

УДК 539.4

DOI 10.33113/mkmk.ras.2019.25.04.543_562.07

РАСПРОСТРАНЕНИЕ МОДЕЛИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ СПЛАВОВ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ ПРИ ФАЗОВЫХ И СТРУКТУРНЫХ ПРЕВРАЩЕНИЯХ НА СЛУЧАЙ УЧЕТА РАЗВИТИЯ МАРТЕНСИТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Гаганова Н.В.

*ФГБОУ ВО Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
г. Москва, Россия*

АННОТАЦИЯ

В статье исследуется модель деформирования сплавов с памятью формы (СПФ), которая позволяет отразить особенности фазовой и структурной деформации. Модель построена с учетом того, что эффект упрочнения характерен для структурного перехода, но не проявляется при фазовых переходах. Приращение деформаций за счёт структурного перехода определяется по аналогии с теорией пластичности с изотропным упрочнением с использованием поверхности нагружения. Модель описывает как фазовый, так и структурный механизмы изменения неупругой деформации, а также влияние первого механизма на второй. Деформированное состояние определяется единым параметром, изменение которого может быть вызвано как фазовым, так и структурным переходом. Приращение неупругих деформаций, обусловленное структурным переходом в активном процессе, определяется ассоциированным законом. Формулируется дифференциальное условие активного нагружения и появления структурных деформаций, которое выражает требование сонаправленности тензора приращений структурных деформаций внешней нормали к поверхности нагружения и положительности параметра упрочнения, связанного со структурным переходом.

В статье исследуется распространение данной модели на соотношения, позволяющие учесть развитие мартенситных элементов при фазовом и структурном переходе. Показано, что модель позволяет описать процессы перекрестного упрочнения и ориентированного превращения. Рассмотрено несколько случаев пропорционального нагружения для увеличивающихся, уменьшающихся и постоянных напряжений. Для каждого случая построены графики деформаций и поверхностей нагружения в зависимости от объемной доли мартенситной фазы. Проведено сравнение результатов, полученных для разных материальных функций, определяющих соотношение между процессами зарождения и развития мартенситных элементов. В случае невозможности найти аналитические выражения для зависимости деформаций от объемной доли мартенсита, для решения дифференциальных уравнений использовался метод Рунге-Кутты. Показано, что в случае постоянных или линейно увеличивающихся напряжений результаты для рассмотренных материальных функций практически совпадают. В случае уменьшающихся напряжений значения деформаций в конце процесса оказываются выше для материальных функций, позволяющих учесть развитие мартенситных элементов.

Ключевые слова: сплавы с памятью формы; фазовые и структурные превращения; деформационное упрочнение; ориентированное превращение; поверхность нагружения; определяющие уравнения

SHAPE MEMORY ALLOYS CONSTITUTIVE MODEL EXTENTION FOR CONSIDERING DEVELOPMENT OF THE MARTENSITIC ELEMENTS DURING PHASE AND STRUCTURAL TRANSFORMATIONS

Gaganova N.V.

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

ABSTRACT

The article considers a constitutive model for shape memory alloys (SMA) which allows to take into account the differences between phase and structural transformation. The model reflects the fact that hardening effect is typical for structural transformation, but not for phase transformation. Deformation due to structural transformation is described with the use of loading surface by analogue of the plasticity theory with isotropic hardening. The model describes both phase and structural mechanisms of inelastic deformation, and influence of the first mechanism on the second. The deformed state is determined by one parameter, which can be changed by phase or structural deformation. Inelastic deformation due to structural transformation in the active process is subject to the associated flow rule. The differential condition for the active process and structural deformation is formulated. Tensor increment of the structural deformation is required to be codirectional with the external normal to the loading surface, hardening parameter associated with the structural transformation correspondingly is required to be positive.

The article considers the extension of this model to the constitutive equations that allow to take into account development of martensitic elements during phase and structural transformation. It was shown that the model allowed to describe cross-hardening and oriented transformation. Several cases of proportional loading for increasing, decreasing and constant stresses were considered. Deformation plots and loading surface plots were provided for each case. The results for the different material functions determining development of the martensitic elements were compared. If analytical solution was not possible, the Runge-Kutta method was used to solve differential equations for deformation depending on the volume fraction of martensite. It was shown that in the case of constant or linearly increasing stresses, the results for the considered material functions coincided. In the case of decreasing stresses, the deformation values at the end of the process were higher for the material functions taking into account development of the martensitic elements.

Key words: shape memory alloys, phase and structural transformations, hardening, oriented transformation, loading surface, constitutive equations.

ВВЕДЕНИЕ

В сплавах с памятью формы кроме пластического дислокационного механизма создания неупругих деформаций существует еще два механизма, связанные с термоупругими фазовыми и структурными переходами [1,2]. В процессе фазового превращения в сплавах с памятью формы (СПФ) в зависимости от нагрузки может образовываться либо хаотический, либо ориентированный мартенсит. Структура ориентированного мартенсита может быть сформирована как в результате прямого фазового превращения под нагрузкой, так и из хаотического мартенсита при структурном превращении в процессе изотермического нагружения. Деформация, приобретенная первым способом, называется фазовой, вторым способом – структурной. В [3] приводится

описание экспериментального исследования свойств фазовой и структурной деформации, в результате которого можно сделать вывод о том, что между этими компонентами есть принципиальное различие: в отличие от фазовых деформаций, для деформаций, связанных со структурным переходом и переориентацией мартенсита, характерны особенности деформационного упрочнения. Следует также учитывать, что рост фазовых деформаций, в отличие от структурных, может происходить при уменьшающихся напряжениях, а также при их отсутствии [4]. В отличие от термоупругого фазового перехода, который может быть как прямым, так и обратным, структурное превращение может вести лишь к росту степени ориентированности мартенсита.

Несмотря на различия, процессы накопления фазовых и структурных деформаций тесно связаны друг с другом, поскольку в основе обоих явлений лежит зарождение и развитие мартенситных мезоэлементов. В [5-7] описывается и исследуется явление перекрестного упрочнения: экспериментально было показано, что к деформационному упрочнению сплава с памятью формы может привести как изотермическое деформирование в мартенситном состоянии, так и прямое превращение под действием постоянного напряжения. Таким образом, радиус поверхности нагружения для структурных деформаций сплавов с памятью формы зависит от величины фазовой деформации в текущий момент времени. Эти экспериментальные данные привели к попыткам создать модель фазово-структурного деформирования СПФ, в рамках которой деформированное состояние определяется единым параметром – фазово-структурной деформацией, изменение которой может происходить и за счет фазового, и за счет структурного переходов. В [8-15] предлагались объединенные модели деформирования СПФ, однако либо в них не было учтено деформационное упрочнение [8-12], либо теория строилась полностью аналогично теории пластичности [13-15], и таким образом, не были учтены все особенности фазовой и структурной деформации.

В [16] была предложена объединенная модель фазового-структурного деформирования СПФ, в которой приращение фазовых деформаций определяется упрощенным вариантом соотношений из [10], а приращение структурных деформаций определяется по аналогии с теорией пластичности с изотропным упрочнением. При этом на поверхность нагружения влияют и структурные, и фазовые деформации, таким образом, учитываются эффекты перекрестного и неоднородного упрочнения СПФ. В рамках модели радиус поверхности нагружения может, как возрастать, так и убывать, причем изменения этого радиуса возможны даже тогда, когда точка, изображающая напряженное состояние, движется в упругой области. По аналогии с теорией пластичности, в [16] формулируется дифференциальное условие активного нагружения и появления структурных деформаций, которое выражает требование сонаправленности тензора приращений структурных деформаций внешней нормали к поверхности нагружения и положительности параметра упрочнения, связанного со структурным переходом.

