

УДК 533.69

DOI 10.33113/mkmk.ras.2020.26.01.043_057.03

К РАСЧЕТУ ФЛАТТЕРА ПРЯМОГО КРЫЛА БОЛЬШОГО УДЛИНЕНИЯ В НЕСЖИМАЕМОМ ПОТОКЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕСТАЦИОНАРНОЙ АЭРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ*

Гришанина Т.В., Рыбкина Н.М.

*ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный
исследовательский университет)», г. Москва, Россия*

АННОТАЦИЯ

Рассматриваются изгибно-крутильные колебания прямого крыла большого удлинения в несжимаемом потоке идеального газа. Погонные аэродинамические нагрузки (подъемная сила и крутящий момент) определяются по нестационарной и квазистационарной теориям плоского обтекания поперечных сечений. Перемещения и углы закручивания поперечных сечений консоли крыла при изгибно-крутильных колебаниях представляются по методу Ритца в виде разложения по заданным функциям с неизвестными коэффициентами, которые рассматриваются в качестве обобщенных координат. Уравнения аэроупругих колебаний крыла составляются как уравнения Лагранжа и записываются в матричном виде как дифференциальные уравнения первого порядка. На основе полученных уравнений решается задача определения собственных значений.

Основной целью работы является сравнительный анализ расчетов по определению границы динамической устойчивости (флаттера), полученных при использовании нестационарной и квазистационарной аэродинамических теорий. Выполнены расчеты для модели крыла с постоянными характеристиками поперечных сечений. В качестве заданных функций использовались собственные формы изгибных и крутильных колебаний консольной балки постоянного поперечного сечения. Выполнены расчеты по определению границы флаттера для различного числа аппроксимирующих функций. Полученные результаты позволяют сделать вывод, что при использовании квазистационарной и уточненной квазистационарной теорий при определении аэродинамических нагрузок значения критической скорости флаттера получаются меньше, чем при расчетах по нестационарной теории. Это дает возможность для определения границ флаттера использовать более простую (с точки зрения трудоемкости) квазистационарную теорию. Также установлено, что влияние присоединенных масс воздуха, которое учитывается в нестационарной и уточненной квазистационарной теориях, весьма мало.

Ключевые слова: крыло большого удлинения; изгибно-крутильные колебания; метод Ритца; собственные колебания; флаттер

TO THE CALCULATION OF A STRAIGHT HIGH ASPECT-RATIO WING IN AN INCOMPRESSIBLE FLOW USING A NONSTATIONARY AERODYNAMIC THEORY

Grishanina T.V., Rybkina N.M.

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №18-08-00937-а.

ABSTRACT

Bending-torsional vibrations of a straight high aspect-ratio wing in an incompressible flow of an ideal gas are considered. Linear aerodynamic loads (lift and torque) are determined by non-stationary and quasi-stationary theories of cross sections flat flow. The displacements and twisting angles of the wing console cross sections during bending-torsional vibrations are represented by the Ritz method as an expansion for given functions with unknown coefficients, which are considered as generalized coordinates. The equations of aeroelastic wing oscillations are composed as Lagrange equations and written in matrix form as first-order differential equations. The problem of determining eigenvalues is solved on the basis of the obtained equations.

The main purpose of this work is to compare calculations for determining the dynamic stability boundary (flutter) obtained using non-stationary and quasi-stationary aerodynamic theories. Calculations are performed for a wing model with constant cross-section characteristics. As the set functions eigenmodes of bending and torsional vibrations of a cantilever beam of constant cross-section were used. Calculations are performed to determine the flutter boundary for a different number of approximating functions. The results obtained allow us to conclude that when using the quasi-stationary and refined quasi-stationary theories for determining aerodynamic loads, the values of the critical flutter velocity are obtained less than when calculating using the non-stationary theory. This makes it possible to use a simpler (from the point of view of labor intensity) quasi-stationary theory to determine flutter boundaries. It is also found that the influence of the attached air masses, which is taken into account in the non-stationary and refined quasi-stationary theories, is very small.

Keywords: wing of a large aspect ratio; incompressible flow; bending-torsional vibrations; Ritz method; amplitude-frequency characteristics

ВВЕДЕНИЕ

Расчету флаттера прямых крыльев большого удлинения в дозвуковом несжимаемом потоке посвящена обширная литература; здесь отметим только монографии [1-8] и учебное пособие [9]. Обычно при решении зада флаттера крыло большого удлинения рассматривается как тонкая балка (пластина), совершающая изгибно-крутильные колебания [10,11]. Нагрузки, обусловленные такими колебаниями, приводятся к распределенным по длине погонными поперечным силам и крутящим моментам, которые определяются на основе гипотезы плоского безотрывного обтекания профилей поперечных сечений крыла. Кроме того, для сравнительно медленных движений профиля не учитывается изменение по времени скосов потока на колеблющемся профиле, т.е. аэродинамическая задача для рассматриваемого момента времени решается как стационарная [1,9]. Такой подход, приводящий к весьма простым выражениям для аэродинамических нагрузок на профиль крыла, при его произвольных малых колебаниях называют квазистационарной теорией обтекания.

Для малых гармонических колебаний тонкого профиля крыла в несжимаемом потоке имеется точное аналитическое решение нестационарной задачи в комплексном виде [2-6,9,12]. Использование этого решения при расчете флаттера крыла представляет определенные вычислительные трудности, особенно для крыльев с переменной хордой, поскольку аэродинамические нагрузки трансцендентным образом зависят от безразмерной приведенной частоты, которая пропорциональна частоте колебаний и хорде профиля и обратно пропорциональна скорости потока.

Решение аэродинамической задачи для гармонических колебаний профиля при приведенной частоте, стремящейся к нулю, принимает простую

действительную форму, отличающуюся от обычного квазистационарного решения только некоторыми коэффициентами [2,7,8]. Такое асимптотическое решение для достаточно медленных колебаний крыла можно называть уточненным квазистационарным решением.

