

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ИЗГИБА КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ ИЗ СПЛАВА С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ

Бобок Д.И.

*ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия*

### АННОТАЦИЯ

В работе рассматривается задача механики деформируемого твердого тела об изгибе круглых жестко и шарнирно закрепленных пластин из сплава с памятью формы (СПФ), в ходе прямого термоупругого мартенситного фазового превращения под действием постоянной по величине и равномерно распределенной по радиусу поперечной нагрузки. Решена также задача о релаксации в аналогичной пластине при прямом фазовом превращении. Во второй задаче равномерно распределенная по радиусу нормальная нагрузка прикладывается к поверхности пластины в аустенитном фазовом состоянии. Далее производится охлаждение материала пластины через интервал температур прямого термоупругого мартенситного превращения. Требуется определить необходимое уменьшение в процессе такого перехода величины равномерно распределенной нагрузки, чтобы прогиб пластины оставался неизменным.

Для описания поведения материала пластины использовалась модель линейного деформирования СПФ при фазовых превращениях. Решение получено в рамках гипотез Кирхгоффа-Лява и предположении о том, что параметр фазового состава в каждый момент рассматриваемого процесса равномерно распределен по материалу пластины, что соответствует несвязанной постановке задачи для случая равномерного распределения по материалу температуры. Не учитывается возможность структурного превращения в материале пластины. Пренебрегается переменностью упругих модулей при фазовом переходе и свойством разнсопротивляемости СПФ.

Для получения аналитического решения всех уравнений краевой задачи применялся метод преобразования Лапласа по величине объемной доли мартенситной фазы. После преобразования в пространстве изображений получается эквивалентная упругая задача, решая которую, образы по Лапласу искомым величин получаются в виде аналитических выражений, включающих операторы, являющиеся образами по Лапласу от упругих постоянных. Эти выражения являются дробно-рациональными функциями образа по Лапласу от параметра фазового состава. Возвращаясь в пространство оригиналов путём аналитического разложения выражений для искомым величин в пространстве изображений на простые множители, получаются искомые аналитические решения.

**Ключевые слова:** сплавы с памятью формы; прямое превращение; релаксация; плоское напряженное состояние; круглая пластина; жесткое закрепление; шарнирное закрепление; линейная модель

## ANALYTICAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF BENDING OF A ROUND PLATE MADE OF SHAPE MEMORY ALLOY

Bobok D.I.

*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia*

## ABSTRACT

In this paper, we consider the problem of the solids mechanics about the bending of a circular plate made of a shape-memory alloy (SMA) during a direct thermoelastic martensitic phase transformation under the action of a constant in magnitude and uniformly distributed transverse load radius. The problem of relaxation in a similar plate during direct phase transformation has also been solved. As the second problem, a normal load uniformly distributed over the radius is applied to the plate surface in the austenitic phase state. Next, the plate material is cooled through the temperature range of direct thermoelastic martensitic transformation. It is required to determine how the uniformly distributed load should decrease during such a transition so that the deflection of the plate remains unchanged. During the work, rigidly and articulated plates were investigated. The solution was obtained in the framework of the Kirchhoff-Love hypotheses. To describe the behavior of the plate material, we used the well-known model of linear deformation of SMA during phase transformations. The solution was obtained under the assumption that the phase composition parameter at each moment of the process under consideration is uniformly distributed over the plate material, which corresponds to non-coupled statement of the problem for the case of uniform distribution of temperature over the material. The possibility of structural transformation in the plate material is not taken into account. It neglects the variability of the elastic moduli during the phase transition, as well as the property of the SMA diversity resistance.

To obtain an analytical solution to all the equations of the boundary value problem, the Laplace transform method with respect to martensite volume fraction parameter was used. After transformation in the space of images, an equivalent elastic problem is obtained. As a result of solving the equivalent elastic problem, the Laplace images of the desired quantities are obtained in the form of analytical expressions, which include operators that are Laplace images of elastic constants. These expressions are fractional rational functions of the Laplace image of the phase composition parameter. After returning to the original space, which is carried out analytically by decomposing the expressions for the desired quantities in the image space into simple factors, the desired analytical solutions are obtained.

**Keywords:** shape memory alloys; direct transformation; relaxation; plane stress state; round plate; rigid fastening; articulated fastening; linear model

## 1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Несмотря на то, что уникальные свойства сплавов с памятью формы (СПФ) исследуются с середины прошлого века, их активное применение в технике ограничено в связи с недостаточным развитием моделей термомеханического поведения СПФ, как на уровне определяющих соотношений, качественно и количественно правильно описывающих характерные для этих материалов свойства и явления, так и на уровне методов решения соответствующих краевых задач для элементов конструкций, содержащих эти материалы.

Различные системы определяющих соотношений для СПФ изложены в работах [1-30]. В данной работе в целях получения аналитического решения задачи изгиба пластин, используется простейшая модель линейного деформирования СПФ при фазовых превращениях, предложенная в [6-8]. В рамках данной модели пренебрегается нелинейностью зависимости приращения деформации СПФ за счет прямого фазового превращения, явлением мартенситной неупругости в СПФ, имеющим заведомо нелинейный характер, переменностью упругих модулей СПФ при фазовых переходах [31], свойством разносопротивляемости СПФ [32].

Задачи кручения для СПФ решались в работах [33-42]. Общие проблемы, связанные с решением задач изгиба для элементов из СПФ, рассматривались в [44,31]. Задачи изгиба балок из СПФ рассматривались в [45-52]. Изгиб пластинок из СПФ рассматривался в [53-54]. Для рассматриваемых в данной работе круглых пластинок из СПФ в [55-56] решены задачи устойчивости. Решению осесимметричных и центрально-симметричных задач для толстостенных сферы и цилиндра из СПФ посвящены работы [57-63].

В большинстве известных публикаций при решении краевых задач для элементов из СПФ используются численные методы, что связано с чрезвычайной сложностью определяющих соотношений, описывающих уникальные механические свойства этих материалов. Аналитически, как правило, удавалось решать лишь простейшие одномерные задачи, причем в весьма упрощенных постановках.

В данной работе получены аналитические решения двух типов задач о напряженно – деформированном состоянии круглой пластинки из СПФ, жестко защемленной или шарнирно закрепленной по контуру, материал которой претерпевает прямое термоупругое фазовое превращение. В задачах первого типа прямое превращение в пластинке происходит под действием постоянной по величине и направлению, равномерно распределенной по поверхности пластины перпендикулярно ее срединной плоскости нагрузки. Далее для краткости такого типа задачи называются задачами о прямом превращении.

В задачах второго типа пластинка, материал которой находится в аустенитном состоянии, нагружается равномерно распределенной по поверхности пластины и перпендикулярной этой поверхности нагрузкой. Необходимо определить, как должна меняться в процессе последующего прямого превращения величина распределенной нагрузки для того, чтобы прогиб точек пластины не изменялся. Следует определить характер изменения в таком процессе радиального и кольцевого моментов. Далее задачи такого типа для краткости называются задачами о релаксации напряжений.

Задача для тонкой пластинки решается в рамках гипотез Кирхгоффа-Лява. Предполагается, что параметр фазового состава в каждый момент рассматриваемого процесса распределен равномерно по материалу. Данная гипотеза приемлема в случае медленного процесса охлаждения, обеспечивающего равномерное распределение по материалу изменяющейся со временем температуры, в рамках несвязанной постановки задачи для СПФ, при которой пренебрегается влиянием действующих напряжений на характерные температуры фазового перехода.

При решении пренебрегается изменением упругих модулей в процессе фазового перехода. Задача может быть решена как для аустенитного, так и для мартенситного значения модулей, что позволяет получить двустороннюю оценку для искомых величин.

## 2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Задачи решаются в рамках линейной модели деформирования СПФ при фазовых переходах, предложенной в [6-8]. В [64-66] предложен метод аналитического решения краевых задач о деформировании элементов из сплавов с памятью формы при прямом фазовом превращении, основанный на преобразовании Лапласа [67] всех уравнений краевой задачи по величине объемной доли мартенситной фазы  $q$ . При этом предполагается, что поведение

СПФ описывается системой определяющих соотношений модели линейного деформирования СПФ при фазовых превращениях. Установлено, что после такого преобразования полная система уравнений краевой задачи для прямого превращения в СПФ переходит в пространстве изображений в полную систему уравнений эквивалентной задачи линейной теории упругости, в определяющих соотношениях которой упругие модули являются известными функциями материальных параметров СПФ и переменной  $s$ , соответствующей в пространстве изображений переменной  $q$ . В частности, для образов цилиндрической жесткости  $D$  и коэффициента Пуассона в пространстве изображений справедливы формулы

$$\hat{D} = D \frac{(s-a_0)(s-\beta)}{(s-d)(s-\delta)}, \quad \hat{\nu} = \nu \frac{(s-\gamma)}{(s-\beta)}. \quad (1)$$

Входящие в эти формулы параметры определяются зависимостями, приведенными в таблице 1.

Таблица 1.