В данной работе рассматривается распространение объединенной модели деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях, предложенной в [16], на случай учета развития мартенситных элементов, проводится сравнение результатов, полученных для разных материальных функций, определяющих соотношение между процессами зарождения и развития мартенситных элементов.

1. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

По аналогии с [16], приращение деформации за счет фазового перехода определяется следующими соотношениями из [3]

$$d\varepsilon_{ij}^{ph'} = \frac{3}{2} \rho_1 \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} \varphi_1(\sigma_i) (1 - qf(q)) dq + f(q) \varepsilon_{ij}^{phst'} dq, \quad dq > 0, \quad (1)$$

$$d\varepsilon_{ij}^{ph'} = \frac{\varepsilon_{ij}^{phst'}}{q} dq, \quad dq < 0, \quad (2)$$

где σ_{ij} , σ_i – тензор напряжений и его интенсивность, штрихом обозначены компоненты девиаторов, ρ_1 – материальный параметр, обозначающий предельное значение интенсивности деформаций, накапливаемых при прямом превращении, $f(q)$ – материальная функция, определяющая соотношение между процессами зарождения и развития мартенситных элементов, которая удовлетворяет ограничениям $0 \leq f(q) \leq 1/q$, $\varphi_1(\sigma_i)$ – интегральная функция распределения интенсивности микронапряжений в представительном объеме СПФ в аустенитном фазовом состоянии. Предполагается, что функция $\varphi_1(x)$ дифференцируема, $\varphi_1(x) = 0$ при $x \leq 0$, функция монотонно возрастает и асимптотически стремится к 1 при $x \rightarrow +\infty$.

В данной статье рассматриваются представления $f(q) = a_0 = const$, где $0 \leq a_0 \leq 1$, и $f(q) = 1/(q + C)$, где $C = const$, $C \geq 0$, вид функции $f(q)$ может быть определен по данным опыта на ориентированное превращение [3].

Модель развития структурных деформаций строится по аналогии с теорией пластичности с изотропным упрочнением [16]. Уравнение поверхности нагружения формулируется следующим образом

$$\rho_2 q \varphi_2(\sigma_i^*) = \int d\chi, \quad d\chi = d\chi^{ph} + d\chi^{st}, \quad (3)$$

где $d\chi^{ph} = \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} d\varepsilon_{ij}^{ph'}$; $d\chi^{st} = \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} d\varepsilon_{ij}^{st'}$. В приведенных соотношениях ρ_2 – материальный параметр, соответствующий предельной интенсивности деформаций, которая может быть накоплена при структурном переходе, $\varphi_2(x)$ – интегральная функция распределения интенсивности микронапряжений в представительном объеме СПФ в мартенситном фазовом состоянии, которая обладает теми же свойствами, что и функция $\varphi_1(x)$, χ – параметр упрочнения. Интеграл в правой части (3) вычисляется от начальной точки процесса, соответствующей полностью аустенитному ($q = 0$) недеформированному ($\varepsilon_{ij}^{phst} = 0$) состоянию СПФ. Соотношение (3) определяет текущее значение радиуса поверхности нагружения σ_i^* .

Заметим, что согласно (3) в рамках данной модели радиус поверхности нагружения может расти как за счет приращения структурных деформаций, что соответствует обычному упрочнению, так и за счет приращения фазовых деформаций, что соответствует перекрестному упрочнению.

Приращение неупругих деформаций за счет структурного перехода в активном процессе определяется ассоциированным законом

$$d\varepsilon_{ij}^{st'} = \sigma'_{ij} d\lambda, \quad d\lambda > 0. \quad (4)$$

Выполнение неравенства (4) соответствует сонаправленности тензора приращений структурных деформаций внешней нормали к поверхности нагружения и положительности параметра упрочнения $d\lambda$, связанного со структурным переходом.

Таким образом, в рассматриваемой модели для наличия структурных деформаций требуется выполнение двух условий:

1) точка, соответствующая текущему тензору напряжений, должна находиться на поверхности нагружения;

2) должно быть выполнено дифференциальное условие (4), т.е. параметр упрочнения $d\lambda$ должен быть положительным.

В случае фазово-структурного превращения ($d\lambda > 0$), дифференцируя (3) с учетом (4) можно получить выражение для $d\lambda$, верное как для прямого, так и для обратного превращения

$$d\lambda = 3/2 \frac{\rho_2 d[q\varphi_2(\sigma_i)] - \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} d\varepsilon_{ij}^{ph'}}{\sigma_i}. \quad (5)$$

В случае прямого превращения, подставляя (1) в (5), получаем соотношение

$$d\lambda = 3/2 \frac{\rho_2 d[q\varphi_2(\sigma_i)] - \rho_1 \varphi_1(\sigma_i)(1 - qf(q))dq - \frac{\sigma'_{mn}}{\sigma_i} \varepsilon_{mn}^{phst'} f(q) dq}{\sigma_i}. \quad (6)$$

Учитывая, что $\sigma_i > 0$, в случае прямого превращения дифференциальное условие активного нагружения $d\lambda > 0$ можно сформулировать в виде

$$\rho_2 d[q\varphi_2(\sigma_i)] - \rho_1 \varphi_1(\sigma_i)(1 - qf(q))dq - f(q) \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} \varepsilon_{ij}^{phst'} dq > 0. \quad (7)$$

В случае обратного превращения ($dq < 0$) дифференциальное условие активного нагружения (4), используя (5), можно сформулировать в виде

$$\rho_2 d[q\varphi_2(\sigma_i)] - \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} \frac{\varepsilon_{ij}^{phst'}}{q} dq > 0. \quad (8)$$

Для активного процесса прямого превращения и структурного перехода, когда соотношение (3) справедливо при замене σ_i^* на текущее значение интенсивности напряжений σ_i , учитывая, что $d\varepsilon_{ij}^{phst'} = d\varepsilon_{ij}^{ph'} + d\varepsilon_{ij}^{st'}$, и используя (1), (4) и (6), можно получить для фазово-структурных деформаций $d\varepsilon_{ij}^{phst'}$

$$d\varepsilon_{ij}^{phst'} = \frac{3}{2} \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} \rho_2 d[q\varphi_2(\sigma_i)] + f(q) \left(\delta_{im} \delta_{jn} - \frac{3}{2} \frac{\sigma'_{ij} \sigma'_{mn}}{\sigma_i^2} \right) \varepsilon_{mn}^{phst'} dq. \quad (9)$$

Для обратного превращения и структурного перехода аналогичным образом используя (2), (4) и (5), можно показать, что

$$d\varepsilon_{ij}^{phst'} = \frac{3}{2} \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} \rho_2 d[q\varphi_2(\sigma_i)] + \frac{1}{q} \left(\delta_{im} \delta_{jn} - \frac{3}{2} \frac{\sigma'_{ij} \sigma'_{mn}}{\sigma_i^2} \right) \varepsilon_{mn}^{phst'} dq. \quad (10)$$

2. ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ РАЗНЫХ СЛУЧАЕВ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОГО НАГРУЖЕНИЯ

2.1. Условия пропорционального нагружения.