В данной работе на примере изгибно-крутильных колебаний консоли крыла постоянного поперечного сечения в несжимаемом потоке выполнены расчеты для определения границы динамической неустойчивости (флаттера) на основании нестационарной и квазистационарных (уточненной и обычной) теорий в зависимости от приведенной частоты колебаний.

1. УРАВНЕНИЯ АЭРОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ КРЫЛА

Рассмотрим консоль крыла с симметричными недеформируемыми профилями поперечных сечений с прямолинейной осью жесткости, с которой совмещается ось z , рис.1. Изгибно-крутильные колебания крыла описываются поперечными перемещениями оси $v(z,t)$ и углами закручивания поперечных сечений $\varphi(z,t)$ (рис.1), которые на основании метода Ритца будем искать в виде

$$v(z,t) = a \sum_{i=1}^s q_i(t) f_i(z); \quad \varphi(z,t) = \sum_{i=1}^s q_i(t) \varphi_i(z), \quad (1)$$

где a – некоторый характерный размер; $f_i(z)$, $\varphi_i(z)$ – заданные безразмерные функции, удовлетворяющие условиям жесткого закрепления крыла ($f_i(0) = 0$, $f_i'(0) = 0$, $\varphi_i(0) = 0$); $q_i(t)$ – обобщенные координаты, имеющие одинаковую размерность.

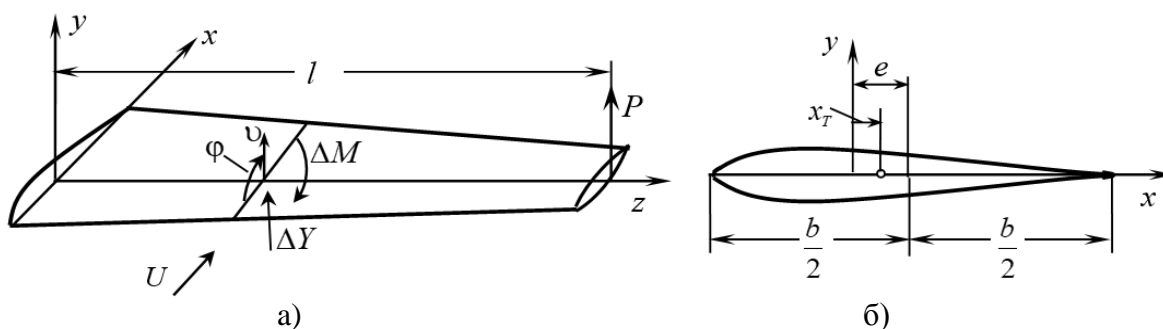


Рис.1. Модель крыла.

Уравнения изгибно-крутильных аэроупругих колебаний прямого крыла большого удлинения получим как уравнения Лагранжа в обобщенных координатах. Кинетическая и потенциальная энергии крыла и вариация работы погонных аэродинамических нагрузок ΔY , ΔM записываются в виде

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_0^l (m \dot{x}^2 + 2 J_T \dot{\varphi} \dot{\varphi}^2) \, dz, \\ \Pi &= \frac{1}{2} \int_0^l (KIJ''^2 + dz_k \varphi'^2) \, dz, \\ \delta A &= \int_0^l (\Delta M \delta \varphi + \Delta Y \delta v) \, dz. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $m(z)$, $J(z)$, $x_T(z)$ – погонная масса, погонный массовый момент инерции относительно оси z и расстояние от оси z до центра тяжести в сечении $z = \text{const}$; $EI(z)$, $GJ_k(z)$ – изгибная жесткость и жесткость свободного кручения крыла как тонкостенной балки в сечении $z = \text{const}$.

Погонные аэродинамические нагрузки (поперечные силы и крутящие моменты относительно оси z) при малых колебаниях крыла с тонкими профилями, обтекаемыми плоским безотрывным потоком идеального несжимаемого газа, в общем случае по нестационарной теории записываются в виде [9]

$$\begin{aligned} \Delta Y &= \frac{\rho b}{2} \left[g_2^* \dot{\varphi} + (g_3^* \dot{\varphi} - g_4^* \ddot{\varphi}) + g_4^* \ddot{\varphi} \right]; \\ \Delta M &= \frac{\rho b^2}{2} \left[h_1^* \dot{\varphi} + (h_2^* \dot{\varphi} - h_3^* \ddot{\varphi}) + h_3^* \ddot{\varphi} \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $b(z)$ – хорда профиля, ρ и U – плотность и скорость набегающего потока; отмеченные верхними звездочками аэродинамические коэффициенты профиля крыла определяются по формулам

$$\begin{aligned} g_2^* &= g_2 + \bar{e}g_1, & g_4^* &= g_4 + \bar{e}g_3, & h_1^* &= h_1 - \bar{e}g_1, & \bar{e}(z) &= e/b, \\ h_2^* &= h_2 - \bar{e}^2 g_1, & h_3^* &= h_3 - \bar{e}g_3, & h_4^* &= h_4 - \bar{e}^2 g_3; \end{aligned} \quad (4)$$

$e(z)$ – расстояние от оси z до середины хорды в сечении $z = \text{const}$.

Значения этих коэффициентов без звездочек, относящихся к середине хорды, которые входят в формулы (3) и (4), приведены ниже.

1) Нестационарная теория для гармонических колебаний с частотой ω

$$\begin{aligned} g_1 &= 2\pi C(k), & g_2 &= \frac{\pi}{2} C(k), & g_3 &= \frac{\pi}{2}, & g_4 &= 0, \\ h_1 &= \frac{\pi}{2} C(k), & h_2 &= \frac{\pi}{8} (C(k) - 1), & h_3 &= 0, & h_4 &= -\frac{\pi}{64}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $C(k)$ – комплексная функция Теодорсена, $k = \omega b / 2U$ – приведенная частота колебаний.