Имя переменной	Значение	Имя переменной	Значение
$\beta$	$a_0 - \frac{2}{3}c_0E$	$\chi$	$a_0 - \frac{c_0E}{3(1+\nu)(5+\nu)}(6+\nu)$
$d$	$a_0 - 2c_0G$	$\gamma$	$a_0 - \frac{Ec_0}{3\nu}$
$\delta$	$a_0 - \frac{c_0E}{3(1+\nu)}$	$\psi$	$\frac{3\beta + \nu\gamma}{3+\nu}$
$\theta$	$a_0 + \frac{c_0E}{1+\nu}$	$\mu$	$\frac{5\beta + \nu\gamma}{5-\nu}$

Здесь величины  $a_0$  и  $c_0$  – материальные параметры определяющего соотношения для фазовой деформации при прямом превращении модели линейного деформирования СПФ при фазовых превращениях [6-8]:  $\frac{d\varepsilon_{ij}'^{ph}}{dq} = (c_0\sigma'_{ij} + a_0\varepsilon_{ij}'^{ph})$ ,

где  $\varepsilon_{ij}'^{ph}$  – девиатор тензора фазовых деформаций,  $\sigma'$  – девиатор тензора напряжений. Искомые величины эквивалентной упругой задачи в пространстве изображений записываются в виде функций от образов упругих постоянных. В результате для этих величин получаются дробно-рациональные функции от переменной преобразования  $s$ . Эти выражения разлагаются на простые множители, после чего определяются соответствующие решения в пространстве оригиналов.

### 3. РЕШЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Для нахождения прогибов в случае прямого превращения использовались следующие соотношения для жесткого и шарнирного закреплений соответственно [68]

$$w = \frac{P_0}{64D}(a^2 - r^2)^2, \quad w = \frac{P_0(a^2 - r^2)}{64D} \left( \frac{5+\nu}{1+\nu} a^2 - r^2 \right).$$

Отсюда выводятся соотношения для нагрузки при релаксации, соответствующие максимальным перемещениям. Ниже представлены формулы для жесткого и шарнирных закреплений соответственно

$$P_0 = \frac{64Dw}{a^4}, \quad P_0 = \frac{64wD}{a^4} \frac{1+\nu}{5+\nu}.$$

Формулы для напряжений в круглой пластине являются следующими

$$\sigma_r = \frac{12M_r}{h^3} z, \quad \sigma_t = \frac{12M_t}{h^3} z.$$

Исходя из того, что координата  $z$  соответствует распределению по поперечной оси пластины, напряжения будут выражаться через радиальный и кольцевой моменты  $M_r$  и  $M_t$ , формулы для которых имеют в случае заземленного края следующий вид

$$M_t = \frac{P_0}{16} [a^2(1+\nu) - r^2(1+3\nu)], \quad M_r = \frac{P_0}{16} [a^2(1+\nu) - r^2(3+\nu)].$$

В случае шарнирного закрепления справедливы зависимости

$$M_r = \frac{P_0}{16} (3+\nu)(a^2 - r^2), \quad M_t = \frac{P_0}{16} (3+\nu) \left( a^2 - \frac{1+3\nu}{3+\nu} r^2 \right).$$

При рассмотрении релаксации, соответственно, соотношения для моментов в жестко закрепленной пластине будут следующими

$$M_r = \frac{4wD}{a^4} [a^2(1-\nu) - r^2(3+\nu)], \quad M_t = \frac{4wD}{a^4} [a^2(1+\nu) - r^2(1+3\nu)].$$

или для случая шарнирного закрепления

$$M_r = \frac{4w_0D}{a^4} (3+\nu) \left( \frac{1+\nu}{5+\nu} \right), \quad M_t = \frac{P_0}{16} (3+\nu) \left( a^2 - \frac{1+3\nu}{3+\nu} r^2 \right).$$

#### 4. РЕШЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ОРИГИНАЛОВ

Подставляя в приведенные в предыдущем разделе формулы выражения (1) вместо цилиндрической жесткости и коэффициента Пуассона, разлагая полученные дробно рациональные относительно  $s$  выражения на простые дроби и переходя к оригиналам, можно получить следующие решения поставленных задач.

##### 4.1. Задача о прямом превращении, жесткая заделка.

Прогиб

$$w = \frac{p_0(a^2 - r^2)^2}{64D} [A + Be^{a_0q} + Ce^{\beta q}],$$

$$A = \frac{d\delta}{a_0\beta}, \quad B = \frac{a_0^2 - a_0d - a_0\delta + d\delta}{a_0(a_0 + \beta)}, \quad C = -\frac{\beta^2 - \beta d - \beta\delta + d\delta}{\beta(a_0 - \beta)}.$$

Моменты

$$M_r = \frac{P_0}{48} [A_1 + B_1 e^{\beta q}], \quad M_t = \frac{P_0}{48} [A + B e^{\beta q}],$$

$$A_1 = \frac{(3a^2 - 9r^2)\beta - (a^2 + r^2)(Ec_0 + 3va_0)}{\beta}, \quad B_1 = \frac{(-3v(\beta - a_0) + Ec_0)(a^2 + r^2)}{\beta},$$

$$A = \frac{(-Ec_0 + 3a_0v - 3\beta)a^2 + 3r^2(Ec_0 + 3a_0v + \beta)}{\beta},$$

$$B = \frac{((-3a^2 + 9r^2)\beta - 3a_0(a^2 + 3r^2))v + Ec_0(a^2 - 3r^2)}{\beta}.$$

#### 4.2. Задача о прямом превращении, шарнирное опирание.

Прогиб

$$w = \frac{P_0(a^2 - r^2)}{64D} [A + B e^{a_0 q} + C e^{\beta q} + F e^{\theta q}],$$

$$A = -\frac{1}{3} \frac{\delta d (-15a^2 a_0 r^2 + 11Ea^2 c_0 + 3Ec_0 r^2 - 3a^2 a_0 v - 3a_0 v r^2)}{a_0 \beta \theta},$$

$$B = -\frac{(a_0 + d)(a_0 + \delta)(15a^2(a^2 - r^2) + 3r^2 a_0 + Ec_0(11a^2 + 3r^2))}{3a_0(a_0 - \theta)(a_0 - \beta)},$$

$$C = \frac{a^2(3((a^2(v+5) + r^2(v+1))\beta - a_0(5r^2 + v)) + 11c_0) + \frac{+3r^2(Ec_0 - a_0v)}{(\theta - \beta)}(\delta - \beta)(d - \beta)}{3\beta(a_0 - \beta)},$$

$$F = \frac{1}{3\theta(\beta - \theta)(a_0 - \theta)}(-\theta + \delta)(-\theta + d)(-15a^2 a_0 r^2 + 11Ea^2 c_0 + 3Ec_0 r^2 - 3a^2 a_0 v + 3a^2 v \theta - 3a_0 v r^2 + 3v r^2 \theta + 15a^2 \theta + 3r^2 \theta).$$

Моменты

$$M_r = \frac{P}{16}(a^2 - r^2)(A + B e^{\beta q}), \quad M_t = \frac{P}{16}(A_1 + B_1 e^{\beta q} + C_1 e^{vq}),$$

$$A = \frac{1}{3} \frac{(Ec_0 + 9\beta v + 3va_0)}{\beta v}, \quad B = \frac{1}{3} \frac{(Ec_0 - 3\beta v + 3va_0)}{\beta v},$$

$$A_1 = \frac{42\left(-\frac{3}{7}(3+v)\right)(-3vr^2 + a^2 + r^2)a_0 + Ec_0\left(-\frac{1}{7}vr^2 + a^2 - \frac{3}{7}r^2\right)}{(2Ec_0 - 3a_0)}$$

$$\frac{\left(-2a_0v + Ec_0\left(v - \frac{1}{6}\right)\right)}{v(7Ec_0 - 3a_0v - 9a_0)},$$

$$B_1 = -\frac{2(60Ec_0v^3 - 98Ec_0v^2 - 18a_0v^3 - 52Ec_0v - 21a_0v^2 - 6Ec_0 + 108a_0v + 27a_0)r^2}{v(7Ec_0 - 3a_0v - 9a_0)(2v-1)},$$

$$C_1 = \frac{Ec_0(-12v^3r^2 + 4a^2v^2 - 44v^2r^2 - 25vr^2 - a^2 - 3r^2) + v(4Ec_0v - 2Ec_0 - a_0r^2(12v^2 + 42v + 18))}{-6a_0v + 3a_0}.$$

### 4.3. Задача о релаксации, жесткая заделка.

Усилие

$$P_0 = \frac{64Dw}{a^4}(A + Be^{dq} + Ce^{\delta q}),$$

$$A = \frac{a_0\beta}{d\delta}, \quad B = \frac{a_0\beta - a_0d - \beta d + d^2}{d(d-\delta)}, \quad C = -\frac{a_0\beta - a_0\delta - \beta\delta + \delta^2}{\delta(d-\delta)}.$$