Для иллюстрации возможностей модели рассмотрим несколько простых случаев пропорционального нагружения, аналогичных случаям, рассмотренным в [16]. Будем предполагать независимое задание изменения параметров q и σ , которого можно добиться подбором соответствующей программы изменения температуры. При пропорциональном нагружении должны соблюдаться следующие условия

$$\sigma'_{ij} = \sigma \cdot \sigma_{ij}^0, \quad \sigma_{ij}^0 = const; \quad \frac{3}{2} \sigma_{ij}^0 \sigma_{ij}^0 = 1, \quad |\sigma| = \sigma_i. \quad (11)$$

Соотношения (9) выполняются, если предположить пропорциональное изменение девиатора фазово-структурной деформации

$$\begin{aligned} \varepsilon^{phst'} &= \varepsilon \cdot \varepsilon_{ij}^0, \quad \varepsilon_{ij}^0 = const, \\ \frac{2}{3} \varepsilon_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^0 &= 1, \quad |\varepsilon| = \varepsilon_i, \quad \varepsilon_{ij}^0 = \frac{3}{2} \sigma_{ij}^0, \\ d\varepsilon_{ij}^{st} &= \varepsilon_{ij}^0 d\varepsilon^{st}; \quad d\varepsilon_{ij}^{ph} = \varepsilon_{ij}^0 d\varepsilon^{ph}; \quad d\varepsilon = d\varepsilon^{ph} + d\varepsilon^{st}. \end{aligned} \quad (12)$$

Ограничимся рассмотрением процессов, в которых знак σ не меняется, без ограничения общности будем считать, что $\sigma > 0$. В случае пропорционального активного нагружения, когда одновременно происходит прямое фазовое и структурное превращение, подстановка (12) в (9), с учетом того, что $\sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^0 = 1$, приводит к соотношению

$$\varepsilon = \rho_2 d[q\varphi_2(\sigma_i)]. \quad (13)$$

В случае пропорционального активного нагружения при обратном фазовом переходе, сопровождающимся структурными деформациями, подстановка (12) в (10) приводит к тому же соотношению (13). Таким образом, зависимость (13) справедлива для пропорционального активного нагружения, когда одновременно происходит прямое или обратное фазовое и структурное превращение для любых допустимых функций $f(q)$. Соотношение (13) является аналогом положения об активных процессах пропорционального нагружения, доказанного в [10] в рамках модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных переходах, не учитывающей явления обычного и перекрестного упрочнения СПФ.

В качестве функций распределения интенсивности микронапряжений $\varphi_1(\sigma)$ и $\varphi_2(\sigma)$ для расчетов использовались интегральные функции экспоненциального распределения и распределения Вейбулла

$$\varphi_1(\sigma) = 1 - \exp\left(-\frac{\sigma}{\sigma_{01}}\right), \quad \varphi_2(\sigma) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma}{\sigma_{01}}\right)^\alpha\right].$$

Для удобства использовались безразмерные величины

$$e_1 = \frac{\varepsilon}{\rho_1}, \quad s_1 = \frac{\sigma}{\sigma_{01}}, \quad \beta = \frac{\sigma_{02}}{\sigma_{01}}, \quad \gamma = \frac{\rho_1}{\rho_2}.$$

В [7] было показано, что для никелида титана для любых значений интенсивности напряжений отличных от нуля выполняется неравенство

$$\rho_1 \varphi_1 > \rho_2 \varphi_2. \quad (14)$$

Обеспечить выполнение (12) можно, выбрав для γ зависимость вида

$$\gamma = 1 + \exp\left(-\beta^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right),$$

предложенную в [17].

Для построения графиков использовались значения $\alpha = 5$, $\beta = 2$.

Были рассмотрены следующие материальные функции

$$f(q) = 0; \quad f(q) = a_0; \quad f(q) = 1/(q + C);$$

для построения графиков были использованы значения констант $a_0 = 0,35$ и $C = 2$, при которых неплохо описывается явление ориентированного превращения в никелиде титана.

В случае прямого фазового перехода в отсутствие структурных деформаций, (1) приводит к дифференциальному уравнению относительно деформации e_1 вида

$$\begin{aligned} de_1 &= \varphi_1(\sigma_1)(1 - f(q))dq + f(q)e_1, \\ e_1(q_0) &= e_1^0. \end{aligned} \quad (15)$$

Используя метод вариации постоянной, можно получить решение уравнения (15) в виде

$$e_1 = \exp\left(\int_{q_0}^q f(t) dt\right) * \left(e_1^0 + \int_{q_0}^q \left[\exp\left(-\int_{q_0}^t f(t) dt\right) W(q)\right] dq\right), \quad (16)$$

где $W(q) = \varphi_1(\sigma_1)(1 - f(q))$.

В случае выполнения условия активного нагружения (4) и наличия структурных деформаций верна зависимость (13). Деформации будут описываться уравнением

$$\begin{aligned} de_1 &= \frac{1}{\gamma} d[q\varphi_2(\sigma)], \\ e_1(q_0) &= e_1^0. \end{aligned} \quad (17)$$

Решение уравнения (17) описывается зависимостью

$$e_1 = e_1^0 + \frac{1}{\gamma} [q\varphi_2(\sigma(q))] - \frac{1}{\gamma} [q_0\varphi_2(\sigma(q_0))]. \quad (18)$$

В случае прямого фазового перехода дифференциальное условие активного нагружения (7) с учетом (11)-(12) принимает вид

$$\frac{1}{\gamma} \varphi_2(\sigma) dq + \frac{1}{\gamma} q\varphi_2'(\sigma) d\sigma - \varphi_1(\sigma)(1 - qf(q)) dq - f(q)e_1 dq > 0. \quad (19)$$

В случае обратного фазового перехода дифференциальное условие активного нагружения (8) с учетом (11)-(12) принимает вид

$$\frac{1}{\gamma} \varphi_2(\sigma) dq + \frac{1}{\gamma} q\varphi_2'(\sigma) d\sigma - \frac{e_1}{q} dq > 0. \quad (20)$$

Радиус поверхности течения можно найти из уравнения (3). В случае пропорционального нагружения и нулевых начальных условий получаем

$$s_1^* = \beta\varphi_2^{-1}(\gamma\varphi_1(\sigma)). \quad (21)$$

2.2. Прямое и последующее обратное превращение под действием постоянных напряжений.

Рассмотрим прямой фазовый переход – возрастание q от 0 до $q_1 \leq 1$ при постоянном значении напряжения $\sigma = \sigma_1 = const$. В данном случае дифференциальное условие активного нагружения (19) равносильно неравенству

$$\rho_1 \varphi_1(\sigma) - \rho_2 \varphi_2(\sigma) < 0.$$

Как было упомянуто выше, экспериментальные данные показывают, что это условие не выполняется [7]. В условиях отсутствия структурных деформаций для деформации e_1 верна формула (16). С учетом нулевых начальных условий, для всех функций $f(q)$ получаем зависимость деформаций от параметра фазового состава q

$$e_1 = \varphi_1(\sigma_1)q. \quad (22)$$

Для безразмерного радиуса поверхности нагружения s_1^* с учетом нулевых начальных условий, описывается формулой (21) с учетом того, что $\sigma = \sigma_1$. С учетом свойств функций φ_1 , φ_2 и неравенства (14) можно утверждать, что решение (21) существует и единственно при $\gamma \varphi_1(\sigma_1) < 1$, причем $\sigma^*(\sigma_1) > \sigma_1$ при $\sigma_1 > 0$. На первом этапе процесса радиус поверхности течения не зависит от q и остается постоянным.

