный штрих).

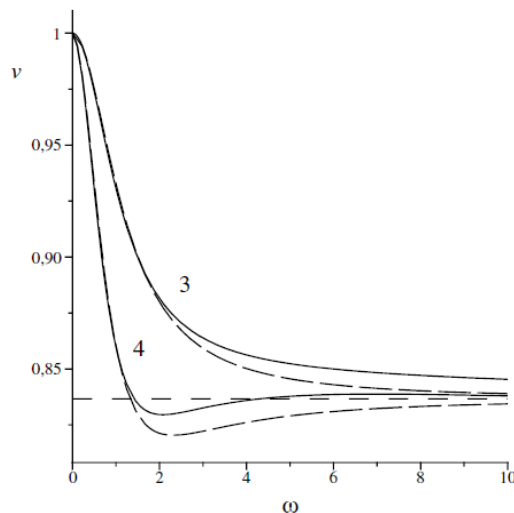


Рис.8. Зависимости $v_{ph}(\omega)$ (3), $v_{gr}(\omega)$ (4) при различных значениях параметра a_2 ($0 < a_1 < 1$): $a_2 > 0$ (сплошная линия), $a_2 = 0$ (длинный штрих).

В частном случае, при $a_2 \rightarrow 0$, система (9) принимает следующий вид

$$\begin{cases} \omega^2 + 2a_1k_1k_2\omega - (k_1^2 - k_2^2) = 0 \\ \omega^3 - a_1(k_1^2 - k_2^2)\omega - 2k_1k_2 = 0 \end{cases},$$

и позволяет найти частотные зависимости

$$k_1 = \frac{\sqrt{2}\omega}{2} \sqrt{\frac{1 + a_1\omega^2 + \sqrt{(1 + \omega^2)(1 + a_1^2\omega^2)}}{1 + a_1^2\omega^2}},$$

$$k_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{(a_1 - 1)\omega^2}{\sqrt{(1 + a_1^2\omega^2)(1 + a_1\omega^2 + \sqrt{(1 + \omega^2)(1 + a_1^2\omega^2)})}}.$$

Откуда следует, что высокочастотные возмущения не обладают дисперсией и распространяются с затуханием, которое не зависит от частоты ($k_1 = \frac{\omega}{a_1}$,

$k_2 = -\frac{(a_1 - 1)}{2a_1\sqrt{a_1}}$), низкочастотные возмущения также не обладают дисперсией,

но имеют частотно-зависимое затухание ($k_1 = \omega$, $k_2 = \frac{1 - a_1}{2}\omega^2$).

3. ЭВОЛЮЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ И СТАЦИОНАРНАЯ ВОЛНА

Перейдем в уравнении (6) в движущуюся систему координат $\xi = z - ct$, $\eta = \varepsilon t$, где c – скорость волны, заранее неизвестна, ε – малый параметр ($\varepsilon \ll 1$). Выбор переменных объясняется тем, что возмущение, распространяясь со скоростью c вдоль оси z , медленно эволюционирует во времени из-за нелинейности, дисперсии и диссипации. Считая, что в уравнении (6) все нелинейные и диссипативные слагаемые – малые величины порядка ε , получаем в первом приближении по ε эволюционное уравнение относительно функции продольной деформации $W = \frac{\partial U}{\partial \xi}$

$$\frac{\partial W}{\partial \eta} + \frac{(1 - a_1)}{2\varepsilon} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{a_2(1 - a_1)}{2\varepsilon} \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} + \frac{a_3}{2\varepsilon} \left(W \frac{\partial W}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(W \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) \right) = 0. \quad (10)$$

Из нулевого приближения найдена скорость волны $c = 1$ (измеряется в относительных единицах), которая учтена в (10). Полученное уравнение можно классифицировать как уравнение Кортевега–де Вриза–Бюргерса с дополнительным нелинейным слагаемым. В уравнении (10) последнее слагаемое является дополнительным по сравнению с классическим уравнением КдВ – Бюргерса. В уравнении (10) содержатся диссипативные и нелинейные слагаемые, следовательно, возможно уравнение имеет решение в виде ударных волн.