Моменты

$$M_r = \frac{4wD}{3a^4}[A + Be^{dq} + Ce^{\delta q}],$$

$$A = -\frac{(Ea^2c_0 - 3Er^2c_0 + 3a^2va_0 - 9vr^2a_0 + 3a^2\beta - 3\beta r^2)a_0}{d\delta},$$

$$B = \frac{1}{(d-\delta)d}(d-a_0)\left(\left((-3v-3)a^2 + \left(9\left(v+\frac{1}{3}\right)\right)r^2\right)d + (Ec_0 + 3va_0 + 3\beta)a^2 - 3r^2(Ec_0 + 3va_0 + \beta)\right),$$

$$C = -\frac{(\delta-a_0)}{\delta(d-\delta)}\left(\left(-3a^2(v+1) + 9r^2\left(v+\frac{1}{3}\right)\right)\delta + (Ec_0 + 3va_0 + 3\beta)a^2 - 3r^2(Ec_0 + 3va_0 + \beta)\right).$$

$$M_t = \frac{4wD}{a^4}[A_1 + B_1e^{dq} + C_1e^{\delta q}],$$

$$A_1 = -\frac{1}{d\delta}(Ea^2c_0 - 3Er^2c_0 + 3a^2va_0 - 9vr^2a_0 + 3a^2\beta - 3\beta r^2)a_0,$$

$$B_1 = \frac{1}{(d-\delta)d}Ec_0(a^2d - a^2a_0 - 3d\dot{r} + 3r^2a_0) \cdot 3(-a^2d^2v + 2a^2dva_0 - a^2va_0^2 + 3d^2vr^2 - 6dvr^2a_0 + 3vr^2a_0^2 + a^2\beta d - a^2\beta a_0 - a^2d^2 + a^2da_0 - \beta dr^2 + \beta r^2a_0 + d^2r^2 - dr^2a_0),$$

$$C_1 = -\frac{1}{\delta(d-\delta)} \left( Ea^2\delta c_0 - Ea^2a_0c_0 - 3E\delta r^2c_0 + 3Er^2a_0c_0 - 3a^2\delta^2v + \right. \\ \left. + 6a^2\delta va_0 - 3a^2va_0^2 + 9\delta^2vr^2 - 18\delta vr^2a_0 + 9vr^2a_0^2 + 3a^2\beta\delta - \right. \\ \left. - 3a^2\beta a_0 - 3a^2\delta^2 + 3a^2\delta a_0 - 3\beta\delta r^2 + 3\beta r^2a_0 + 3\delta^2r^2 - 3\delta r^2a_0 \right).$$

#### 4.4. Задача о релаксации, шарнирное закрепление.

Усилие

$$P_0 = \frac{64wD}{a^4} \left[ A + Be^{dq} + Ce^{\delta q} + Fe^{\chi q} \right], \\ A = -\frac{1}{3} \frac{\beta a_0 (Ec_0v - 3a_0v^2 + 2Ec_0 - 6a_0v - 3a_0)}{(1+\nu)\chi d\delta}, \\ B = \frac{1}{3} \frac{\left( 3(1+\nu)^2 d - 3a_0v^2 + (Ec_0 - 6a_0)v + 2Ec_0 - 3a_0 \right) (d - a_0)(d - \beta)}{(1+\nu)d(-\chi + d)(d - \delta)}, \\ C = \frac{1}{3} \frac{(a_0 - \delta)(\beta - \delta) \left( 3(1+\nu)^2 \delta - 3a_0v^2 + (Ec_0 - 6a_0)v + 2Ec_0 - 3a_0 \right)}{(1+\nu)(d - \delta)\delta(\chi - \delta)}, \\ F = \frac{1}{3} \frac{(-\chi + a_0)(\chi - \beta) \left( 3(1+\nu)^2 \chi - 3a_0v^2 + (Ec_0 - 6a_0)v + 2Ec_0 - 3a_0 \right)}{\chi(\chi - \delta)(1+\nu)(-\chi + d)}.$$

Моменты

$$M_r = \frac{4wD}{a^4} (a^2 - r^2) \left[ A + Be^{dq} + Ce^{\delta q} + Fe^{\mu q} \right], \\ A = -\frac{a_0(\gamma^2v^2 + 4\beta\gamma v + 3\beta^2)}{d\delta\mu}, \\ B = \frac{1}{d(d-\mu)(d-\delta)} \left( -a_0d^2v^2 + 2a_0d\gamma v^2 + a_0\gamma^2v^2 + d^3v^2 - 2d^2\gamma v^2 + d\gamma^2v^2 + \right. \\ \left. + 4a_0\beta dv + 4a_0\beta\gamma v - 4a_0d^2v + 4a_0d\gamma v - 4\beta d^2v + 4\beta d\gamma v + 4d^3v - 4d^2\gamma v + \right. \\ \left. + 3a_0\beta^2 + 6a_0\beta d - 3a_0d^2 + 3\beta^2d - 6\beta d^2 + 3d^3 \right), \\ C = -\frac{1}{(-\delta^2 + (d + \mu)\delta - d\mu)\delta} \left( (v^2 + 4v + 3)\delta^3 + (-2\gamma v^2 - v^2a_0 - 4\beta v - \right. \\ \left. - 4\gamma v - 4va_0 - 6\beta - 3a_0)\delta^2 + (a_0(2\gamma v^2 + 4v(\beta + \gamma) + 6\beta) + \gamma^2v^2 + \right. \\ \left. + 4\beta\gamma v + 3\beta^2)\delta + a_0(\gamma^2v^2 + 4\beta\gamma v + 3\beta^2) \right), \\ F = \frac{1}{\mu(\delta - \mu)(d - \mu)} 4 \left( a_0\beta\gamma v + a_0\beta\mu v + a_0\gamma\mu v - a_0\mu^2v + \beta\gamma\mu v - \beta\mu^2v - \right. \\ \left. - \gamma\mu^2v + \mu^3v \right) + 3 \left( a_0\beta^2 + 2a_0\beta\mu - a_0\mu^2 + \beta^2\mu - 2\beta\mu^2 + \mu^3 \right) + \\ + v^2 \left( a_0\gamma^2 + 2a_0\gamma\mu - a_0\mu^2 + \gamma^2\mu - 2\gamma\mu^2 + \mu^3 \right),$$



$$M_t = \frac{4wD}{a^4} [A_1 + B_1 e^{dq} + C_1 e^{\delta q} + F_1 e^{\psi q} + H_1 e^{\mu q}].$$

Формулы для коэффициентов этой зависимости не приведены из-за их громоздкости.

## 5. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Численные значения параметров, входящих в полученные решения и зависящих от упругих постоянных, приведены в таблице 3.

Таблица 3.

Переменная	Значение	Переменная	Значение	Переменная	Значение
$a_0$	0.718	$d$	-3.879	$\psi$	-3.844
$c_0$	$0.243 \cdot 10^4 \text{ МПа}^{-1}$	$\beta$	-3.818	$\mu$	-4.649
$E$	28000 МПа	$\delta$	-3.643	$\chi$	-1.094
$\nu$	0.48	$\theta$	5.315		

В ходе вычислений можно заметить, что характер зависимости искомых величин от параметра фазового состава всецело определяется множителем, представляющим собой сумму экспоненциальных функций. Поэтому целесообразно при построении графических зависимостей будет откладывать по оси ординат не сами прогибы, усилия и моменты, а лишь значения сомножителей соответствующих выражений, зависящих от  $q$ .

Так на рис.1 и рис.2 представлены зависимости  $w(q)$  и  $w(r)$  (где  $r \in [0; a]$ ), значения по оси ординат отнесены к  $\frac{p_0(a^2 - r^2)^2}{64D}$  и  $\frac{p_0 a^4}{64D}$  соответственно.

Для изображения распределения прогибов или моментов по радиусу полный радиус пластины  $a$  принимался за единицу, а величина  $r$  выражалась в долях от  $a$ , представляя собой тем самым безразмерную величину  $r/a$ . Однако на всех рисунках для простоты восприятия она обозначена как  $r$ .

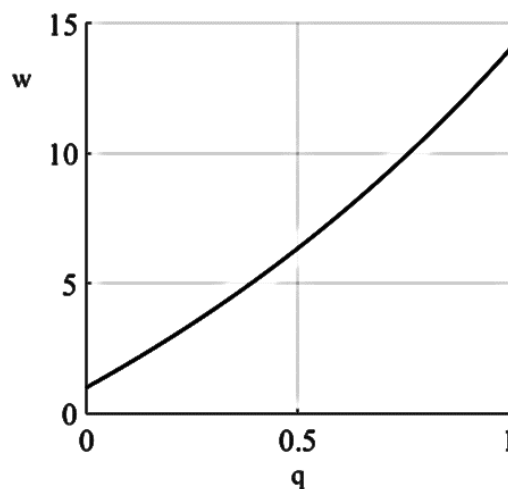


Рис.1.  $w(q)$  при прямом превращении жестко закрепленной пластины.