Рассмотрим обратное фазовое превращение, после того, как объемная доля мартенсита достигла значения q_1 при значении напряжения $\sigma_2 < \sigma^*(\sigma_1)$. Предполагается, что в процессе изменения напряжения от σ_1 до σ_2 ни прямого, ни обратного фазового перехода не происходит, т.е. неупругая деформация не меняется. Поскольку $\sigma^*(\sigma_1) > \sigma_1$, условие активного нагружения в начале второго этапа не выполняется. Во время обратного фазового перехода радиус поверхности течения не меняется и описывается тем же соотношением (21).

Таким образом, в случае постоянных напряжений радиус поверхности течения не зависит от постоянных C и a_0 .

2.3. Прямое превращение при возрастающем напряжении.

Рассмотрим прямое превращение, происходящее при линейно и пропорционально возрастающем от нуля при $q=0$ и до σ_{\max} при $q=1$ напряжении

$$\sigma = q\sigma_{\max}. \quad (23)$$

В начале процесса условие активного нагружения (19) не выполняется, структурные деформации отсутствуют. В условие активного нагружения входит величина e_1 , поэтому перед его анализом необходимо получить зависимость деформаций от величины q . Учитывая, что на первом этапе нагружения структурные деформации отсутствуют, деформации описываются зависимостью (16). Учитывая нулевые начальные условия ($e_1^0 = 0$, $q_0 = 0$) и подставляя (23) в (16), получаем следующие зависимости для деформаций на первом этапе нагружения

а) в случае $f(q) = 0$

$$e_1^1 = q + \frac{e^{-s_{\max}q}}{s_{\max}} - \frac{1}{s_{\max}}; \quad (24)$$

б) в случае $f(q) = a_0$

$$e_1^1 = q + \frac{s_{\max} (e^{-s_{\max}q} - e^{a_0q})}{(a_0 + s_{\max})^2} - \frac{a_0 q e^{-s_{\max}q}}{a_0 + s_{\max}}; \quad (25)$$

в) в случае $f(q) = \frac{1}{q+C}$

$$e_1^1 = q - C(q+C) \int_0^q \frac{e^{-qs_{\max}}}{(q+C)^2} dq. \quad (26)$$

Интеграл в (26) не выражается через элементарные функции и находился для рассматриваемого случая численно в процессе решения дифференциального уравнения (15) методом Рунге-Кутты.

Подставляя выражения для фазовых деформаций на первом этапе нагружения (23-25) в (21), можно найти радиус поверхности нагружения s_1^* на первом этапе нагружения.

На рис.1. приведены графики зависимостей радиуса поверхности нагружения s_1^* от параметра фазового состава q .

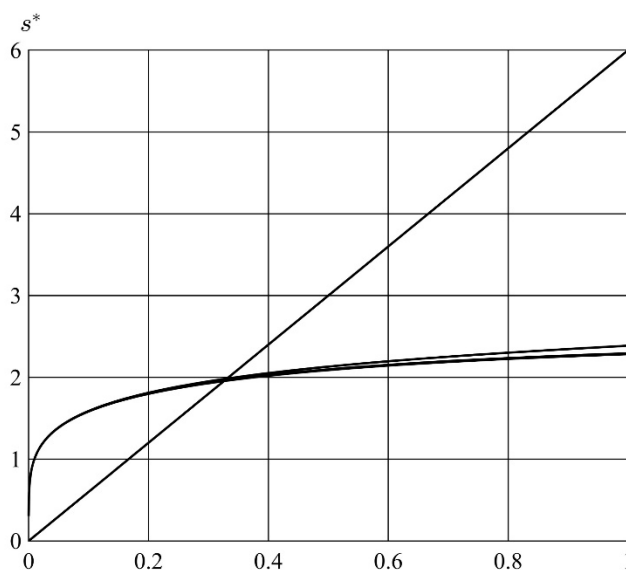


Рис.1. Зависимость радиуса поверхности нагружения от параметра фазового состава q (кривые до точек пересечения и прямые после) в случае прямого превращения под действием линейно возрастающего напряжения для $s_1 = 6$.

Прямая линия представляет собой график действующего напряжения. Верхняя кривая соответствует случаю $f(q) = 0$ ($a_0 = 0$), нижние кривые соответствуют случаям $f(q) = a_0$, $a_0 = 0.35$ и $f(q) = \frac{1}{q+C}$, $C = 2$

($s_{\max} = 6$, $\sigma_{\max} = 6 \cdot \sigma_{01} = 4 \cdot \sigma_{02}$). Видно, что разница между кривыми, соответствующими случаям $f(q) = 0.35$ и $f(q) = \frac{1}{q+2}$, крайне мала.

В таблице 1 представлены значения параметра фазового состава q^* , при достижении которого начнет выполняться условие $s_1 > s^*$ для рассматриваемых видов функции $f(q)$.

Таблица 1.

$f(q)$	q^*
$f(q) = 0$	0.3307
$f(q) = a_0 = 0.35$	0.3269
$f(q) = \frac{1}{q+C} = \frac{1}{q+2}$	0.3258

Учитывая, что в процессе прямого превращения $dq > 0$, а также что для рассматриваемого процесса $\sigma'(q) = s_{\max}$, условие (19) можно переписать в виде

$$\frac{1}{\gamma} \varphi_2(s_{\max} q) + \frac{1}{\gamma} q \alpha \left[\frac{s_{\max}}{\beta} \right]^\alpha q^\alpha \exp \left[- \left(\frac{s_{\max} q}{\beta} \right)^\alpha \right] - \varphi_1(\sigma s_{\max} q) (1 - q f(q)) - f(q) e_1 > 0. \quad (27)$$

Используя полученные выше выражения для фазовых деформаций e_1 , определим координату q_1 , при достижении которой начинает выполняться условие (27). Значения q_1 для всех рассмотренных случаев представлены в таблице 2.

Таблица 2.

$f(q)$	q_1
$f(q) = 0$	0.2303
$f(q) = a_0 = 0.35$	0.2283
$f(q) = \frac{1}{q+C} = \frac{1}{q+2}$	0.2278

Во всех рассмотренных случаях $q_1 < q^*$. При достижении значения q^* будут выполняться оба условия активного нагружения: действующее напряжение достигло значения текущего радиуса поверхности нагружения ($s^* = s_1$) и выполнено условие (19), соответствующее дифференциальному условию нагружения $d\lambda > 0$. Следовательно, после достижения значения q^* появятся структурные деформации, радиус поверхности течения будет равен действующему напряжению.

При $q > q^*$ деформации будут описываться зависимостью (18)

$$e_1^2 = e_1^1(q^*) + \frac{1}{\gamma} [q\varphi_2(\sigma(q))] - \frac{1}{\gamma} [q^* \varphi_2(\sigma_{\max} q^*)]. \tag{28}$$

При учете развития мартенситных элементов, в случае $f(q) \neq 0$, после начала структурного превращения необходим учет структурных деформаций в условии активного нагружения (19) при проверке выполнения условий структурного перехода. Для наглядности рассмотрим функцию

$$F_\lambda(q) = \frac{1}{\gamma} \varphi_2(\sigma) + \frac{1}{\gamma} q\varphi_2'(\sigma)\sigma'(q) - \varphi_1(\sigma)(1 - qf(q)) - f(q)e_1,$$

которая представляет собой левую часть неравенства (19). Используя найденные зависимости деформаций от параметра фазового состава q на втором этапе нагружения (28), можно построить графики $F_\lambda(q)$ для каждого из рассмотренных видов $f(q)$, которые представлены на рис.2.