2) Уточненная квазистационарная теория, которая следует из нестационарной при $k \rightarrow 0$, $C(k) \rightarrow 1$ и пренебрежении членами с $\ddot{\varphi}$ и $\ddot{\varphi}$

$$\begin{aligned} g_1 &= 2\pi, & g_2 &= \frac{\pi}{2}, & g_3 &= \frac{\pi}{2}, & g_4 &= 0, \\ h_1 &= \frac{\pi}{2}, & h_2 &= 0, & h_3 &= 0, & h_4 &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

3) Обычная квазистационарная теория, основанная на гипотезе стационарности

$$\begin{aligned} g_1 &= 2\pi, & g_2 &= \frac{\pi}{2}, & g_3 &= 0, & g_4 &= 0, \\ h_1 &= \frac{\pi}{2}, & h_2 &= 0, & h_3 &= 0, & h_4 &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Во всех случаях (5)-(7) в силу теоремы обратимости [2,7,9] выполняются соотношения $h_1 = g_2$, $h_3 = g_4$.

Функция $C(k) = F(k) + iG(k)$ выражается через специальные функции

Ханкеля [2-6] и имеет следующую асимптотику при $k \rightarrow 0$

$$F(k) \approx 1 - \frac{\pi}{2}k, \quad G(k) \approx k \left(\ln \frac{k}{2} + 0,5772 \right).$$

Для упрощения вычислений аэродинамических коэффициентов по нестационарной теории в случае крыла с переменными поперечными сечениями, для которых $k(z) = \omega b(z)/2U$, удобно использовать достаточно точную во всем диапазоне $0 \leq k \leq \infty$ аппроксимацию А.Н. Храброва [13]

$$F(k) = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^3 \frac{a_m b_m}{b_m^2 + k^2}, \quad G(k) = -k \sum_{m=1}^3 \frac{a_m b_m}{b_m^2 + k^2}, \quad \sum_{m=1}^3 a_m = \frac{1}{2};$$

$$a_1 = 0.1149, \quad b_1 = 0.03619, \quad a_2 = 0.2915, \quad b_2 = 0.1899, \quad a_3 = 0.0936, \\ b_3 = 0.6820.$$

При использовании квазистационарной теории коэффициенты g_1, \dots и h_1, \dots определяются по формулам (6) и (7); в этих случаях они действительны и не зависят от приведенной частоты k и, соответственно, от координаты z . В общем случае при использовании нестационарной теории, аэродинамические коэффициенты для которой определяются по формулам (5), являются комплексными и зависят сложным образом от переменной приведенной частоты колебаний $k(z) = \omega b(z)/(2U)$.

Уравнения аэроупругих колебаний крыла постоянного поперечного сечения в обобщенных координатах на основании (1)-(3) записываются в виде [13]

$$\sum_{j=1}^s \left[\bar{m}_{ij} \frac{d^2 q_j}{d\tau^2} + \frac{1}{\gamma} \bar{d}_{ij} \frac{dq_j}{d\tau} + \left(\frac{1}{\psi^2} \bar{k}_{ij} + \frac{1}{\gamma} \bar{b}_{ij} \right) q_j \right] = 0, \quad (i=1, 2, \dots, s). \quad (7)$$

Эти уравнения с постоянными коэффициентами приведены к безразмерному виду, с использованием безразмерного времени $\tau = \frac{2U}{b}t$ и делением на lmU^2 .

В качестве характерного размера для относительного прогиба крыла принято $a = b/2$. Коэффициенты уравнений (7) определяются по формулам

$$\bar{m}_{ij} = \left(1 + \frac{g_3}{\gamma} \right) \mu_{ij} - 2 \left(\bar{x}_T + \frac{\bar{e}}{\gamma} g_3 \right) (v_{ij} + v_{ji}) + 4(j - h_4^*) \eta_{ij}, \quad \bar{k}_{ij} = \beta \frac{\beta_{ij}}{4} + \kappa_{ij},$$

$$\bar{d}_{ij} = g_1 \frac{\mu_{ij}}{2} - (g_2^* + g_3) v_{ij} + h_1^* v_{ji} - 2(h_2^* + h_3^*) \eta_{ij}, \quad \bar{b}_{ij} = -g_1 \frac{v_{ij}}{2} - h_1^* \eta_{ij};$$

$$\mu_{ij} = \int_0^1 f_i f_j d\xi, \quad \eta_{ij} = \int_0^1 \varphi_i \varphi_j d\xi, \quad v_{ij} = \int_0^1 f_i \varphi_j d\xi, \quad \beta_{ij} = \int_0^1 \frac{d^2 f_i}{d\xi^2} \frac{d^2 f_j}{d\xi^2} d\xi,$$

$$\kappa_{ij} = \int_0^1 \frac{d\varphi_i}{d\xi} \frac{d\varphi_j}{d\xi} d\xi.$$

Здесь введены следующие безразмерные параметры

$$\psi^2 = \frac{ml^2 U^2}{GJ_k}, \quad \beta = \frac{b^2 EI}{l^2 GJ_k}, \quad \gamma = \frac{2m}{\rho b^2}, \quad j = \frac{J}{mb^2}, \quad \bar{e} = \frac{e}{b}, \quad \bar{x}_T = \frac{x_T}{b}.$$

Коэффициенты \bar{m}_{ij} , записаны с учетом присоединенных масс воздуха,

являются действительными и симметричными ($\bar{m}_{ij} = \bar{m}_{ji}$), так как g_3 и h_4 действительны. Коэффициенты аэродинамического демпфирования \bar{d}_{ij} и аэродинамической жесткости \bar{b}_{ij} в случае использования нестационарной теории являются комплексными; при этом $h_3 = g_4 = 0$ и $h_3^* = -g_4^* = -\bar{e}g_3$.

При использовании квазистационарной теории аэродинамические коэффициенты \bar{d}_{ij} , \bar{b}_{ij} являются действительными, как и коэффициенты \bar{m}_{ij} , \bar{k}_{ij} .