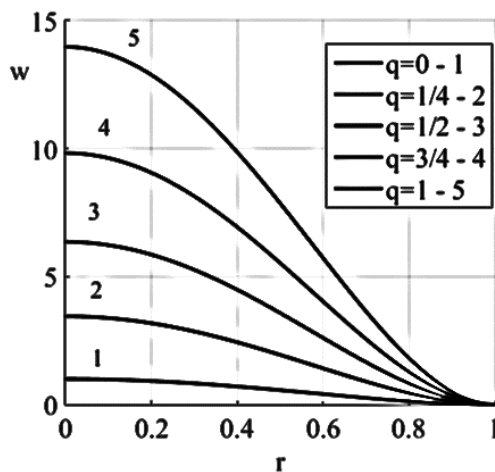


Рис.2.  $w(r)$  при прямом превращении жестко закрепленной пластины.

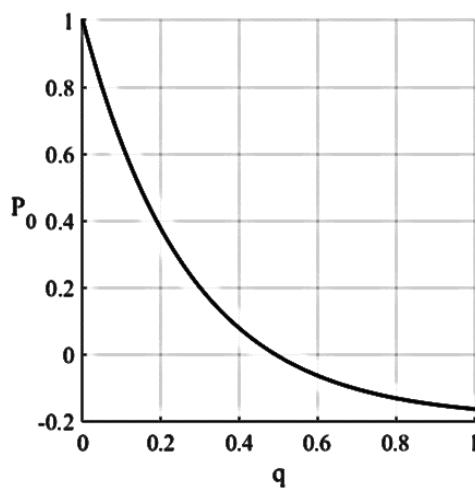


Рис.3.  $P_0(q)$  при прямом превращении жестко закрепленной пластины.

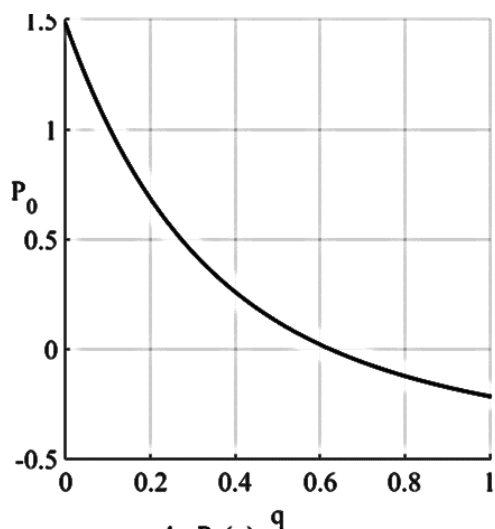


Рис.4.  $P_0(q)$  при релаксации шарнирно закрепленной пластины.

Для случая релаксации жестко и шарнирно закрепленных пластин построим зависимость  $P(q)$  (рис.3 и рис.4 соответственно), где значения, отложенные вдоль оси ординат, так же для удобства отнесены к  $\frac{64Dw}{a^4}$ .

Как было показано ранее, напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_t$  напрямую зависят от моментов  $M_r$  и  $M_t$  соответственно. Поэтому анализ велся непосредственно исходя из моментов. Выстраивая в дальнейшем графические зависимости для моментов, все моменты в случае прямого превращения будем относить к  $\frac{Pa^2}{16}$ , а в случае релаксации – к  $\frac{4wD}{a^2}$ , что с учетом обозначения  $r = r/a$  приводит графики к безразмерным величинам.

Очевидно, что значение  $M_r$  будет зависеть не только от фазового состава, но и от координаты по радиусу. Построим зависимость  $M_r(r)$  для различных соотношений фазового состава (рис.5) и зависимость  $M_r(q)$  (рис.6) при прямом превращении круглой пластины.

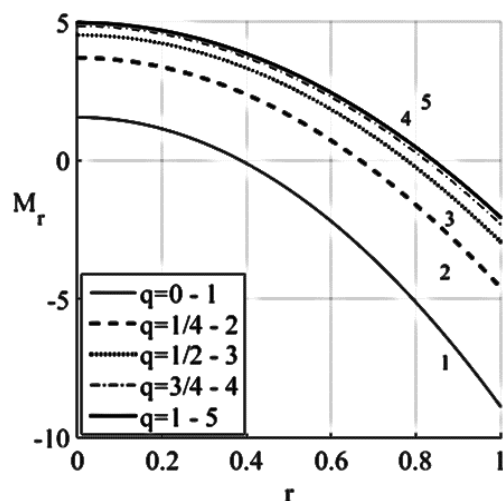


Рис.5.  $M_r(r)$  при прямом превращении жестко закрепленной пластины.

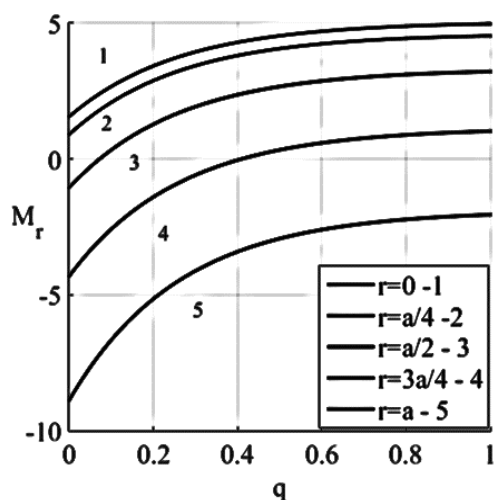


Рис.6.  $M_r(q)$  при прямом превращении жестко закрепленной пластины.

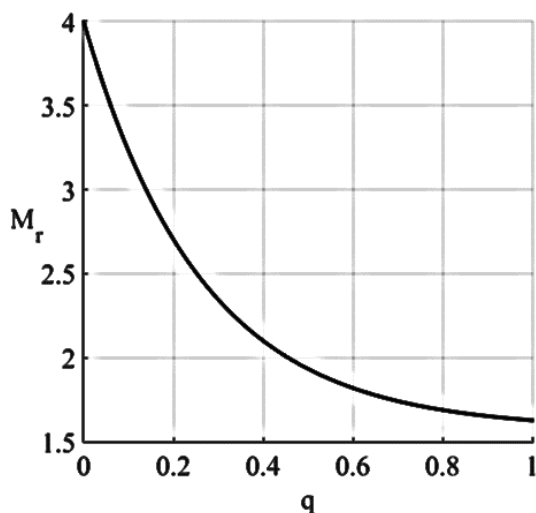


Рис.7.  $M_r(q)$  при прямом превращении шарнирно закрепленной пластины.

На рис.7 представлена зависимость момента  $M_r(q)$  для шарнирно закрепленной пластины. Однако не менее интересно будет построить эпюру момента  $M_r(r)$  для различных соотношений фазового состава  $q$ . Выберем несколько основных значений  $q$  и представим их на графике (рис.8).

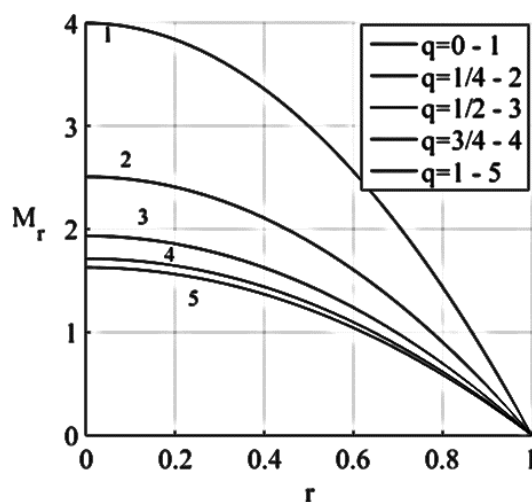


Рис.8.  $M_r(r)$  при прямом превращении шарнирно закрепленной пластины.

Представленный график наглядно доказывает, что одно из граничных условий шарнирного закрепления – отсутствие момента  $M_r$  на закрепленном краю выполняется – все эпюры моментов приходят в 0 при  $r = a$ , что соответствует краю.

Построим эпюру  $M_r(r)$  для нескольких фиксированных значений фазового состава  $q$  (рис.9). Очевидно, что с ростом доли мартенсита (значение  $q$  повышается) эпюра моментов становится более полой. Зафиксируем одну из точек (например, центральную – точку приложения нагрузки) и построим в ней зависимость  $M_t(q)$  (рис.10).

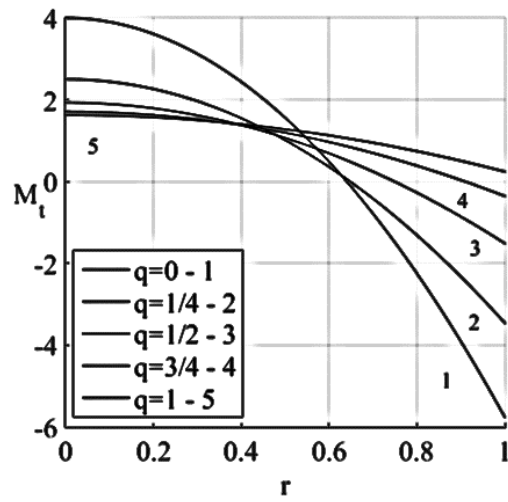


Рис.9.  $M_t(r)$  при прямом превращении шарнирно закрепленной пластины.