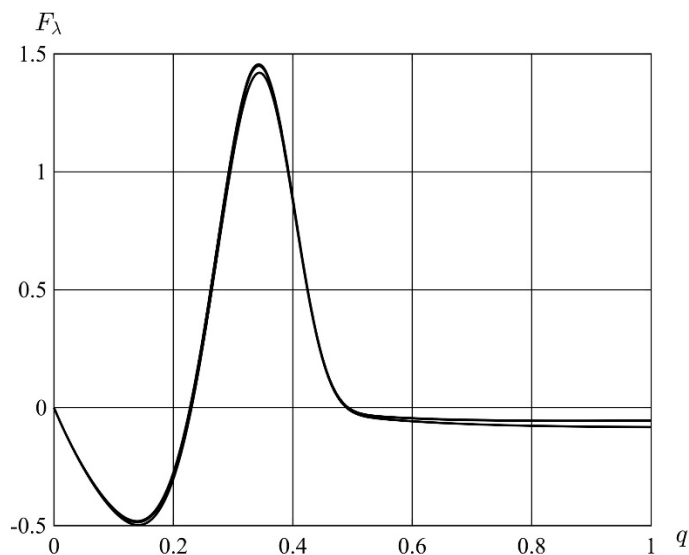


Рис.2. График зависимости F_λ от параметра фазового состава q в случае прямого фазового и структурного перехода под действием линейно возрастающего напряжения для $s_1 = 6$.

Для достаточно больших значений напряжений по графику видно, что при достижении некоторого значения q_2^{ph} перестает выполняться условие $d\lambda > 0$ и, как следствие, прекращается структурное превращение. Значения q_2^{ph} для рассмотренных видов $f(q)$ представлены в таблице 3.

Таблица 3.

$f(q)$	q_2^{ph}
$f(q) = 0$	0.4899
$f(q) = a_0 = 0.35$	0.4928
$f(q) = \frac{1}{q+C} = \frac{1}{q+2}$	0.4932

На третьем этапе нагружения при $q > q_2^{ph}$ дифференциальное условие активного нагружения (27), соответствующее условию $d\lambda > 0$, выполняться не будет. Деформации на третьем этапе нагружения описываются зависимостью (16)

а) в случае $f(q) = 0$

$$e_1^3 = e_1^2(q_2^{ph}) + q - q_2^{ph} + \frac{e^{-s_{\max}q}}{s_{\max}} - \frac{e^{-s_{\max}q_2^{ph}}}{s_{\max}};$$

б) в случае $f(q) = a_0$

$$e_1^3 = \exp(a_0(q - q_2^{ph}))e_1^2(q_2^{ph}) + q + \frac{s_{\max}e^{-s_{\max}q}}{(a_0 + s_{\max})^2} - \frac{a_0qe^{-s_{\max}q}}{a_0 + s_{\max}} - \exp(a_0(q - q_2^{ph})) \left[q_2^{ph} + \frac{s_{\max}e^{-s_{\max}q_2^{ph}}}{(a_0 + s_{\max})^2} - \frac{a_0q_2^{ph}e^{-s_{\max}q_2^{ph}}}{a_0 + s_{\max}} \right];$$

в) в случае $f(q) = \frac{1}{q+C}$

$$e_1^3 = \frac{q+C}{q_0+C} e_1^2(q_2^{ph}) + C \frac{q - q_2^{ph}}{q_2^{ph} + C} - C(q+C) \int_{q_2^{ph}}^q \frac{e^{-qs_{\max}}}{(q+C)^2} dq. \quad (29)$$

Интеграл в (29) не выражается через элементарные функции и находился для рассматриваемого случая численно в процессе решения дифференциального уравнения (15) методом Рунге-Кутты. Графики зависимости деформации e_1 от параметра фазового состава q представлены на рис.3 на всех трех этапах нагружения. Радиус поверхности нагружения после того, как значение параметра фазового состава достигнет значения q^* , будет равен действующему напряжению.

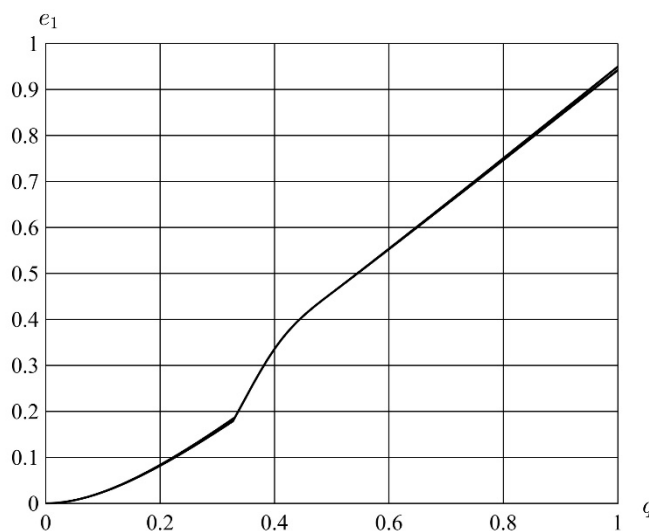


Рис.3. Зависимость деформации от q в случае прямого превращения под действием линейно возрастающего напряжения.

Видно, что в случае процесса прямого превращения при линейно-возрастающем напряжении разница между значениями деформаций для рассмотренных зависимостей крайне мала. При возрастающих напряжениях

учет развития мартенситных элементов с помощью материальных функций $f(q)$ не оказывает влияния на деформации и радиус поверхности нагружения. При увеличении значения σ_{\max} незначительная разница между значениями деформаций для рассмотренных видов $f(q)$ уменьшается. Результаты, полученные для $f(q)=0$, совпадают с результатами, полученными в [16] для модели, в которой не учитывалось развитие мартенситных элементов.

2.4. Прямое превращение при убывающем напряжении.

Результаты экспериментов показывают, что степень перекрестного упрочнения после прямого превращения под действием монотонно убывающего напряжения оказывается существенно меньше, чем после прямого превращения под действием постоянного или монотонно возрастающего в тех же пределах напряжения [6]. Это явление можно объяснить неоднородным упрочнением мартенсита, т.е. тем, что мартенситные элементы, зародившиеся при меньших напряжениях, испытывают меньшее упрочнение. В [17] предложена микромеханическая модель деформирования СПФ, учитывающая этот эффект с помощью достаточно сложного алгоритма [17]. В данном пункте исследуются возможности рассматриваемой модели для осредненного описания этого явления.

Рассмотрим прямое превращение под действие напряжения, линейно уменьшающегося с ростом q : $\sigma = \sigma_{\max}(1-q) + \sigma_{\min}q$.

В начале процесса при $q=0$ дифференциальное условие активного процесса (19) не выполняется. Деформации описываются уравнением (15).