2. УСЛОВИЯ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Уравнения (7) используются для определения границ статической и динамической неустойчивости (дивергенции и флаттера). Запишем эти уравнения в матричном виде

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{B})\mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (8)$$

Здесь: $\mathbf{q} = \{q_i\}$ – вектор обобщенных координат размерности s , $\mathbf{M} = [\bar{m}_{ij}]$,

$\mathbf{K} = \left\{ \frac{1}{\psi^2} \bar{k}_{ij} \right\}$, $\mathbf{D} = \left[\frac{1}{\gamma} \bar{d}_{ij} \right]$, $\mathbf{B} = \left[\frac{1}{\gamma} \bar{b}_{ij} \right]$ – квадратные матрицы.

Для удобства решения задач о собственных значениях с помощью стандартных программ из математического обеспечения для компьютеров матричное уравнение второго порядка по времени (8) приводится к матричному уравнению первого порядка. Для этого наряду с вектором обобщенных координат \mathbf{q} в качестве независимых переменных рассматриваются векторы обобщенных скоростей $\mathbf{p} = \dot{\mathbf{q}}$. Тогда для вектора фазовых координат \mathbf{r} будем иметь уравнение в пространстве состояний порядка $2s$, [9]

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{C}\mathbf{r} = \mathbf{0}, \quad (9)$$

где

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{B} + \mathbf{K} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Автономная аэроупругая система в общем случае является неконсервативной и при определенных параметрах может быть статически неустойчивой (дивергенция), а также – динамически неустойчивой (флаттер).

Для исследования устойчивости аэроупругой системы полагаем $\mathbf{r} = \mathbf{V}e^{\lambda t}$, где \mathbf{V} – неизвестный вектор-столбец порядка $2s$, а λ – неизвестное число. Получим однородное уравнение

$$[\lambda\mathbf{A} + \mathbf{C}]\mathbf{V} = \mathbf{0}, \quad (11)$$

которое представляет собой задачу для собственных значений и векторов пары действительных матриц. Так как матрица \mathbf{A} невырожденная, то уравнение (11) можно преобразовать к виду

$$[\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} + \lambda\mathbf{E}]\mathbf{V} = \mathbf{0}, \quad (12)$$

представляющему задачу для собственных значений и векторов матрицы $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$.

Собственные значения уравнений (11) и (12) могут быть действительными ($\lambda_v = \alpha_v$) и комплексными ($\lambda_v = \alpha_v + i\beta_v$, $\beta_v = \frac{\omega_v b}{2U}$). Если матрица \mathbf{C} действительная (в случае использования квазистационарной теории), то комплексные корни будут попарно комплексно-сопряженными ($\lambda_v = \alpha_v + i\beta_v$, $\bar{\lambda}_v = \alpha_v - i\beta_v$).

Для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы вещественные части α_v всех корней были отрицательны. Если имеется, по крайней мере, один корень с положительной вещественной частью, то система является неустойчивой. При $\alpha_v > 0$ и $\beta_v \neq 0$ система динамически неустойчива (флаттер), а при $\alpha_v > 0$, $\beta_v = 0$ система статически неустойчива (дивергенция). Граница устойчивости определяется из условия $\alpha = 0$: на границе флаттера $\lambda = \pm i\beta$; на границе дивергенции $\lambda = 0$. Величина $\alpha_v < 0$ характеризует запас устойчивости по v -й форме.

Критическую скорость можно определить численно, задаваясь значениями U (или безразмерного параметра $\psi = \sqrt{\frac{ml^2 U^2}{GJ_k}}$) в диапазоне $U_{\min} < U < U_{\max}$ с некоторым шагом, а также – приведенной частоты k (при использовании нестационарной теории). При этих значениях U и k из уравнения (11) или (12) с использованием стандартной программы определяются собственные значения $\lambda_v = \alpha_v + i\beta_v$. Если при очередном увеличении U при фиксированном значении k у какого-либо λ_v значение α_v меняет знак, то это означает, что в данном интервале находится критическая скорость флаттера U_ϕ . Расчеты можно начать, используя квазистационарную аэродинамическую теорию при $k = \frac{\omega b}{2U} \rightarrow 0$ (т.к. $\omega_v t = \beta_v \tau$, то $k = |\beta_v|$). Затем при уточнении U_ϕ путем деления этого интервала на более мелкие можно использовать нестационарную теорию при гармонических колебаниях с приведенной частотой $k = \beta_v$ того корня $\lambda_v = \alpha_v + i\beta_v$, у которого $\alpha_v \approx 0$. Для минимизации α_v на U и k можно использовать метод итераций.

3. ПРИМЕР РАСЧЕТА

В качестве примера рассмотрим изгибно-крутильные колебания консольно закрепленного крыла с постоянными характеристиками поперечных сечений. В качестве заданных функций в разложениях (1) будем использовать несвязанные собственные формы изгибных и крутильных колебаний консольной балки постоянного поперечного сечения

$$f_i(\xi) = A_i \left[U(\mu_i \xi) - \frac{V(\alpha_i)}{S(\alpha_i)} V(\mu_i \xi) \right], \quad \varphi_i(\xi) = 0, \quad i = 1, \dots, p; \quad (14)$$

$$f_j(\xi) = 0, \quad \varphi_j(\xi) = \frac{z_j}{l}, \quad j = p+1, \dots, s$$

где

$$U(\mu_i \xi) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} \mu_i \xi - \cos \mu_i \xi), \quad V(\mu_i \xi) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} \mu_i \xi - \sin \mu_i \xi),$$

$$S(\mu_i) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} \mu_i + \cos \mu_i); \quad A_i \left[U(\mu_i) - \frac{V^2(\mu_i)}{S(\mu_i)} \right] = 1;$$

$$\mu_i - \text{корни уравнения } \cos \mu + \frac{1}{\operatorname{ch} \mu} = 0;$$

$$\mu_1 = 1.875, \quad \mu_2 = 4.694, \quad \mu_3 = 7.855, \quad \mu_4 = 10.996, \quad \mu_5 = 14.13717;$$

$$v_i = \frac{2i-1}{2} \pi; \quad \omega_{i,\text{изг.}}^2 = \mu_i^4 \frac{EI}{ml^4}, \quad \omega_{i,\text{кр.}}^2 = v_i^2 \frac{GJ_k}{Jl^2}.$$

Для расчета были приняты следующие значения безразмерных параметров

$$\frac{l}{b} = 5; \quad \beta = 0.1; \quad \gamma = 60; \quad j = 0.05; \quad \bar{e} = 0; \quad \bar{x}_T = 0.0 \text{ и } \bar{x}_T = -0.01.$$

При расчетах, когда аэродинамическая нагрузка определялась по квазистационарной и уточненной квазистационарной теориям матрицы коэффициентов в уравнении колебаний (8) являются действительными, и следовательно, собственные значения получаются комплексно-сопряженными числами ($\lambda_k = \alpha_k \pm i\beta_k$). Если при расчетах используется нестационарная теория, то матрицы коэффициентов содержат комплексные числа и собственные значения получаются также комплексными числами; при этом они не являются комплексно-сопряженными.