Среди всех возможных решений уравнения (10) наибольший интерес представляют решения из класса стационарных волн. Такие волны распространяются с постоянной скоростью и не меняют своей формы в процессе распространения. Уравнение стационарных волн имеет вид

$$\frac{dW}{d\chi} - \frac{(1 - a_1)}{2\varepsilon\nu} \frac{d^2W}{d\chi^2} - \frac{a_2(1 - a_1)}{2\varepsilon\nu} \frac{d^3W}{d\chi^3} - \frac{a_3}{2\varepsilon\nu} \left(W \frac{dW}{d\chi} - \frac{d}{d\chi} \left(W \frac{dW}{d\chi} \right) \right) = 0, \quad (11)$$

или, после интегрирования,

$$W - \frac{(1-a_1)}{2\varepsilon v} \frac{dW}{d\chi} - \frac{a_2(1-a_1)}{2\varepsilon v} \frac{d^2W}{d\chi^2} - \frac{a_3}{2\varepsilon v} \left(\frac{W^2}{2} - W \frac{dW}{d\chi} \right) = 0, \quad (12)$$

где $W = W(\chi)$, χ – бегущая координата, $\chi = \xi - v\eta$, v – скорость стационарной волны бегущей в положительном направлении координатной оси. Константу интегрирования положили равной нулю.

Решение уравнения (12) ищем методом усеченных разложений, подробно описанным в [16,17]. Метод используется для поиска точных решений нелинейных дифференциальных уравнений.

Поскольку порядок полюса общего решения равен единице, то решение уравнения (12) можно искать в виде

$$W(\chi) = b_0 Y(\chi) + b_1, \quad (13)$$

где $Y(\chi) = \sqrt{B_0} \operatorname{th}(\sqrt{B_0}\chi)$ – решение уравнения Риккати $Y'(\chi) = -Y^2(\chi) + B_0$. Подставляя решение (13) в уравнение (12) и, учитывая уравнение Риккати, получаем полином третьей степени относительно $Y(\chi)$. Приравнивая коэффициенты полинома нулю, находим неизвестные коэффициенты

$$b_0 = -\frac{2a_2}{a_3}(1-a_1), \quad b_1 = \frac{1}{a_3}(1-a_1)(1+a_2), \quad B_0 = \frac{1}{4a_2^2}(1+a_2)^2.$$

Одновременно с коэффициентами b_0, b_1, B_0 находим выражение для скорости стационарной волны

$$v = \frac{1}{2\varepsilon}(1-a_1)(1+a_2). \quad (14)$$

Только при этом значении скорости удастся найти решение уравнения (12) аналитическим методом. Решение (13) принимает вид

$$W(\chi) = \frac{1}{a_3}(1-a_1)(1+a_2) \left(1 - \operatorname{th} \left(\frac{1+a_2}{2a_2} \chi \right) \right). \quad (15)$$

График зависимости (15) представлен на рис.9. Анализ функций первой и второй производных ($W'(\chi)$ и $W''(\chi)$) показывает их четность и нечетность соответственно, что говорит о симметрии графиков функций относительно оси ординат и начала координат. График зависимости $W(\chi)$ имеет вид монотонного симметричного относительно точки перегиба кинка. Точка симметрии кинка лежит на оси ординат. Амплитуда A и ширина Δ кинка равны

$$A = \frac{2}{a_3}(1-a_1)(1+a_2), \quad \Delta = \frac{2a_2}{1+a_2}. \quad (16)$$

Фазовый портрет уравнения (12) представлен на рис.10. Решение уравнения (15) на рисунке отмечено пунктиром. Из рисунка видно, что на фазовом портрете есть два состояния равновесия. Исследование на устойчивость состояний равновесия показывает, что одно из состояний равновесия «узел», другое – «седло». Движение происходит из неустойчивого состояния равновесия «узел» (при $\chi \rightarrow -\infty$) в седловую точку (при $\chi \rightarrow +\infty$). Решение представляет собой ударную волну аналогичную стационарной ударной волне уравнения КдВ – Бюргерса [18].