Используя формулу (16) и переходя к переменным $s_{\max} = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{01}}$, $s_{\min} = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{01}}$, с

учетом нулевых начальных условий получаем

а) в случае $f(q)=0$

$$e_1 = q + \frac{\exp(-s_{\max})}{s_{\max} - s_{\min}} - \frac{\exp(s_{\max}(q-1) - s_{\min}q)}{s_{\max} - s_{\min}};$$

б) в случае $f(q)=a_0$

$$e_1 = q + \frac{s_{\max} - s_{\min}}{(s_{\max} - s_{\min} - a_0)^2} \exp(a_0q - s_{\max}) - \\ - \exp(s_{\max}(q-1) - s_{\min}q) \frac{s_{\max} - s_{\min}}{(s_{\max} - s_{\min} - a_0)^2} + \\ + \exp(s_{\max}(q-1) - s_{\min}q) \frac{a_0q}{s_{\max} - s_{\min} - a_0};$$

в) в случае $f(q) = \frac{1}{q+C}$

$$e_1 = q - C(q+C) \int_0^q \frac{\exp(s_{\max}(x-1) - s_{\min}x)}{(x+C)^2} dx. \quad (30)$$

Интеграл в (30) не выражается через элементарные функции и находился для рассматриваемого случая численно в процессе решения дифференциального уравнения (15) методом Рунге-Кутты.

Графики зависимости деформации e_1 от параметра фазового состава q для рассмотренных видов $f(q)$ представлены на рис.4. Нижняя кривая соответствует случаю $f(q) = 0$ ($a_0 = 0$), верхние кривые соответствуют случаям $f(q) = a_0$, $a_0 = 0.35$ и $f(q) = \frac{1}{q+C}$, $C = 2$. Все кривые соответствуют нагрузкам $s_{\min} = 0$, $s_{\max} = 2$. Видно, что несмотря на уменьшение напряжений, с ростом q деформации увеличиваются.

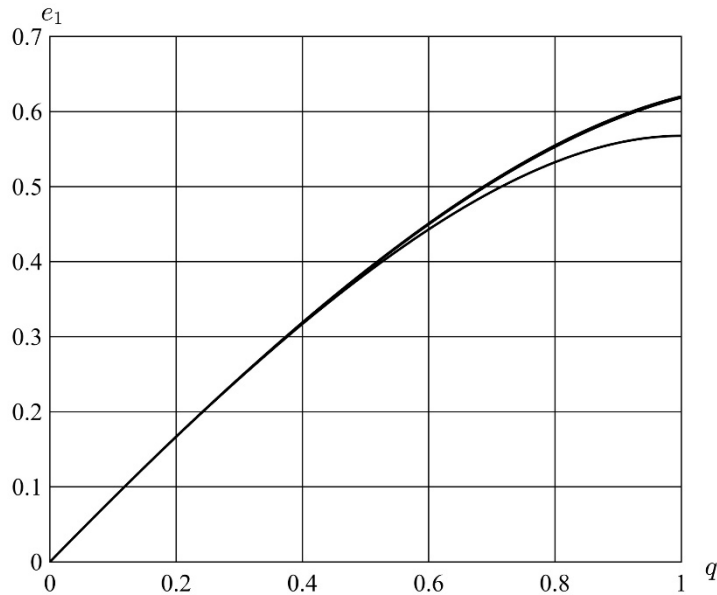


Рис.4. Зависимость деформации от q в случае прямого превращения под действием линейно убывающего напряжения.

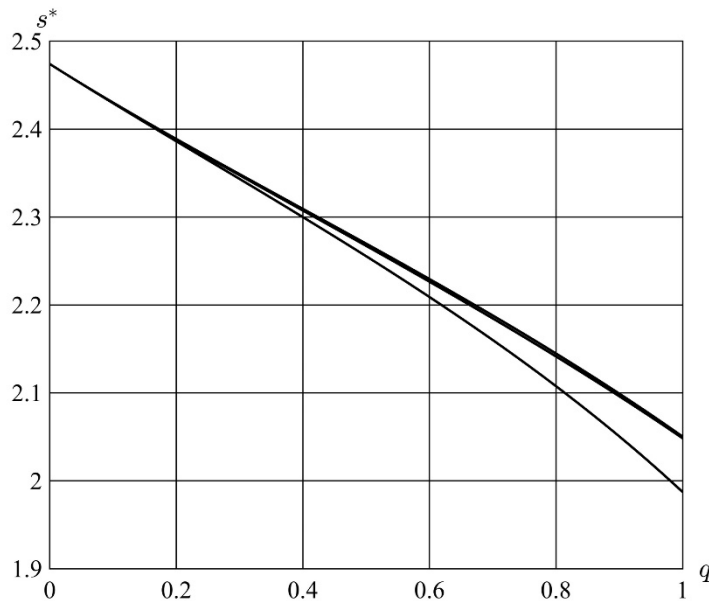


Рис5. Зависимость радиуса поверхности нагружения от параметра фазового состава q при прямом превращении под действием линейно убывающего напряжения.

Графики радиуса поверхности течения в зависимости от параметра фазового состава q приведены на рис.5. Нижняя кривая соответствует случаю $f(q) = 0$ ($a_0 = 0$), верхние кривые соответствуют случаям $f(q) = a_0$, $a_0 = 0.35$ и $f(q) = \frac{1}{q+C}$, $C = 2$. Все кривые соответствуют нагрузкам $s_{\min} = 0$, $s_{\max} = 2$. В рассмотренном примере точка, изображающая напряженное состояние, движется в упругой области, а радиус поверхности нагружения убывает. Тем самым осредненно описывается неоднородное упрочнение мартенсита, связанное с тем, что степень упрочнения мартенситных элементов, последовательно зарождающихся при убывающем напряжении, уменьшается. Результаты, полученные для $f(q) = 0$, совпадают с результатами, полученными в [16] для модели, в которой не учитывалось развитие мартенситных элементов.

2.5. Ориентированное превращение.

Рассматриваемая объединенная модель позволяет описать явление ориентированного превращения, которое состоит в продолжении роста деформаций прямого превращения после снятия напряжения и объясняется тем, что ориентация мартенситного мезоэлемента определяется в момент его зарождения и не меняется в процессе роста, если напряжения не выходят за пределы поверхности нагружения [3,4].

Для иллюстрации рассмотрим двухэтапный процесс нагружения. Пусть на первом этапе процесса происходит прямое фазовое превращение – возрастание q от 0 до некоторого промежуточного значения $q_1 \leq 1$ при постоянном значении напряжения $\sigma = \sigma_1 = const$. В разделе 2.2 было показано, что в этих условиях структурные деформации отсутствуют, а деформации и радиус поверхности нагружения описываются формулами (21)-(22), при этом радиус поверхности нагружения не изменяется.

Пусть на втором этапе процесса напряжения отсутствуют, $\sigma = 0$. В этих условиях структурные деформации отсутствуют, поскольку не выполняются условия активного нагружения. Используя (16), получаем следующие выражения для деформаций

а) в случае $f(q) = 0$

$$e_1 = \varphi_1(\sigma_1)q_1;$$

б) в случае $f(q) = a_0$

$$e_1 = \varphi_1(\sigma_1)q_1 e^{a_0(q-q_1)};$$

в) в случае $f(q) = \frac{1}{C+q}$

$$e_1 = \varphi_1(\sigma_1)q_1 \frac{C+q}{C+q_1}.$$

Графики зависимости деформаций от параметра фазового состава q представлены на рис.6. Для построения графиков были выбраны значения $q_1 = 0.5$, $\sigma = 2 \cdot \sigma_{01}$. Верхние кривые на рис.6 соответствуют случаям $f(q) = 0.35$ и $f(q) = 1/(2+q)$, кривые для этих случаев практически совпадают. Видно,

что после снятия напряжений при $q = q_1$, деформации продолжают расти, но с меньшей скоростью. Для сравнения приведен график для случая $f(q) = 0$, которому после того, как параметр фазового состава достигнет значения q_1 , соответствует горизонтальная линия. Видно, что на первом этапе нагружения графики деформаций для разных видов $f(q)$ практически совпадают.