В таблицах 1 и 2 приведены значения безразмерного параметра ψ , характеризующего скорость полета, и мнимые части собственных значений на границе флаттера при различном числе аппроксимирующих функций для трех вариантов определения аэродинамических коэффициентов (по формулам (5)-(7)): табл.1 для $\bar{x}_T = 0$; и табл.2 $\bar{x}_T = -0.01$. При вычислениях с использованием нестационарной теории динамическая неустойчивость (флаттер) происходит по форме, которая соответствует собственному значению с отрицательной мнимой частью. Собственные значения с отрицательной мнимой частью отмечены символом «~» $\tilde{\lambda}_k = \tilde{\alpha}_k - i\tilde{\beta}_k$.

В таблицах 3 и 4 приведены результаты расчетов по нестационарной теории с учетом присоединенных масс воздуха на нескольких шагах итерации: табл.3 для $\bar{x}_T = 0$; табл.4 для $\bar{x}_T = -0.01$. Здесь на первом шаге итерации считалось, что приведенная частота равна нулю.

Таблица 1.

Число аппроксимирующих функций (изгиб, кручение)		(2,1)	(3,2)	(4,3)	(5,4)	
Квазистационарная теория		ψ	2.9593	2.9609	2.9610	2.9610
		β_2	1.13195	1.13131	1.13127	1.13127
Уточненная квазистационарная теория	Без учета присоединенных масс воздуха	ψ	3.5184	3.5257	3.5262	3.5262
		β_2	1.02642	1.02360	1.02343	1.02342
	С учетом присоединенных масс воздуха	ψ	3.5184	3.5257	3.5262	3.5262
		β_2	0.93319	0.93098	0.93086	0.93085
Нестационарная теория	Без учета присоединенных масс воздуха	ψ	5.1452	5.1485	5.1487	5.1486
		k	0.63159	0.63111	0.63109	0.63109
		$ \tilde{\beta}_2 $	0.63159	0.63111	0.63109	0.63109
	С учетом присоединенных масс воздуха	ψ	5.1344	5.1379	5.1381	5.1381
		k	0.62784	0.62733	0.62730	0.62730
		$ \tilde{\beta}_2 $	0.62784	0.62733	0.62730	0.62730

Таблица 2.

Число аппроксимирующих функций (изгиб, кручение)		(2,1)	(3,2)	(4,3)	(5,4)	
Квазистационарная теория		ψ	3.4646	3.4787	3.4795	3.4795
		β_2	0.95049	0.94615	0.94589	0.94588
Уточненная квазистационарная теория	Без учета присоединенных масс воздуха	ψ	3.8507	3.8695	3.8706	3.8706
		β_2	0.84235	0.83757	0.83729	0.83729
	С учетом присоединенных масс воздуха	ψ	4.0532	4.0725	4.0736	4.0736
		β_2	0.79266	0.78821	0.78795	0.78795
Нестационарная теория	Без учета присоединенных масс воздуха	ψ	5.3894	5.3935	5.3938	5.3938
		k	0.59879	0.59820	0.59815	0.59815
		$ \tilde{\beta}_2 $	0.59879	0.59820	0.59815	0.59815
	С учетом присоединенных масс воздуха	ψ	5.3674	5.3721	5.3724	5.3724
		k	5.3724	0.59583	0.59578	0.59577
		$ \tilde{\beta}_2 $	0.59649	0.59583	0.59578	0.59578

Таблица 3.

Номер шага итерации	Число аппроксимирующих функций: 2+1			Число аппроксимирующих функций: 3+2		
	ψ	$k = \frac{\omega b}{2U}$	$ \beta_2 $	ψ	$k = \frac{\omega b}{2U}$	$ \beta_2 $
1	3.3387	0	0.98227	3.3464	0	0.97975
2	6.3113	0.98227	0.49120	6.3092	0.97975	0.49140
3	4.5844	0.49120	0.71358	4.5910	0.49140	0.71241
10	5.1415	0.62972	0.62684	5.1449	0.62920	0.62635
11	5.1305	0.62684	0.62839	5.1341	0.62635	0.62786
12	5.1364	0.62839	0.62756	5.1399	0.62786	0.62705

Таблица 4.

Номер шага итерации	Число аппроксимирующих функций: 2+1			Число аппроксимирующих функций: 3+2		
	ψ	$k = \frac{\omega b}{2U}$	$ \beta_2 $	ψ	$k = \frac{\omega b}{2U}$	$ \beta_2 $
1	3.9125	0	0.81989	3.9313	0	0.81529
2	6.2155	0.81989	0.50142	6.2065	0.81529	0.50225
3	4.9572	0.50142	0.65305	4.9688	0.50225	0.65128
10	5.3726	0.59773	0.59583	5.3770	0.59702	0.59520
11	5.3647	0.59583	0.59684	5.3695	0.59520	0.59616
12	5.3689	0.59684	0.59630	5.3735	0.59616	0.59565

На рис.2, 3 приведены графики изменения действительной части собственного значения $\lambda_2 = \alpha_2 + i\beta_2$ для пяти аппроксимирующих функций (3 функции, аппроксимирующие изгибные формы и 2 – крутильные): рис.2 для $\bar{x}_T = 0$; рис.3 для $\bar{x}_T = -0.01$. График 1 соответствует расчету с использованием квазистационарной теории (формулы (7)); графики 2 и 3 – уточненной квазистационарной теории (формулы (6)) без учета присоединенных масс воздуха и с учетом, соответственно; графики 4 и 5 – нестационарной теории (формулы (5)) без учета присоединенных масс воздуха и с учетом, соответственно. При вычислении по нестационарной теории значение приведенной частоты при $\bar{x}_T = 0$ бралось равным 0.627, а при $\bar{x}_T = -0.01$ – 0.595. Эти значения близки к значениям приведенных частот на границе флаттера.