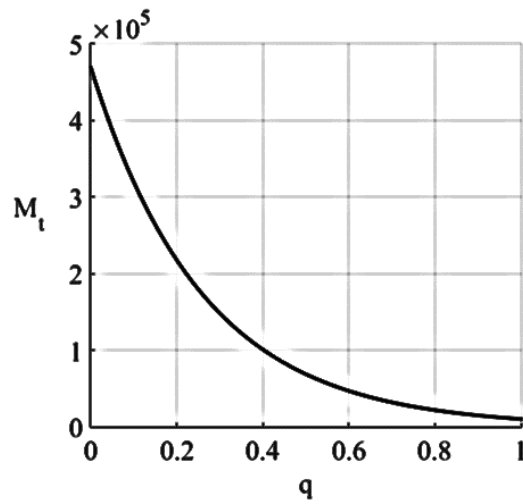


Рис.10.  $M_t(q)$  при прямом превращении шарнирно закрепленной пластины.

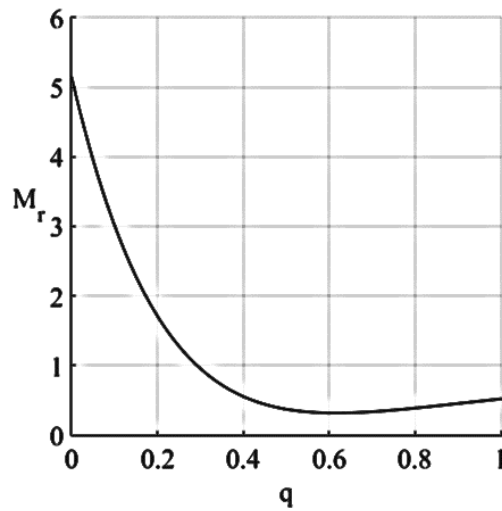


Рис.11.  $M_r(q)$  при релаксации шарнирно закрепленной пластины.

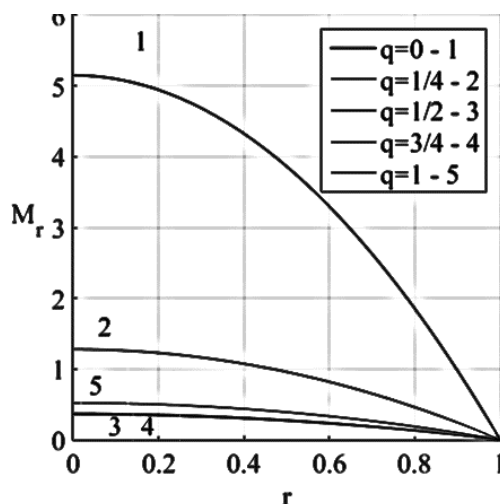


Рис.12.  $M_r(r)$  при релаксации шарнирно закрепленной пластины.

В случае релаксации шарнирно закрепленной пластинки очевидно, что зависимость момента  $M_r(q)$  будет одинаковой во всех точках пластинки (рис.11). Построим также распределение моментов  $M_r(r)$  при разных значениях  $q$  (рис.12).

## ВЫВОДЫ

В рамках модели линейного деформирования СПФ при фазовых превращениях исследовано поведение круглой тонкой пластины, материал которой претерпевает прямое термоупругое мартенситное превращение под действием постоянной по величине и равномерно распределенной по радиусу ортогональной к лицевой поверхности пластины нагрузки. Установлено, что прогибы всех точек пластины в таком процессе возрастают.

Решена задача о поддержании фиксированной изогнутой формы такой пластины, заданной путем нагружения в аустенитном состоянии и претерпевающей прямое термоупругое мартенситное превращения. Определен характер убывания внешней нагрузки, обеспечивающий неизменность формы пластинки.

В обеих задачах получены аналитические зависимости искомых величин от радиальной координаты и параметра фазового состава.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Tanaka K. *A phenomenological description on thermomechanical behavior of shape memory alloys* // J. Pressure Vessel Technology. Trans. ASME. – 1990. – Vol.112. – No.2. – Pp.158-163.
2. Liang C., Rogers C.A. *One-Dimensional Thermomechanical Constitutive Relations for Shape Memory Materials* // J. of Intell. Mater. Syst. and Struct. – 1990. – Vol.1. – No.2. – Pp.207-234.
3. Liang C., Rogers C.A. *A multi-dimensional constitutive model for shape memory alloys* // J. Eng. Math. – 1992. – Vol.26. – Pp.429-443.
4. Brinson L.S. *One-dimensional constitutive behavior of shape memory alloys: thermomechanical derivation with non-constant material functions and redefined*

- martensite internal variable* // J. Intell. Mater. Syst. Struct. – 1993. – Vol.4. – Pp.229-242.
5. Graesser E.J. and Cozzarelli F.A. *A proposed three-dimensional constitutive model for shape memory alloy* // J. Intell. Mater. Syst. Struct. – 1994. – Vol.5. – Pp.78-79.
  6. Мовчан А.А. *Микромеханические определяющие уравнения для сплавов с памятью формы* // Проблемы машиностроения и надежности машин (Машиноведение). – 1994. – №6. – С.47-53.
  7. Мовчан А.А. *Микромеханический подход к описанию деформации мартенситных превращений в сплавах с памятью формы* // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1995. – №1. – С.197-205.
  8. Мовчан А.А. *Выбор аппроксимации фазовой диаграммы и модели исчезновения кристаллов мартенсита для сплавов с памятью формы* // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1995. – Т.36. – №2. – С.173-181.
  9. Brinson L.S., Huang M.S. *Simplification and comparisons of shape memory alloys constitutive models* // J. Intell. Mater. Syst. Struct. – 1996. – Vol.7. – Pp.108-114.
  10. Boyd J.G., Lagoudas D.C. *A thermodynamic constitutive model for shape memory materials. Part 1. The monolithic shape memory alloy* // Intern. J. of Plasticity. – 1996. – Vol.12. – No.6. – Pp.805-842.
  11. Leclercq S., Lexcellent C. *A general macroscopic description of the thermomechanical behavior of shape memory alloys* // J. Mech. Phys. Solids. – 1996. – Vol.44. – No.6. – Pp.953-980.
  12. Мовчан А.А., Шелымагин П.В., Казарина С.А. *Определяющие уравнения для двухэтапных термоупругих фазовых превращений* // Прикладная механика и техническая физика. – 2001. – Т.42. – №5(249). – С.152-160.
  13. Peultier B., Ben Zineb T., Patoor E. *Macroscopic constitutive law of shape memory alloy thermomechanical behaviour. Application to structure computation by FEM* // Mechanics of materials. – 2006. – Vol.38. – No.5-6. – Pp.510-524.
  14. Lexcellent Ch., Boubakar M.L., Bouvet Ch., Calloch S. *About modeling the shape memory alloy behaviour based on the phase transformation surface identification under proportional loading and anisothermal conditions* // Int. J. Solids and Struct. – 2006. – Vol.43. – No.3-4. – Pp.613-626.
  15. Sadjadjpour A., Bhattacharya K. *A micromechanics inspired constitutive model for shape-memory alloys: the one-dimensional case* // Smart Mater. Struct. – 2007. – Vol.16. – Pp.51-62.
  16. Moumni Z., Zaki W. and Nguyen Q.S. *Theoretical and numerical modeling of solid/solid phase change: application to the description of the thermomechanical behavior of shape memory alloys* // International Journal of Plasticity. – 2008. – Vol.24. – No.4. – Pp.614-645.
  17. Auricchio F., Reali A., Stefanelli U. *A macroscopic 1d model for shape memory alloys including asymmetric behavior and transformation-dependent elastic properties* // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2009. – Vol.198. – No.17-20. – Pp.1631-1637.
  18. Arghavani J., Auricchio F., Naghdabadi R., Reali A., Sohrabpour S. *A 3-D phenomenological constitutive model for shape memory alloys under multiaxial loadings* // Int. J. of Plasticity. – 2010. – Vol.26. – Pp.976-991.
  19. Arghavani J., Auricchio F., Naghdabadi R., Reali A., Sohrabpour S. *A 3-D finite strain phenomenological constitutive model for shape memory alloys considering*