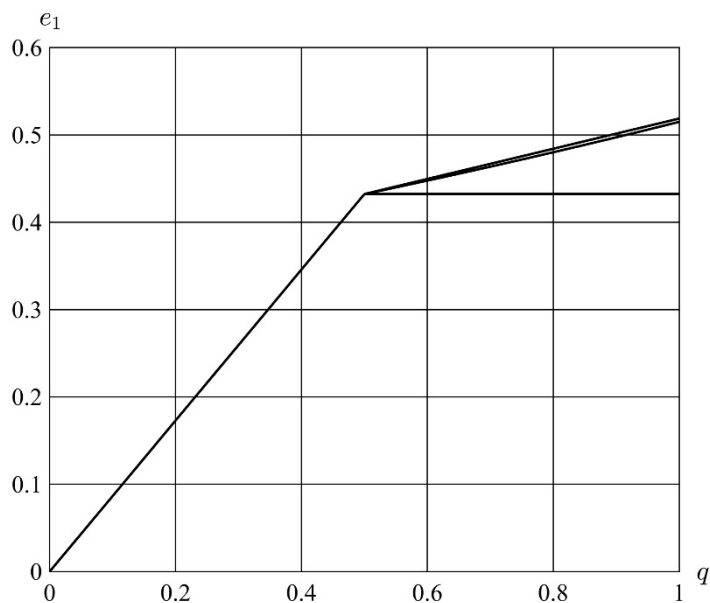


Рис.6. Зависимость деформаций e_1 от параметра фазового состава q в случае ориентированного превращения, $s_1 = 2$, $q_1 = 0.5$.

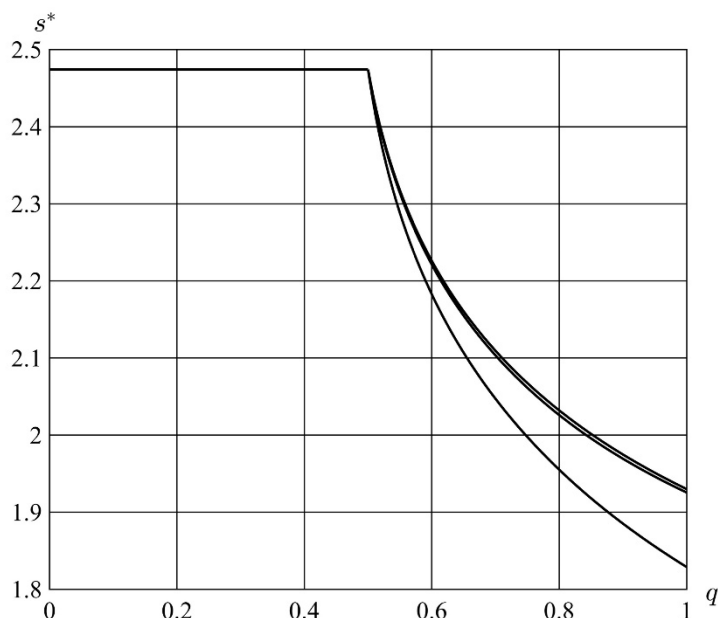


Рис.7. Зависимость радиуса поверхности нагружения s^* от параметра фазового состава q в случае ориентированного превращения, $s_1 = 2$, $q_1 = 0.5$.

На рис.7 показано изменение радиуса поверхности нагружения s^* в зависимости от параметра фазового состава q . Видно, что на первом этапе

нагружения графики для разных функций $f(q)$ совпадают и представляют собой горизонтальную линию, поскольку при постоянных напряжениях на первом этапе нагружения радиус поверхности нагружения не изменяются. После снятия нагрузки при $q = q_1$ радиус поверхности нагружения начинает уменьшаться. На втором этапе нагружения при $q > q_1$ верхние кривые соответствуют случаям $f(q) = 0.35$ и $f(q) = 1/(2+q)$, они практически совпадают. Нижняя кривая соответствует случаю $f(q) = 0$. Видно, что при учете развития мартенситных элементов радиус поверхности нагружения убывает медленнее, чем без него в случае $f(q) = 0$. Можно заключить, что рассматриваемая модель позволяет адекватно описать процесс ориентированного превращения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлено распространение объединенной модели фазово-структурного деформирования сплавов с памятью формы, предложенной в [16], на случай учета развития мартенситных элементов. Объединенная модель описывает как фазовый, так и структурный механизмы изменения неупругой деформации, а также влияние первого механизма на второй. Распространение модели на случай учета мартенситных элементов позволяет описать процесс ориентированного превращения, который не позволяла рассмотреть объединенная модель из [16]. Рассмотрено несколько случаев пропорционального нагружения для увеличивающихся, уменьшающихся и постоянных напряжений. Проведено сравнение результатов, полученных с учетом развития мартенситных элементов, с результатами, полученными в [16] и соответствующих случаю $f(q) = 0$. Показано, что в случае постоянной или линейно увеличивающихся напряжений результаты для рассмотренных моделей практически совпадают; таким образом, учет развития мартенситных элементов в этом случае слабо влияет на значения деформаций и радиус поверхности нагружения. В случае уменьшающихся напряжений значения деформаций в конце процесса оказываются значительно выше для материальных функций, позволяющих учесть развитие мартенситных элементов. Таким образом, в случае убывающих напряжений учет развития мартенситных элементов оказывает заметное влияние на деформации и радиус поверхности нагружения, соответствующей структурному механизму деформирования. Несмотря на внешнюю схожесть с теорией пластичности с изотропным упрочнением, в рассматриваемой модели поверхность нагружения может вести себя нехарактерным для теории пластичности образом. Так, было показано, что в рамках модели радиус поверхности нагружения может как возрастать, так и убывать, в том числе при увеличении фазово-структурной деформации. Рассмотренная модель количественно и качественно правильно описывает явление ориентированного превращения, а также процессы, в которых прямое термоупругое превращение происходит при ступенчато или плавно уменьшающихся напряжениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Thamburaja P. *Constitutive equations for martensitic reorientation and detwinning in shape-memory alloys* // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2005. – Vol.53. – Pp.825-856.
2. Liu Y., Xie Z. *Detwinning in shape memory alloy* // Progress in Smart Materials and Structures. – 2007. – Chapter 3. – Pp.29-65.
3. Мовчан А.А., Казарина С.А. *Материалы с памятью формы как объект механики деформируемого твердого тела: экспериментальные исследования, определяющие соотношения, решение краевых задач* // Физическая мезомеханика. – 2012. – Т.15. – №1. – С.105-116.
4. Лихачев В.А., Патрикеев Ю.И., Щуплецов В.Н. *Эффект ориентированного превращения в никелиде титана* // ФММ. – 1986. – Т.61. – Вып.1. – С.121-126.
5. Мовчан А.А., Казарина С.А., Тант Зинг Аунг. *Аналог теории пластичности для описания деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях* // Деформация и разрушение материалов. – 2009. – №9. – С.2-6.
6. Мовчан А.А., Сильченко А.Л., Казарина С.А. *Экспериментальное исследование и теоретическое моделирование эффекта перекрестного упрочнения сплавов с памятью формы* // Деформация и разрушение материалов. – 2017. – №3. – С.20-27.
7. Мовчан А.А., Казарина С.А., Сильченко А.Л. *Эффект перекрестного упрочнения при сжатии* // Деформация и разрушение материалов. – 2019. – №4. – С.2-9.
8. Tanaka K. *A phenomenological description on thermomechanical behavior of shape memory alloys* // J. Pressure vessel technology. Trans. ASME. – 1990. – Vol.112. – No.2. – Pp.158-163.
9. Jape S., Baxevanis T., Lagoudas D.C. *On the Fracture Toughness and Stable Crack Growth in Shape Memory Alloy Actuators in the Presence of Transformation-Induced Plasticity* // International Journal of Fracture. – 2018. – Vol.209. – No.1-2. – Pp.117-130.
10. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г., Сильченко Т.Л. *Учет явления мартенситной неупругости при обратном фазовом превращении в сплавах с памятью формы* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2011. – №2. – С.44-56.
11. Hartl D.J., Lagoudas D.C., Calkins F.T. *Advanced methods for the analysis, design, and optimization of SMA- based aerostructures* // Smart Mater. Struct. – 2011. – Vol.20. – No.9. – 094006 (20pp).
12. Тихомирова К.А. *Разработка и численная реализация одномерной феноменологической модели фазовой деформации в сплавах с памятью формы* // Вычислительная механика сплошных сред. – 2016. – Т.9. – №2. – С.192-206.
13. Huang W. *Yield surface of shape memory alloys and their applications* // Acta Materialia. – 1999. – Vol.47. – No.9. – Pp.2769-2776.
14. Lexcellent Ch., Boubakar M. L., Bouvet Ch., Calloch S. *About modeling the shape memory alloy behaviour based on the phase transformation surface identification under proportional loading and anisothermal conditions* // Int. J. Solids and Struct. – 2006. – Vol.43. – No.3-4. – Pp.613-626.
15. Мишустин И.В., Мовчан А.А. *Аналог теории пластического течения для описания деформации мартенситной неупругости в сплавах с памятью формы* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2015. – №2. – С.78-95.