На рис.4, 5 приведены графики изменения действительных и мнимых частей собственных значений $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$, полученных при расчете по уточненной квазистационарной теории для пяти аппроксимирующих функций (3 функции аппроксимирующие изгибные формы и 2 – крутильные) для $\bar{x}_T = 0$. А на рис.6 и 7 приведены аналогичные результаты расчетов для $\bar{x}_T = -0.01$.

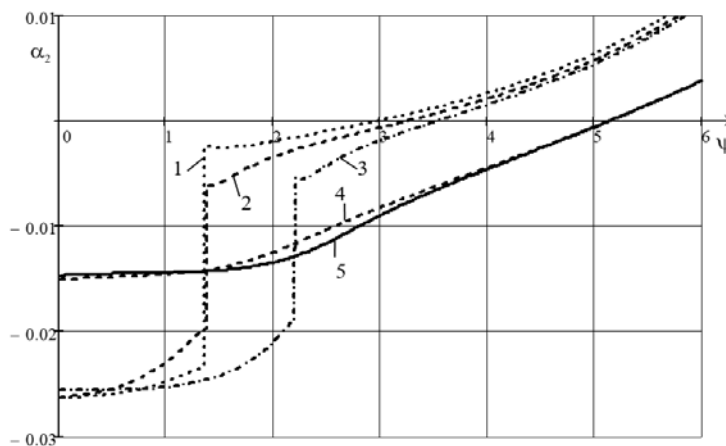


Рис.2. Графики изменения действительных частей собственного значения λ_2 , для различных вариантов вычисления аэродинамической нагрузки ($\bar{x}_7 = 0$).

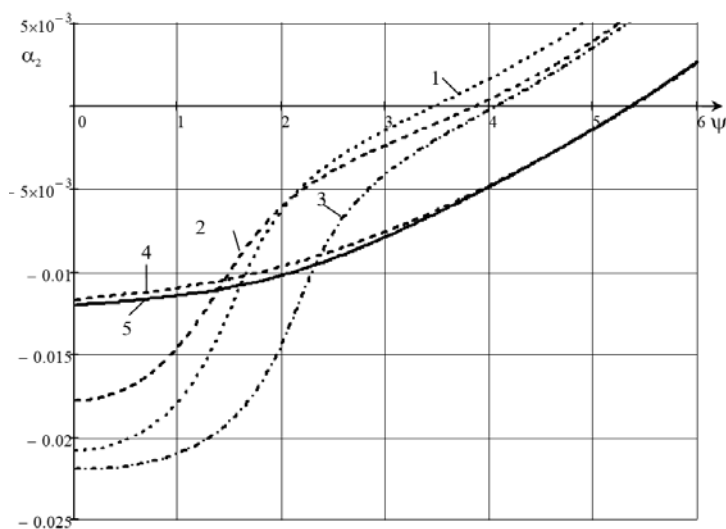


Рис.3. Графики изменения действительных частей собственного значения λ_2 , для различных вариантов вычисления аэродинамической нагрузки ($\bar{x}_7 = -0.01$)

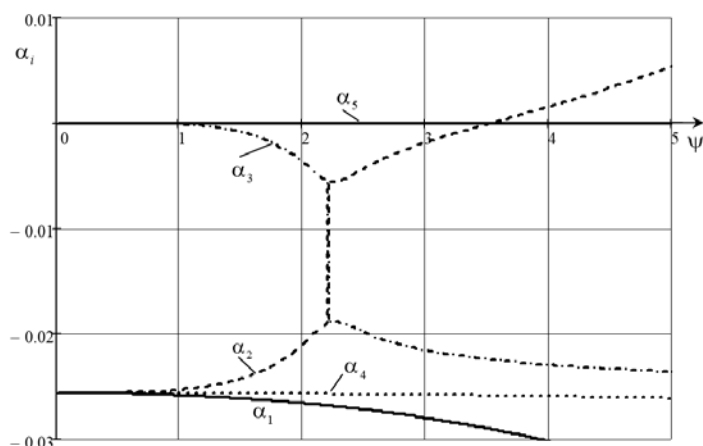


Рис.4. График изменения действительных частей собственных значений (аэродинамические нагрузки определялись по уточненной квазистационарной теории при $\bar{x}_7 = 0$).

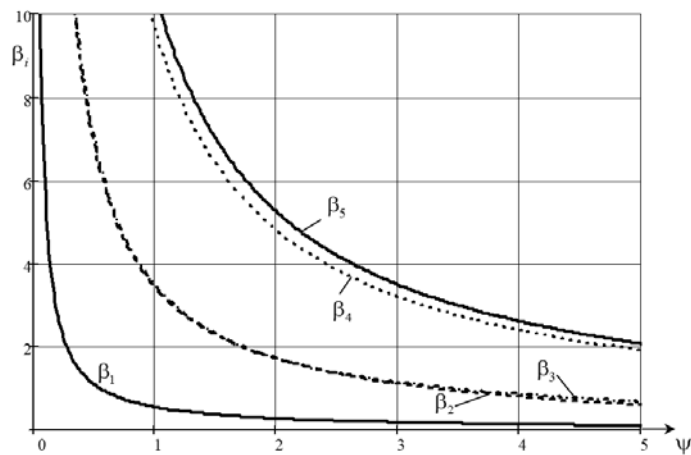


Рис.5. График изменения мнимых частей собственных значений (аэродинамические нагрузки определялись по уточненной квазистационарной при $\bar{x}_T = 0$).