- martensite reorientation* // Continuum Mechanics and Thermodynamics. – 2010. – Vol.25. – Pp.345-362.
20. Hartl D.J., Lagoudas D.C., Calcins F.T. *Advanced methods for the analysis, design and optimization of SMA-based aerostructures* // Smart Materials and Structure. – 2011. – Vol.20. – 094006 (20pp).
  21. Xiao H., Bruhns O.T., Meyers A. *Thermoinduced plastic flow and shape memory effects* // Theoret. Appl.Mech. – 2011. – Vol.38. – No.2. – Pp.155-207.
  22. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г., Сильченко Т.Л. *Учет явления мартенситной неупругости при обратном фазовом превращении в сплавах с памятью формы* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2011. – №2. – С.44-56.
  23. Auricchio F. and Bonetti E. *A new exible 3D macroscopic model for shape memory alloys* // Discrete and Continuous Dynamical Systems. – 2013. – Vol.6. – Pp.277-291.
  24. Auricchio F., Bonetti E., Scalet G. and Uberitini F. *Theoretical and numerical modeling of shape memory alloys accounting for multiple phase transformations and martensite reorientation* // International Journal of Plasticity. – 2014. – Vol.59. – Pp.30-54.
  25. Мишустин И.В., Мовчан А.А. *Моделирование фазовых и структурных превращений в сплавах с памятью формы, происходящих под действием немонотонно меняющихся напряжений* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2014. – №1. – С.37-53.
  26. Gu X., Zaki W., Morin C., Moumni Z. and Zhang W. *Time integration and assessment of a model for shape memory alloys considering multiaxial nonproportional loading cases* // International Journal of Solids and Structures. – 2015. – Vol.54. – Pp.82-99.
  27. Мишустин И.В., Мовчан А.А. *Аналог теории пластического течения для описания деформации мартенситной неупругости в сплавах с памятью формы* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2015. – №2. – С.78-95.
  28. Cisse C., Zaki W., Zineb T.B. *A review of constitutive models and modeling techniques for shape memory alloys* // International Journal of Plasticity. – 2015. DOI: 10.1016/j.ijplas.2015.08.006.
  29. Xiaojun Gu, Weihong Zhang, Wael Zaki and Ziad Moumni. *An extended thermomechanically coupled 3D rate-dependent model for pseudoelastic SMAs under cyclic loading* // Smart Mater. Struct. – 2017. – Vol.26. – 095047 (16pp).
  30. Мовчан А.А. *Модель влияния фазового механизма деформирования на структурный в сплавах с памятью формы* // Деформация и разрушение материалов. – 2019. – №7. – С.14-23.
  31. Мовчан А.А. *Учет переменности упругих модулей и влияния напряжений на фазовый состав в сплавах с памятью формы* // Известия АН. Механика твердого тела. – 1998. – №1. – С.79-90.
  32. Movchan Andrey A., Mishustin Ilya V. *Nanostructural prediction of shape memory alloys resistance asymmetry* // Nanoscience and Technology: An International Journal. – 2019. – Vol.10. – No.3. – Pp.233-245.
  33. Мовчан А.А. *Кручение призматических стержней из сплавов с памятью формы* // Известия РАН. МТТ. – 2000. – №6. – С.143-154.
  34. Mirzaeifar Reza, DesRoches Reginald, Yavari Arash. *A combined analytical, numerical, and experimental study of shape-memory-alloy helical springs* // International Journal of Solids and Structures. – 2011. – Vol.48. – Pp.611-624.



35. Mirzaeifar Reza, DesRoches Reginald, Yavari Arash, Gall Ken. *Coupled thermo-mechanical analysis of shape memory alloy circular bars in pure torsion* // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2012. – Vol.47. – Pp.118-128.
36. Jong-Ha Chung, Jin-Seok Heo and Jung-Ju Lee. *Modeling and numerical simulation of the pseudoelastic behavior of shape memory alloy circular rods under tension-torsion combined loading* // Smart Mater. Struct. – 2006. – Vol.15. – Pp.1651-1660.
37. Hyoung Seop Kim. *Finite element analysis of torsional deformation* // Materials Science and Engineering. – 2001. – Vol.A299. – Pp.305-308.
38. Mirzaeifar Reza, DesRoches Reginald, Yavari Arash. *Exact solutions for pure torsion of shape memory alloy circular bars* // Mechanics of Materials. – 2010. – Vol.42. – Pp.797-806.
39. Саганов Е.Б. *Решение задачи о прямом мартенситном переходе в стержне из сплава с памятью формы, находящемся под действием постоянного крутящего момента* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2014. – Т.20. – №3. – С.454-468.
40. Саганов Е.Б. *Решение задачи об обратном мартенситном переходе в стержне из сплава с памятью формы, находящемся под действием постоянного крутящего момента* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2014. – Т.20. – №4. – С.663-674.
41. Саганов Е.Б. *Анализ напряженно-деформированного состояния торсионного актуатора из сплава с памятью формы при рабочем ходе в условиях стесненного деформирования* // Вестник Московского Авиационного Института. – 2015. – Т.22. – №1. – С.109-116.
42. Саганов Е.Б. *Решение дважды связанной задачи кручения тонкостенных трубок из сплава с памятью формы в режиме сверхупругости* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т.21. – №4. – С.549-563.
43. Саганов Е.Б. *Моделирование процессов фазовых и структурных переходов при кручении тонкостенных трубок из сплава с памятью формы* // Машиностроение и инженерное образование. – 2016. – №1. – С.2-9.
44. Plietsch R., Bourauel C., Drescher D., Nellen B. *Analytical description of the bending behavior of NiTi shape-memory alloys* // Journal of Materials Science. – 1994. – Vol.29. – No.22. – Pp.5892-5902.
45. Мовчан А.А. *Исследование эффектов связности в задачах изгиба балок из сплава с памятью формы* // Прикладная механика и техническая физика. – 1998. – Т.39. – №1. – С.164-173.
46. Данилин А.Н., Мовчан А.А. *Метод решения геометрически нелинейных задач изгиба стержней из сплавов с памятью формы при прямом превращении* // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2002. – №4. – С.83-90.
47. Flor D.L.S., Urbina C., Ferrando F. *Asymmetrical bending model for NiTi shape memory wires: Numerical simulations and experimental analysis* // Strain. An International journal for Experimental Mechanics. – 2011. – Vol.47. – No.3. – Pp.255-267.
48. Young-Jin K., Chang-Ho L., Joung-Hun K., Jae H.L. *Numerical modelling of shape memory alloy plates considering tension/compression asymmetry and its verification under pure bending* // Solids and Structures. – 2018. – Vol.137. – Pp.77-88.
49. Сафронов П.А. *Учет разносопротивляемости сплавов с памятью формы при решении задач о мартенситной неупругости и прямом превращении в балке,*

- находящейся под действием изгибающего момента // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2016. – Т.22. – №1. – С.114-127.
50. Сафронов П.А. *Решение задач о мартенситной неупругости и прямом фазовом превращении в балке из сплава с памятью формы с учетом упругих деформаций и разнсопротивляемости этих сплавов* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2017. – Т.23. – №1. – С.69-89.
51. Сафронов П.А. *Решение связанной задачи о прямом превращении в балке из сплава с памятью формы с учетом разнсопротивляемости материала* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2019. – Т.24. – №4. – С.597-615.
52. Safronov P.A. *Tension-compression asymmetry and elastic strain incorporating into the solution of the problem of martensitic nonelasticity and direct martensitic transition in beams from a shape memory alloy undergoing bending* // Composites: Mechanics, Computations, Applications. – 2018. – Vol.9. – No.2. – Pp.119-139.
53. Young-Jin K., Chang-Ho L., Joung-Hun K., Jae H.L. *Numerical modelling of shape memory alloy plates considering tension/compression asymmetry and its verification under pure bending* // Solids and Structures. – 2018. – Vol.137. – Pp.77-88.
54. Сафронов П.А. *Цилиндрический изгиб пластинок из сплава с памятью формы с учетом разнсопротивляемости этого материала* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т.24. – №2. – С.186-206.
55. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г. *Устойчивость круглой пластины из сплава с памятью формы при прямом мартенситном превращении* // Прикл. матем. и механика. – 2006. – Т.70. – №5. – С.869-881.
56. Сильченко Л.Г., Мовчан А.А., Мовчан И.А. *Учет структурного превращения при анализе устойчивости круглой пластины из сплава с памятью формы* // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2010. – №5. – С.57-65.
57. Мовчан А.А., Машихин А.Е. *Деформации кругового цилиндра из сплава с памятью формы при структурном переходе или прямом фазовом превращении* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2012. – Т.18. – №2. – С.235-247.
58. Мовчан А.А., Левин А.С. *Задача о прямом мартенситном превращении в толстостенной сфере из сплава с памятью формы, находящейся под действием постоянного давления* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т.21. – №2. – С.221-236.
59. Машихин А.Б., Мовчан А.А. *Задача о прямом мартенситном превращении в толстостенном цилиндре из сплава с памятью формы* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2016. – №3. – С.100-114.
60. Машихин А.Е., Мовчан А.А. *Краевые задачи термомеханики для цилиндра и сферы из сплава с памятью формы* // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2017. – №3. – С.113-128.
61. Mirzaeifar R., Shakeri M., DesRoches R., Yavari A. *A semi-analytic analysis of shape memory alloy thick-walled cylinders under internal pressure* // Archive of Applied Mechanics. – 2011. – Vol.81. – No.8. – Pp.1093-1116.
62. Саганов Е.Б. *Численное моделирование явления мартенситной неупругости в сплавах с памятью формы с учетом их разнсопротивляемости* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2019. – Т.25. – №2. – С.281-294.
63. Саганов Е.Б. *Решение задачи о толстостенном цилиндре из сплава с памятью формы, находящемся под давлением, с учетом*

*разносопротивляемости* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2019. – Т.25. – №4. – С.563-573.