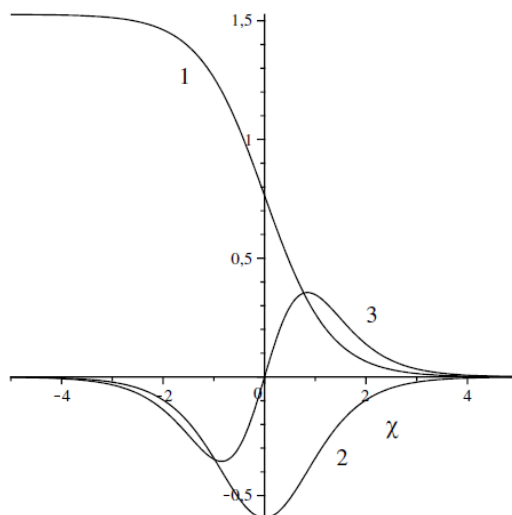


Рис.9. Зависимости $W(\chi)$ (1), $W'(\chi)$ (2), $W''(\chi)$ (3) при фиксированных значениях параметров.

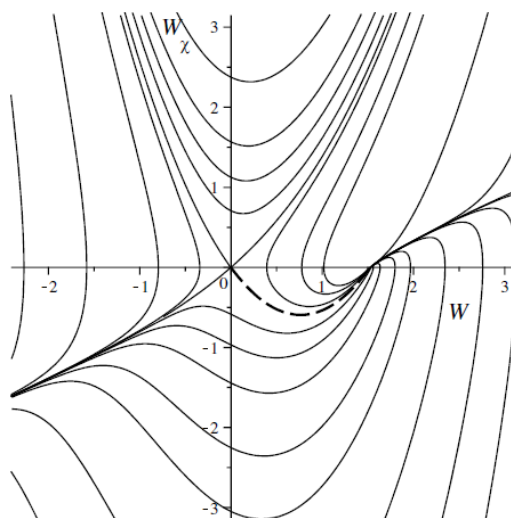


Рис.10. Фазовый портрет в плоскости (W, W') .

Присутствие в уравнении (11) дополнительного нелинейного слагаемого не приводит к появлению принципиально новых решений. Нелинейные эффекты уравновешиваются диссипативными эффектами и дисперсией в рассматриваемой среде. Наличие дополнительной нелинейности не дает качественных изменений.

Исходя из физических соображений, эволюционное уравнение (10) имеет ряд частных случаев, которые рассматривались авторами в работе [19]. Показано, что только наличие и взаимодействие двух типов нелинейностей, одна из которых вносит диссипацию в систему, делает возможным существование стационарной ударной волны.

Объединим исходные параметры задачи в следующие безразмерные комплексы

$$m_1 = \frac{q_\epsilon d_j}{a\beta_j}, \quad m_2 = \frac{q_\epsilon p_j}{\gamma\beta_j}, \quad m_3 = \frac{D_j\beta_j\rho}{a}, \quad m_4 = \frac{\beta_j\beta_N u_0}{a} \sqrt{\frac{\rho}{a}},$$