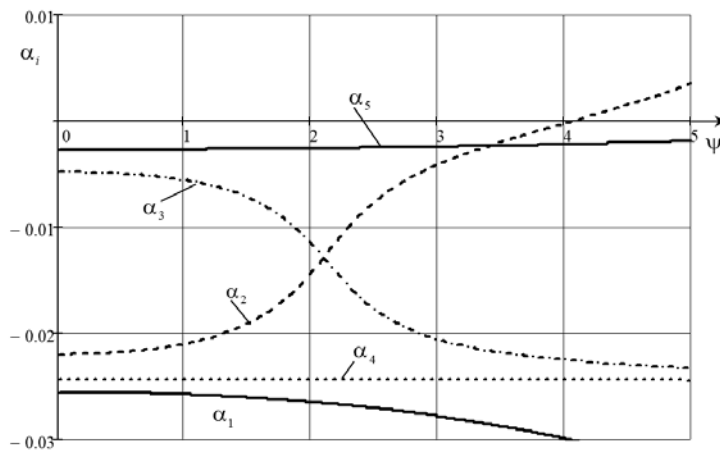


Рис.6. График изменения действительных частей собственных значений (аэродинамические нагрузки определялись по уточненной квазистационарной теории при $\bar{x}_T = -0.01$).

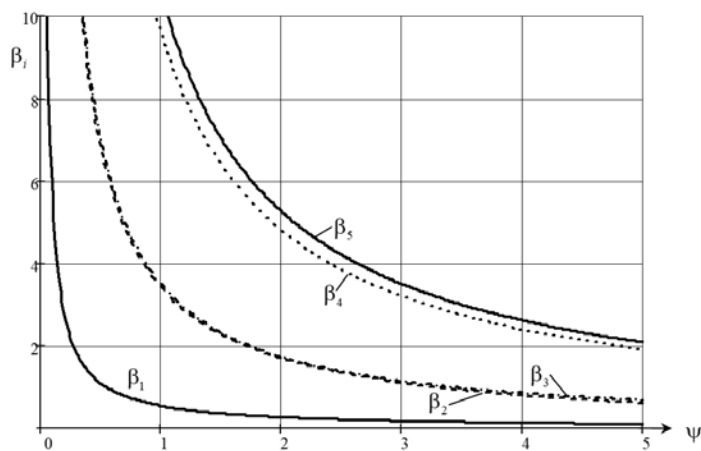


Рис.7. График изменения мнимых частей собственных значений (аэродинамические нагрузки определялись по уточненной квазистационарной при $\bar{x}_T = -0.01$).

На рис.8, 9 приведены графики изменения действительных и мнимых частей собственных значений $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$, полученных при расчете по нестационарной теории для пяти аппроксимирующих функций (2 функции, аппроксимирующие изгибные формы и 1 – крутильные): рис.8 при $\bar{x}_T = 0$, рис.9 при $\bar{x}_T = -0.01$.

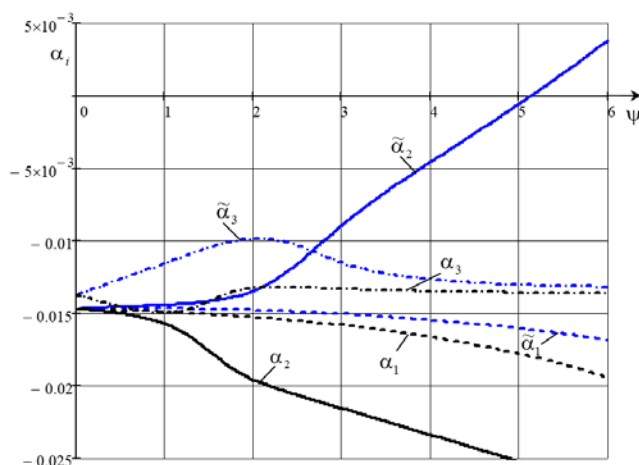


Рис.8. График изменения действительных частей собственных значений (аэродинамические нагрузки определялись по нестационарной теории при $\bar{x}_T = 0$).

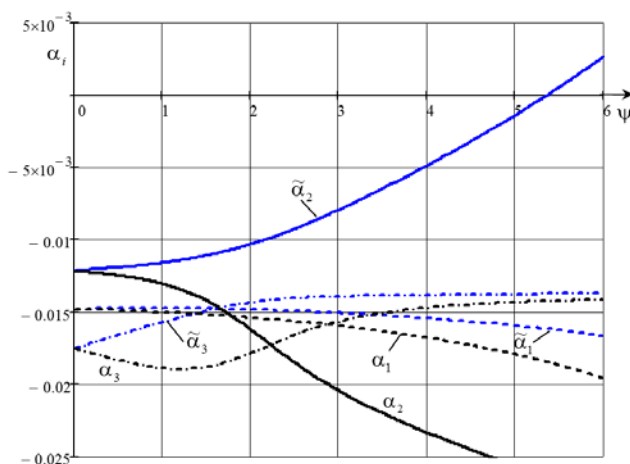


Рис.9. График изменения действительных частей собственных значений (аэродинамические нагрузки определялись по нестационарной теории при $\bar{x}_T = -0.01$).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе метода Ритца получены уравнения изгибно-крутильных колебаний прямого крыла большого удлинения постоянного поперечного сечения в несжимаемом потоке с использованием квазистационарной и нестационарной аэродинамических теорий плоского обтекания профилей крыла. Выполнены расчеты по определению границы флаттера для различного числа аппроксимирующих функций.