64. Мовчан А.А. *Исследование эффектов связности в задачах изгиба балок из сплава с памятью формы* // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1998. – Т.39. – №1. – С.87-97.
65. Мовчан А.А. *Аналитическое решение задач о прямом и обратном превращении для сплавов с памятью формы* // Известия АН. Механика твердого тела. – 1996. – №4. – С.136-144.
66. Мовчан А.А. *Некоторые проявления способности к ориентированному превращению для сплавов с памятью формы* // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1996. – Т.37. – №6. – С.181-189.
67. Дубков А.А., Агудов Н.В. *Преобразование Лапласа: Учебно-методическое пособие*. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2016. – 36 с.
68. Феодосьев В.И. *Сопротивление материалов: Учеб. для вузов. / 10-е изд., перераб. и доп.* – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – 592с.

## REFERENCES

1. Tanaka K. *A phenomenological description on thermomechanical behavior of shape memory alloys*. J. Pressure Vessel Technology. Trans. ASME, 1990, Vol.112, No.2, Pp.158-163.
2. Liang C., Rogers C.A. *One-Dimensional Thermomechanical Constitutive Relations for Shape Memory Materials*. J. of Intell. Mater. Syst. and Struct., 1990, Vol.1, No.2, Pp.207-234.
3. Liang C., Rogers C.A. *A multi-dimensional constitutive model for shape memory alloys*. J. Eng. Math., 1992, Vol.26, Pp.429-443.
4. Brinson L.S. *One-dimensional constitutive behavior of shape memory alloys: thermomechanical derivation with non-constant material functions and redefined martensite internal variable*. J. Intell. Mater. Syst. Struct., 1993, Vol.4, Pp.229-242.
5. Graesser E.J. and Cozzarelli F.A. *A proposed three-dimensional constitutive model for shape memory alloy*. J. Intell. Mater. Syst. Struct., 1994, Vol.5, Pp.78-79.
6. Movchan A.A. *Mikromekhanicheskie opredelyayushhie uravneniya dlya splavov s pamyat'yu formy [Micromechanical constitutive equations for shape memory alloys]*. Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin (Mashinovedenie), 1994, No.6, Pp.47-53.
7. Movchan A.A. *Micromechanical description of the deformation due to martensite transformations in shape-memory alloys*. Mechanics of Solids, 1995, Vol.30, No.1, Pp.186-194.
8. Movchan A.A. *The selection of the phase transition diagram approximation and model of disappearing of martensite crystals for shape memory alloys*. Applied Mechanics and Technical Physics, 1995, Vol.36, No.2, Pp.300-306.
9. Brinson L.S., Huang M.S. *Simplification and comparisons of shape memory alloys constitutive models*. J. Intell. Mater. Syst. Struct., 1996, Vol.7, Pp.108-114.
10. Boyd J.G., Lagoudas D.C. *A thermodynamic constitutive model for shape memory materials. Part I. The monolithic shape memory alloy*. Intern. J. of Plasticity, 1996, Vol.12, No.6, Pp.805-842.
11. Leclercq S., Lexcelent C. *A general macroscopic description of the thermomechanical behavior of shape memory alloys*. J. Mech. Phys. Solids, 1996, Vol.44, No.6, Pp.953-980.

12. Movchan A.A., Shelymagin P.V., Kazarina S.A. *Constitutive equations for two-step thermoelastic phase transformations*. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2001, Vol.42, No.5, Pp.864-871.
13. Peultier B., Ben Zineb T., Patoor E. *Macroscopic constitutive law of shape memory alloy thermomechanical behaviour. Application to structure computation by FEM*. Mechanics of materials, 2006, Vol.38, No.5-6, Pp.510-524.
14. Lexcellent Ch., Boubakar M.L., Bouvet Ch., Calloch S. *About modeling the shape memory alloy behaviour based on the phase transformation surface identification under proportional loading and anisothermal conditions*. Int. J. Solids and Struct., 2006, Vol.43, No.3-4, Pp.613-626.
15. Sadjadpour A., Bhattacharya K. *A micromechanics inspired constitutive model for shape-memory alloys: the one-dimensional case*. Smart Mater. Struct., 2007, Vol.16, Pp.51-62.
16. Moumni Z., Zaki W. and Nguyen Q.S. *Theoretical and numerical modeling of solid/solid phase change: application to the description of the thermomechanical behavior of shape memory alloys*. International Journal of Plasticity, 2008, Vol.24, No.4, Pp.614-645.
17. Auricchio F., Reali A., Stefanelli U. *A macroscopic 1d model for shape memory alloys including asymmetric behavior and transformation-dependent elastic properties*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2009, Vol.198, No.17-20, Pp.1631-1637.
18. Arghavani J., Auricchio F., Naghdabadi R., Reali A., Sohrabpour S. *A 3-D phenomenological constitutive model for shape memory alloys under multiaxial loadings*. Int. J. of Plasticity, 2010, Vol.26, Pp.976-991.
19. Arghavani J., Auricchio F., Naghdabadi R., Reali A., Sohrabpour S. *A 3-D finite strain phenomenological constitutive model for shape memory alloys considering martensite reorientation*. Continuum Mechanics and Thermodynamics, 2010, Vol.25, Pp.345-362.
20. Hartl D.J., Lagoudas D.C., Calcins F.T. *Advanced methods for the analysis, design and optimization of SMA-based aerostructures*. Smart Materials and Structure, 2011, Vol.20, 094006 (20pp).
21. Xiao H., Bruhns O.T., Meyers A. *Thermoinduced plastic flow and shape memory effects*. Theoret. Appl.Mech, 2011, Vol.38, No.2, Pp.155-207.
22. Movchan A.A., Sil'chenko L.G. and Sil'chenko T.L. *Taking into account of the martensite inelasticity in reverse phase transformation in shape memory alloys*. Mechanics of Solids, 2011, Vol.46, No.2, Pp.194-203.
23. Auricchio F. and Bonetti E. *A new exible 3D macroscopic model for shape memory alloys*. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2013, Vol.6, Pp.277-291.
24. Auricchio F., Bonetti E., Scalet G., and Uberitini F. *Theoretical and numerical modeling of shape memory alloys accounting for multiple phase transformations and martensite reorientation*. International Journal of Plasticity, 2014, Vol.59, Pp.30-54.
25. Mishustin I.V., Movchan A.A. *Modeling of phase and structure transformations occurring in shape memory alloys under nonmonotonically varying stresses*. Mechanics of Solids, 2014, Vol.49, No.1, Pp.27-39.
26. Gu X., Zaki W., Morin C., Moumni Z., and Zhang W. *Time integration and assessment of a model for shape memory alloys considering multiaxial nonproportional loading cases*. International Journal of Solids and Structures, 2015, Vol.54, Pp.82-99.

27. Mishustin I.V., Movchan A.A. *Analog of the plastic flow theory for describing martensitic inelastic strains in shape memory alloys*. Mechanics of Solids, 2015, Vol.50, No.2, Pp.176-190.
28. Cisse C., Zaki W., Zineb T.B. *A review of constitutive models and modeling techniques for shape memory alloys*. International Journal of Plasticity, 2015. doi: 10.1016/j.ijplas.2015.08.006.
29. Xiaojun Gu, Weihong Zhang, Wael Zaki and Ziad Moumni. *An extended thermomechanically coupled 3D rate-dependent model for pseudoelastic SMAs under cyclic loading*. Smart Mater. Struct., 2017, Vol.26, 095047 (16pp).
30. Movchan A.A. *Model' vliyaniya fazovogo mekhanizma deformirovaniya na strukturnyj v splavakh s pamyat'yu formy [Simulation influence phase mechanism straining on structural mechanism in shape memory alloys]*. Deformatsiya i razrushenie materialov, 2019, No.7, Pp.14-23.
31. Movchan A.A. *Consideration of the elastic modulus variability and the effect of stresses on the phase composition in shape memory alloys*. Mechanics of Solids, 1998, Vol.33, No.1, Pp.64-72.
32. Movchan Andrey A., Mishustin Ilya V. *Nanostructural prediction of shape memory alloys resistance asymmetry*. Nanoscience and Technology: An International Journal, 2019, Vol.10, No.3, Pp.233-245.
33. Movchan A.A. *Torsion of prismatic beams from shape memory alloys*. Mechanics of Solids, 2000, No.6, Pp.119-128.
34. Mirzaeifar Reza, DesRoches Reginald, Yavari Arash. *A combined analytical, numerical, and experimental study of shape-memory-alloy helical springs*. International Journal of Solids and Structures, 2011, Vol.48, Pp.611-624.
35. Mirzaeifar Reza, DesRoches Reginald, Yavari Arash, Gall Ken. *Coupled thermo-mechanical analysis of shape memory alloy circular bars in pure torsion*. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2012, Vol.47, Pp.118-128.
36. Jong-Ha Chung, Jin-Seok Heo and Jung-Ju Lee. *Modeling and numerical simulation of the pseudoelastic behavior of shape memory alloy circular rods under tension-torsion combined loading*. Smart Mater. Struct., 2006, Vol.15, Pp.1651-1660.
37. Hyung Seop Kim. *Finite element analysis of torsional deformation*. Materials Science and Engineering, 2001, Vol.A299, Pp.305-308.
38. Mirzaeifar Reza, DesRoches Reginald, Yavari Arash. *Exact solutions for pure torsion of shape memory alloy circular bars*. Mechanics of Materials, 2010, Vol.42, Pp.797-806.
39. Saganov E.B. *Reshenie zadachi o pryamom martensitnom perekhode v sterzhne iz splava s pamyat'yu formy, nakhodyashhemsya pod dejstviem postoyannogo krutyashhego momenta [Solution of the problem of direct martensitic transition in rods from shape memory alloy under constant torque]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2014, Vol.20, No.3, Pp.454-468.
40. Saganov E.B. *Reshenie zadachi ob obratnom martensitnom perekhode v sterzhne iz splava s pamyat'yu formy, nakhodyashhemsya pod dejstviem postoyannogo krutyashhego momenta [Solution of the problem of reverse martensitic transition in rod from shape memory alloy under constant torque]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2014, Vol.20, No.4, Pp.663-674.
41. Saganov E.B. *Analiz napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya torsionnogo aktuatora iz splava s pamyat'yu formy pri rabochem khode v usloviyakh stesnennogo deformirovaniya [Analysis of the stress-strain state of a torsion*