характеризующие тип дефектов, их диффузию в среде, термические свойства единицы объема среды и нелинейность системы. Безразмерные параметры a_i переписуются в виде

$$a_1 = \frac{1+T_0}{(1-m_1)+(1+m_2)T_0}, \quad a_2 = \frac{m_3}{(1-m_1)+(1+m_2)T_0},$$

$$a_3 = \frac{m_4}{((1-m_1)+(1+m_2)T_0)^{3/2}},$$

где T_0 – безразмерная величина температуры, ее характерное значение равно

$$T_* = \frac{ac_\varepsilon}{\gamma^2}.$$

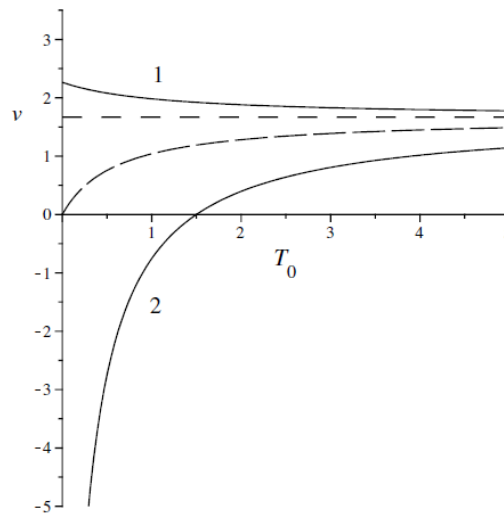


Рис.11. Зависимости $v(T_0)$ при $m_1 < 0$ (1) и $m_1 > 0$ (2).

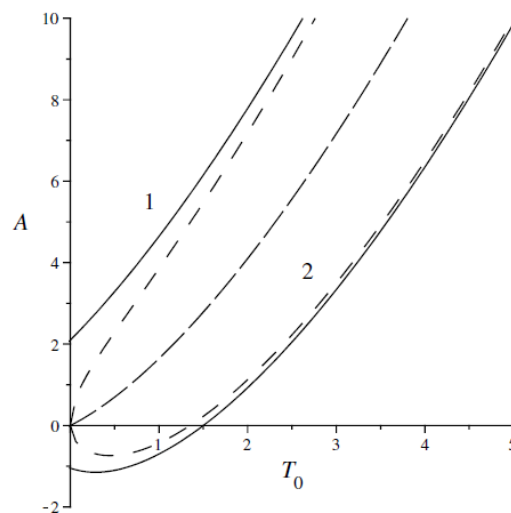


Рис.12. Зависимости $A(T_0)$ при $m_1 < 0$ (1) и $m_1 > 0$ (2).

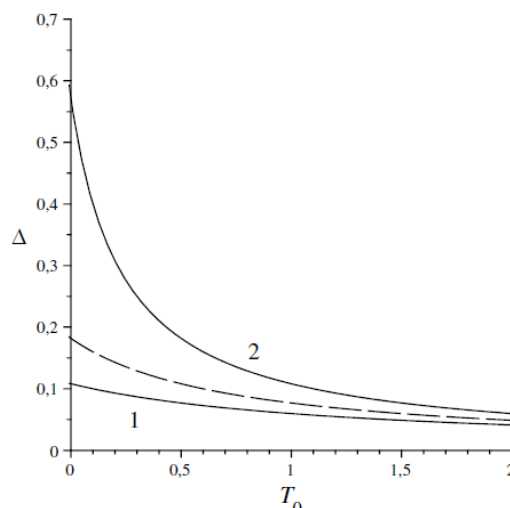


Рис.13. Зависимости $\Delta(T_0)$ при $m_1 < 0$ (1) и $m_1 > 0$ (2).

Зависимости скорости (14), амплитуды и ширины фронта (16) стационарной волны от начальной температуры изображены на рис.11-13, для сред с дефектами типов «вакансия» (1) и «межузлие» (2). На рисунках коротким штрихом отмечены асимптоты. Длинным штрихом показан предельный случай ($m_1 \rightarrow 0$), который соответствует бесконечно малым изменениям объема среды при образовании в нем одного точечного дефекта.

При увеличении величины параметра m_1 в среде с вакансиями скорость и амплитуда волны увеличиваются, а ширина фронта – уменьшается; в среде с межузлиями, наоборот, скорость и амплитуда волны уменьшаются, а ширина фронта – увеличивается.