16. Мовчан А.А. Модель влияния фазового механизма деформирования на структурный в сплавах с памятью формы // Деформация и разрушение материалов. – 2019. – №7. – С.14-23.
17. Мишустин И.В., Мовчан А.А. Моделирование фазовых и структурных превращений в сплавах с памятью формы, происходящих под действием немонотонно меняющихся напряжений // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2014. – №1. – С.37-53.

REFERENCES

1. Thamburaja P. *Constitutive equations for martensitic reorientation and detwinning in shape-memory alloys*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2005, Vol.53, Pp.825-856.
2. Liu Y., Xie Z. *Detwinning in shape memory alloy*. Progress in Smart Materials and Structures, 2007, Chapter 3, Pp.29-65.
3. Movchan A.A., Kazarina S.A. *Shape memory materials as an object of solid state mechanics: experimental study, constitutive relations, solution of boundary value problems*. Physical mesomechanics, 2012, Vol.15, No.3-4, Pp.214-223.
4. Likhachev V.A., Patrikeyev Yu.I., Shupletsov V.N. *Ehffekt orientirovannogo prevrashheniya v nikelide titana [Oriented transformation effect in titanium nickelide]*. Fizika Metallov i Metallovedenie, 1986, Vol.61, No.1, Pp.121-126.
5. Movchan A.A., Kazarina S.A., Tant Zin Aung. *Analog teorii plastichnosti dlya opisaniya deformirovaniya splavov s pamyat'yu formy pri fazovykh i strukturnykh prevrashheniyakh [Analog of Theory of Plasticity for Describing Deformations of Shape Memory Alloys under Phase and Structure Transformations]*. Deformatsiya i razrushenie materialov, 2009, No.9, Pp.2-6.
6. Movchan A.A., Sil'chenko A.L., Kazarina S.A. *Experimental study and theoretical simulation of the cross hardening effect in shape memory alloys*. Russian Metallurgy (Metally), 2017, No.10, Pp.779-784.
7. Movchan A.A., Kazarina S.A., Silchenko A.L. *Ehffekt perekrestnogo uprochneniya pri szhatii [Effect of cross-hardening in shape memory alloy under compression]*. Deformatsiya i razrushenie materialov, 2019, No.4, Pp.2-9.
8. Tanaka K.A. *Phenomenological description on thermomechanical behavior of shape memory alloys*. J. Pressure vessel technology. Trans. ASME., 1990, Vol.112, No.2, Pp.158-163.
9. Jape S., Baxevanis T., Lagoudas D.C. *On the Fracture Toughness and Stable Crack Growth in Shape Memory Alloy Actuators in the Presence of Transformation-Induced Plasticity*. International Journal of Fracture, 2018, Vol.209, No.1-2. Pp.117-130.
10. Movchan A.A., Sil'chenko L.G., Sil'chenko T.L. *Taking Account of the Martensite Inelasticity in the Reverse Phase Transformation in Shape Memory Alloys*. Mechanics of Solids, 2011, Vol.46, No.2, Pp.194-203.
11. Hartl D.J., Lagoudas D.C., Calkins F.T. *Advanced methods for the analysis, design, and optimization of SMA- based aerostructures*. Smart Mater. Struct., 2011, Vol.20, No.9, 094006 (20pp).
12. Tikhomirova K.A. *Razrabotka i chislennaya realizatsiya odnomernoj fenomenologicheskoy modeli fazovoy deformatsii v splavakh s pamyat'yu formy [Numerical And Experimental Study Of Thermomechanical Behavior Of Glassy*

- Polymers In The Case Of Finite Deformations*]. Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred, 2016, Vol.9, No.2, Pp.192-206.
13. Huang W. *Yield surface of shape memory alloys and their applications*. Acta Materialia, 1999, Vol.47, No.9, Pp.2769-2776.
 14. Lexcelent Ch., Boubakar M.L., Bouvet Ch., Calloch S. *About modeling the shape memory alloy behaviour based on the phase transformation surface identification under proportional loading and anisothermal conditions*. Int. J. Solids and Struct., 2006, Vol.43, No.3-4, Pp.613-626.
 15. Mishustin I.V. Movchan A.A. *Analog of the plastic flow theory for describing martensitic inelastic strains in shape memory alloys*. Mechanics of Solids, 2015, Vol.50, No.2, Pp.176-190.
 16. Movchan A.A. *Model' vliyaniya fazovogo mekhanizma deformirovaniya na strukturnyj v splavakh s pamyat'yu formy [Model of the influence of phase deformation mechanism on structural deformation mechanism for shape memory alloys]*. Deformatsiya i razrushenie materialov, 2019, No.7, Pp.14-23.
 17. Mishustin I.V., Movchan A.A. *Modeling of phase and structure transformations occurring in shape memory alloys under nonmonotonically varying stresses*. Mechanics of Solids, 2014, Vol.49, No.1, Pp.27-39.

Поступила в редакцию 25 ноября 2019 года.

Сведения об авторе:

Гаганова Наталья Валерьевна – соискатель, ФГБОУ ВО Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия; e-mail: gaganova-nv@yandex.ru