- actuator made of an alloy with shape memory during a working stroke under constrained deformation*]. Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo instituta, 2015, Vol.22, No.1, Pp.109-116.
42. Saganov E.B. *Reshenie dvazhdy svyazannoj zadachi krucheniya tonkostennykh trubok iz splava s pamyat'yu formy v rezhime sverkhuprugosti [Solving the twofold related problem of torsion of thin-walled tubes from an alloy with shape memory in the superelastic mode]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2015, Vol.21, No.4, Pp.549-563.
  43. Saganov E.B. *Modelirovanie protsessov fazovykh i strukturnykh perekhodov pri kruchenii tonkostennykh trubok iz splava s pamyat'yu formy [Modeling of processes of phase and structural transitions during torsion of thin-walled tubes made of shape memory alloys]*. Mashinostroenie i inzhenernoe obrazovanie, 2016, No.1, Pp.2-9.
  44. Plietsch R., Bourauel C., Drescher D., Nellen B. *Analytical description of the bending behavior of NiTi shape-memory alloys*. Journal of Materials Science, 1994, Vol.29, No.22, Pp.5892-5902.
  45. Movchan A.A. *Coupling effects in bending problems for beams of a shape memory alloy*. Applied Mechanics and Technical Physics, 1998, Vol.39, No.1, Pp.143-151.
  46. Movchan A.A., Danilin A.N. *Solution the geometry non linear shape memory alloys beam bending problems at direct transformation*. Machinery Manufacture and Reliability, 2002, No.4, Pp.83-90.
  47. Flor D.L.S., Urbina C., Ferrando F. *Asymmetrical bending model for NiTi shape memory wires: Numerical simulations and experimental analysis*. Strain. An International journal for Experimental Mechanics, 2011, Vol.47, No.3, Pp.255-267.
  48. Young-Jin K., Chang-Ho L., Joung-Hun K., Jae H.L. *Numerical modelling of shape memory alloy plates considering tension/compression asymmetry and its verification under pure bending*. Solids and Structures, 2018, Vol.137, Pp.77-88.
  49. Safronov P.A. *Uchet raznosoprotivlyaemosti splavov s pamyat'yu formy pri reshenii zadach o martensitnoj neuprugosti i pryamom prevrashhenii v balke, nakhodyashhejsya pod dejstviem izgibayushhego momenta [Taking into account the different resistance of shape-memory alloys in solving problems of martensitic inelasticity and direct transformation in a beam under the action of a bending moment]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2016, Vol.22, No.1, Pp.114-127.
  50. Safronov P.A. *Reshenie zadach o martensitnoj neuprugosti i pryamom fazovom prevrashhenii v balke iz splava s pamyat'yu formy s uchetom uprugikh deformatsij i raznosoprotivlyaemosti ehtikh splavov [Solving the problems of martensitic inelasticity and direct phase transformation in a beam made of shape memory alloy, taking into account the elastic deformations and the different resistance of these alloys]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2017, Vol.23, No.1, Pp.69-89.
  51. Safronov P.A. *Reshenie svyaznoj zadachi o pryamom prevrashhenii v balke iz splava s pamyat'yu formy s uchetom raznosoprotivlyaemosti materiala [Solving the connected problem of direct transformation in a beam of a shape memory alloy, taking into account the material's SD effect]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2019, Vol.24, No.4, Pp.597-615.
  52. Safronov P.A. *Tension-compression asymmetry and elastic strain incorporating into the solution of the problem of martensitic nonelasticity and direct martensitic*

- transition in beams from a shape memory alloy undergoing bending*. Composites: Mechanics, Computations, Applications, 2018, Vol.9, No.2, Pp.119-139.
53. Young-Jin K., Chang-Ho L., Joung-Hun K., Jae H.L. *Numerical modelling of shape memory alloy plates considering tension/compression asymmetry and its verification under pure bending*. Solids and Structures, 2018, Vol.137, Pp.77-88.
  54. Safronov P.A. *Tsilindricheskij izgib plastinok iz splava s pamyat'yu formy s uchetom raznosoprotivlyaemosti etogo materiala [Cylindrical bending of plates made of shape memory alloy, taking into account the SD effect of this material]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2018, Vol.24, No.2, Pp.186-206.
  55. Movchan A.A., Sil'chenko L.G. *The stability of a circular plate of shape memory alloy during a direct martensite transformation*. Applied Mathematics and Mechanics, 2006, Vol.70, Pp.785-795.
  56. Sil'chenko L.G., Movchan A.A., Movchan I.A. *Structural transformation taken into account during the analysis of the stability of a round plate with shape memory*. Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2010, Vol.39, No.5, Pp.452-460.
  57. Movchan A.A., Mashixin A.E. *Deformatsii krugovogo tsilindra iz splava s pamyat'yu formy pri strukturnom perekhode ili pryamom fazovom prevrashhenii [Deformations of a circular cylinder made of shape memory alloy during a structural transition or direct phase transformation]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2012, Vol.18, No.2, Pp.235-247.
  58. Movchan A.A., Levin A.S. *Zadacha o pryamom martensitnom prevrashhenii v tolstostennoj sfere iz splava s pamyat'yu formy, nakhodyashhejsya pod dejstviem postoyannogo davleniya [The problem of direct martensitic transformation in a thick-walled sphere of a shape memory alloy that is subjected to a constant pressure]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2015, Vol.21, No.2, Pp.221-236.
  59. Mashikhin A.E., Movchan A.A. *Problem of Direct Martensite Transformation in a Thick-Walled Cylinder Made of Shape Memory Alloy*. Mechanics of Solids, 2016, Vol.51, No.3, Pp.321-333. DOI 10.3103/S0025654416030092.
  60. Mashikhin A.E., Movchan A.A. *Thermomechanical Boundary Problems for a Cylinder and Sphere Made of Shape Memory Alloy*. PNIPU Mechanics Bulletin, 2017, No.3, Pp.113-128.
  61. Mirzaeifar R., Shakeri M., DesRoches R., Yavari A. *A semi-analytic analysis of shape memory alloy thick-walled cylinders under internal pressure*. Archive of Applied Mechanics, 2011, Vol.81, No.8, Pp.1093-1116.
  62. Saganov E.B. *Chislennoe modelirovanie yavleniya martensitnoj neuprugosti v splavakh s pamyat'yu formy s uchetom ikh raznosoprotivlyaemosti [Numerical modeling of the phenomena of martensite inelasticity in shape memory alloys with account of their tension-compression asymmetry]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2019, Vol.25, No.2, Pp.281-294.
  63. Saganov E.B. *Reshenie zadachi o tolstostennom tsilindre iz splava s pamyat'yu formy, nakhodyashhemsya pod davleniem, s uchetom raznosoprotivlyaemosti [Solution of the problem of a thick – walled cylinder under pressure from shape memory taking into account of tension – compression asymmetry]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2019, Vol.25, No.4, Pp.563-573.
  64. Movchan A.A. *Coupling effects in bending problems for beams of a shape memory alloy*. Applied Mechanics and Technical Physics, 1998, Vol.39, No.1, Pp.143-151.

65. Movchan A.A. *Analytical solution of problems on the direct and inverse transformations in shape memory alloys*. Mechanics of Solids, 1996, Vol.31, No.4, Pp.116-123.
66. Movchan A.A. *Some manifestation of the capability to oriented transformation for shape memory alloys*. Applied Mechanics and Technical Physics, 1996, Vol.37, No.6, Pp.926-933.
67. Dubkov A.A., Agudov N.V. *Преобразование Лапласа: Учебно-методическое пособие. [Laplace transformation]*. Nizhnij Novgorod, Nizhegorodskij gosudarstvennyj universitet, 2016, 36 p.
68. Feodos'ev V.I. *Soprotivlenie materialov [Strength of material]*. Moskva, Izdatel'stvo MGTU im. N.Eh. Baumana, 1999, 592 p.

Поступила в редакцию 01 ноября 2019 года.

---

Сведения об авторе:

Бобок Денис Игоревич – магистрант, Кафедра «Проектирование и прочность авиационно-ракетных и космических изделий», ФГБОУ ВО Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия; e-mail: [denis199750@gmail.com](mailto:denis199750@gmail.com)