В среде с вакансиями стационарная волна существует при любых положительных значениях температуры, а в среде с межузлиями – только при $T_0 > T_0^*$, где T_0^* – значение температуры, при котором скорость и амплитуда волны равны нулю.

При больших температурах T_0 волны в обеих средах распространяются с почти одинаковыми скоростями

$$v = \frac{m_2}{2\varepsilon(1 + m_2)}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В термоупругой среде без дефектов, в рассматриваемой постановке (отсутствие диффузии тепла в среде), гармоническая волна не обладает дисперсией, ее скорость равна единице. В среде с дефектами эта волна распространяется с дисперсией и затуханием, зависящим от частоты.

На низких частотах близких к нулю затухание волн практически отсутствует, и они распространяются с постоянной скоростью близкой к единице, которая не зависит ни от типа дефектов, ни от их наличия. На высоких частотах волны также распространяются с постоянной скоростью, но она зависит от типа дефектов.

Низкочастотные возмущения обладают ярко выраженной дисперсией, а высокочастотные распространяются без дисперсии и потерь, если в системе имеет место диффузия дефектов. Если диффузия дефектов отсутствует, то возмущения на высоких частотах имеют постоянную величину затухания.

Увеличение значения коэффициента диффузии дефектов способствует уменьшению затухания волны, а также (если дефектами являются вакансии) уменьшению скорости распространения волны на низких частотах и увеличению – на высоких частотах. В среде с дефектами типа вакансии дисперсия имеет нормальный характер, аномальная дисперсия может проявиться в среде с дефектами типа межузлия. В средах с межузлиями гармонические волны имеют большую длину и скорость, чем в средах с вакансиями.

На основе анализа точного аналитического решения эволюционного уравнения относительно смещений частиц среды показано, что вакансии и межузлия способствуют формированию стационарных ударных волн в среде.

Нелинейные волны в средах с вакансиями распространяются быстрее и имеют большую амплитуду и меньшую ширину, чем в средах с межузлиями. Увеличение начальной температуры приводит к увеличению скорости стационарной волны, если дефектами являются межузлия и уменьшению, если дефектами являются вакансии; амплитуды в обеих средах увеличиваются, а ширины фронтов – уменьшаются, формируя при этом тонкий ударный фронт.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мирзоев Ф.Х., Панченко В.Я., Шелепин Л.А. *Лазерное управление процессами в твердом теле* // Успехи физических наук. – 1996. – Т.166. – №1. – С.3-32.
2. Бурлак Г.Н., Островский И.В. *Гистерезисные акустические явления, связанные с дислокационной нелинейностью в кристаллах* // Письма в ЖТФ. – 1997. – Т.23. – №18. – С.69-74.
3. Ерофеев В.И., Ромашов В.П. *Влияние дислокаций на дисперсию и затухание ультразвука в твердом теле* // Письма в ЖТФ. – 2002. – Т.28. – №6. – С.6-11.
4. Ерофеев В.И. *Самомодуляция акустической волны в твердом теле с дислокациями* // Письма в ЖТФ. – 2008. – Т.34. – №4. – С.32-36.
5. Шекоян А.В. *Нелинейные волновые пучки в кристаллах с дислокациями* // Письма в ЖТФ. – 2009. – Т.35. – №7. – С.93-97.
6. Багдоев А.Г., Ерофеев В.И., Шекоян А.В. *Линейные и нелинейные волны в диспергирующих сплошных средах*. – М.: Физматлит, 2009. – 320 с.
7. Ерофеев В.И., Кажаяев В.В. *Нелинейная стационарная акустическая волна в твердом теле с дислокациями* // ЖТФ. – 2010. – Т.80. – №4. – С.149-151.
8. Сарафанов Г.Ф. *Коллективные и волновые эффекты в ансамбле дислокаций при пластической деформации металлов*. – Н.Новгород: Литера, 2010. – 359 с.
9. Ерофеев В.И., Мальханов А.О. *Дисперсия и самомодуляция воли, распространяющихся в твердом теле с дислокациями* // Физическая мезомеханика. – 2017. – Т.20. – №4. – С.69-76.
10. Мирзоев Ф.Х., Шелепин Л.А. *Нелинейные волны деформации и плотности дефектов в металлических пластинах при воздействии внешних потоков энергии* // ЖТФ. – 2001. – Т.71. – №8. – С.23-26.
11. Ерофеев В.И., Артамонова О.А. *Влияние точечных дефектов в материале на распространение нелинейной акустической волны* / Труды XXII Сессии