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что при использовании квазистационарной и уточненной квазистационарной теорий для определения

аэродинамических нагрузок, значения критической скорости флаттера получаются меньше, чем при расчетах по нестационарной теории. Также показано, что при определении границы флаттера можно не учитывать влияние присоединенных масс воздуха.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гроссман Е.П. *Курс вибраций частей самолета*. – М.: Оборонгиз, 1940. – 312 с.
2. Бисплингхофф Р.Л., Эшли Х., Халфмен Р.Л. *Аэроупругость*. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1958. – 800 с.
3. Некрасов А.И. *Теория крыла в нестационарном потоке*. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1947. – 258 с.
4. Фын Я.Ц. *Введение в теорию аэроупругости* – М.: Физматлит, 1959. – 524 с.
5. Гаррик И.Э. *Нестационарные характеристики крыла. В кн. «Аэродинамика частей самолета при больших скоростях»*. – М.: Изд-во иностр. лит., 1959. – 702 с.
6. Фершинг Г. *Основы аэроупругости*. – М.: Машиностроение, 1984. – 600 с.
7. Белоцерковский С.М., Скрипач Б.К., Табачников В.Г. *Крыло в нестационарном потоке газа*. – М.: Изд-во «Наука», Физматлит, 1971. – 768 с.
8. Белоцерковский С.М., Скрипач Б.К. *Аэродинамические производные летательного аппарата и крыла при дозвуковых скоростях*. – М.: Изд-во «Наука», Физматлит, 1975. – 424 с.
9. Шклярчук Ф.Н. *Аэроупругость самолета*. – М.: Изд-во МАИ, 1985. – 77 с.
10. Гришанина Т.В., Русских Н.М. *Аэродинамические характеристики деформируемого профиля крыла при квазистационарном обтекании // Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2018. – Т.24. – №3. – С.477-489.
11. Гришанина Т.В., Русских Н.М. *Анализ влияния нестационарности несжимаемого потока на изгибно-крутильные аэроупругие колебания крыла большого удлинения // Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2019. – Т.25. – №2. – С.207-218.
12. Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. *Неустановившиеся колебания деформируемого профиля крыла в несжимаемом потоке // Известия вузов. Авиационная техника*. – 2009. – №2. – С.3-7.
13. Храбров А.Н. *Математическое моделирование влияния схода вихрей на нестационарные аэродинамические характеристики профиля при его произвольном движении // Ученые записки ЦАГИ*. – 2002. – Т.33. – №3-4. – С.3-17.

REFERENCES

1. Grossman E.P. *Kurs vibratsij chastej samoleta [Course of vibrations of plane parts]*. Moskva, Oborongiz, 1940, 312 p.
2. Bisplinghoff R.L., Ashley H., Halfman R.L. *Aeroelasticity*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Cambridge, Mass, 1955.
3. Nekrasov A.I. *Teoriya kryla v nestatsionarnom potoke [Wing theory in a non-stationary flow]*. Moskva-Leningrad, Izdatel'stvo AN SSSR, 1947, 258 p.
4. Fung Y.C. *An Introduction to the theory of aeroelasticity*. N.-Y., John Wiley & Sons, Inc., 1959.

5. Garrik I.E. *Nestatsionarnye kharakteristiki kryla*. In: «*Aehrodinamika chastej samoleta pri bol'shikh skorostyakh*» [*Non-stationary characteristics of the wing*]. In: “*Aerodynamics of aircraft parts at high speeds*”. Moskva, Izdatel'stvo inostrannoj literatury, 1959, 702 p.
6. Försching H.W. *Grund lagen der Aeroelastic*. Springer – Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1974.
7. Belotserkovskii S.M., Skripach B.K., Tabachnikov V.G. *Krylo v nestatsionarnom potoke gaza* [*Wing in a non-stationary gas flow*]. Moskva, Izdatel'stvo «Nauka», Fizmatlit, 1971, 768 p.
8. Belotserkovskii S.M., Skripach B.K. *Aehrodinamicheskie proizvodnye letatel'nogo apparata i kryla pri dozvukovykh skorostyakh* [*Aerodynamic derivatives of an aircraft and a wing at subsonic speeds*]. Moskva, Izdatel'stvo «Nauka», Fizmatlit, 1975, 424 p.
9. Shklyarchuk F.N. *Aehrouprugost' samoleta* [*Aeroelasticity of a plane*]. Moskva Izdatel'stvo MAI, 1985, 77 p.
10. Grishanina T.V., Russkikh N.M. *Aehrodinamicheskie kharakteristiki deformiruemogo profilya kryla pri kvazistatsionarnom obtekanii* [*Aerodynamic characteristics of the deformable wing profile under quasi-stationary flow*]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2018, Vol.24, No.3, Pp.477-489.
11. Grishanina T.V., Russkikh N.M. *Analiz vliyaniya nestatsionarnosti neshhimaemogo potoka na izgibno-krutil'nye aehrouprugie kolebaniya kryla bol'shogo udlineniya* [*Analysis of the effect of unsteadiness of incompressible flow on the Flexural-torsional aeroelastic vibrations of a large elongation wing*]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2019, Vol.25, No.2, Pp.207-218.
12. Grishanina T.V., Shklyarchuk F.N. *Neustanovivshiesya kolebaniya deformiruemogo profilya kryla v neshhimaemom potoke* [*Unsteady vibrations of the deformable wing profile in an incompressible flow*]. *Izvestiya vuzov. Aviatsionnaya tekhnika*, 2009, No.2, Pp.3-7.
13. Khrabrov A.N. *Matematicheskoe modelirovanie vliyaniya skhoda vikhrej na nestatsionarnye aehrodinamicheskie kharakteristiki profilya pri ego proizvol'nom dvizhenii* [*Mathematical modeling of the effect of vortex convergence on nonstationary aerodynamic characteristics of a profile in its arbitrary motion*]. *Uchenye zapiski TSAGI*, 2002, Vol.33, No.3-4, Pp.3-17.

Поступила в редакцию 20 января 2020 года.

Сведения об авторах:

Гришанина Татьяна Витальевна – д.ф.-м.н., проф., Кафедра «Проектирование и прочность авиационно-ракетных и космических изделий» ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия; e-mail: grishaninatat@list.ru

Рыбкина Наталия Михайловна – асс., Кафедра «Проектирование и прочность авиационно-ракетных и космических изделий» ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия; e-mail: pogewe@mail.ru