- Российского акустического общества и Научного совета по акустике РАН. – М.: ГЕОС, 2010. – Т.1. – С.159.
12. Мирзаде Ф.Х., Шелепин Л.А. *Нелинейные продольные волны с учетом взаимодействия полей деформации, температуры и неравновесных атомных дефектов* // Акустический журнал. – 2007. – Т.53. – №6. – С.766-773.
 13. Erofeev V.I., Leontieva A.V. and Malkhanov A.O. *Spatial localization of nonlinear waves spreading in materials in the presence of dislocations and point defects* / IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2017. – Vol.208. – No.012017. – Pp.1-8.
 14. Ерофеев В.И., Леонтьева А.В., Мальханов А.О. *Влияние точечных дефектов на пространственную локализацию нелинейных волн, распространяющихся в материалах* // Ученые записки физического факультета Московского университета. – 2017. – №5. – 1750907.
 15. Ерофеев В.И., Леонтьева А.В., Мальханов А.О. *Влияние дефектов на пространственную локализацию нелинейных акустических волн* // Известия РАН. Серия физическая. – 2018. – Т.82. – №5. – С.591-596.
 16. Кудряшов Н.А. *Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений*. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 360 с.
 17. Кудряшов Н.А. *Методы нелинейной математической физики: Учебное пособие*. – Долгопрудный: Интеллект, 2010. – 368 с.
 18. Кадомцев Б.Б., Карпман В.И. *Нелинейные волны* // Успехи физических наук. – 1971. – Т.103. – №2. – С.193-232.
 19. Ерофеев В.И., Леонтьева А.В., Шекоян А.В. *Ударные волны в термоупругой среде с точечными дефектами* // ЖТФ. – 2020. – Т.90 – №1. – С.26-32.

REFERENCES

1. Mirzoev F.Kh., Panchenko V.Ya., Shelepin L.A. *Laser control of processes in solids*. Physics-Uspokhi, 1996, Vol.39, No.1, Pp.1-29.
2. Burlak G.N., Ostrovskii I.V. *Acoustic hysteresis phenomena due to the dislocation nonlinearity in crystals*. Technical Physics Letters, 1997, Vol.23, No.9, Pp.725-726.
3. Erofeev V.I., Romashov V.P. *Effect of dislocations on the dispersion and damping of ultrasound in solids*. Technical Physics Letters, 2002, Vol.28, No.3, Pp.218-220.
4. Erofeev V.I. *Self-modulation of an acoustic wave in a dislocated solid*. Technical Physics Letters, 2008, Vol.34, No.2, Pp.150-152.
5. Shekoyan A.V. *Wave beams in crystals with dislocations and quadratic nonlinearity*. Technical Physics Letters, 2009, Vol.35, No.4, Pp.337-339.
6. Bagdоеv A., Erofeev V. and Shekoyan A. *Wave Dynamics of Generalized Continua*. Berlin, Heidelberg, Springer, 2016, 274 p.
7. Erofeev V.I., Kazhaev V.V. *Nonlinear stationary acoustic wave in a solid with dislocations*. Technical Physics, 2010, Vol.55, No.4, Pp.580-583.
8. Sarafanov G.F. *Kollektivnye i volnovye ehffekty v ansamble dislokatsij pri plasticheskoy deformatsii metallov [Collective and Wave Effects in a Dislocation Ensemble in the Process of Plastic Deformation of Metals]*. Nizhnij Novgorod, Litera, 2010, 359 p.

9. Erofeev V.I., Malkhanov A.O. *Dispersion and Self-Modulation of Waves Propagating in a Solid with Dislocations*. Physical Mesomechanics, 2019, Vol.22, No.3, Pp.173-180.
10. Mirzoev F., Shelepin L.A. *Nonlinear strain waves and densities of defects induced in metal plates by external energy fluxes*. Technical Physics, 2001, Vol.46, No.8, Pp.952-955.
11. Erofeev V.I., Artamonova O.A. *Vliyanie tochechnykh defektov v materiale na rasprostranenie nelinejnoj akusticheskoj volny [The effect of point defects in a material on the propagation of a nonlinear acoustic wave]*. Trudy XXII Sessii Rossijskogo akusticheskogo obshhestva i Nauchnogo soveta po akustike RAN, Moskva, GEOS, 2010, Vol.1. Pp.159.
12. Mirzade F.Kh., Shelepin L.A. *Nonlinear longitudinal waves in the presence of the interaction between the strain and temperature fields and the field of nonequilibrium atomic defects*. Acoustical Physics, 2007, Vol.53, No.6, Pp.676-682.
13. Erofeev V.I., Leontieva A.V., Malkhanov A.O. *Spatial localization of nonlinear waves spreading in materials in the presence of dislocations and point defects*. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2017, Vol.208, No.012017, Pp.1-8.
14. Erofeev V.I., Leonteva A.V., Malkhanov A.O. *Vliyanie tochechnykh defektov na prostranstvennyuyu lokalizatsiyu nelinejnykh voln, rasprostranyayushhikhsya v materialakh [Influence of point defects on spatial localisation of nonlinear waves propagating in materials]*. Uchenye zapiski fizicheskogo fakul'teta Moskovskogo universiteta, 2017, No.5, 1750907.
15. Erofeev V.I., Leonteva A.V., Malkhanov A.O. *Effect of defects on the spatial localization of nonlinear acoustic waves*. Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Phys., 2018, Vol.82, No.5, Pp.520-525.
16. Kudryashov N.A. *Analiticheskaya teoriya nelinejnykh differentsial'nykh uravnenij [Analytical theory of nonlinear differential equations]*. Moskva-Izhevsk, Institut komp'yuternykh issledovanij, 2004, 360 p.
17. Kudryashov N.A. *Metody nelinejnoj matematicheskoy fiziki: Uchebnoe posobie [Methods of nonlinear mathematical physics: Textbook]*. Dolgoprudnyj, Intellekt, 2010, 368 p.
18. Kadomtsev B.B., Karpman V.I. *Nonlinear waves*. Soviet Physics Uspekhi, 1971, Vol.14, No.1, Pp.40-60.
19. Erofeev V.I., Leonteva A.V., Shekoyan A.V. *Shock waves in a thermoelastic medium with point defects*. Technical Physics. The Russian Journal of Applied Physics, 2020, Vol.90, No.1.

Поступила в редакцию 13 ноября 2019года.

Сведения об авторах:

Ерофеев Владимир Иванович – д.ф.-м.н., проф., директор, ФГБУН Институт проблем машиностроения РАН, г. Нижний Новгород, Россия; e-mail: erof.vi@yandex.ru
 Леонтьева Анна Викторовна – к.т.н., с.н.с., Институт проблем машиностроения РАН, г. Нижний Новгород, Россия; e-mail: aleonav@mail.ru
 Шекоян Ашот Вазенович – к.ф.-м.н., с.н.с., Институт механики НАН Республики Армения, г. Ереван, Республика Армения; e-mail: ashotshek@mechins.sci.am