УДК 539.3
DOI 10.33113/mkmk.ras.2020.26.01.098_107.06

РАСЧЕТНЫЕ МОДЕЛИ ИЗГИБА БАЛКИ С УЧЕТОМ ДЕФОРМАЦИИ СДВИГА

Фирсанов Вик.В.

ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Классическая модель изгиба балки построена на гипотезах Бернулли: предполагается отсутствие поперечной линейной деформации, сдвиговой деформации в плоскости xy, где x – продольная, а y – поперечная координаты балки, и отсутствие поперечного нормального напряжения. При этом, и поперечное нормальное, и касательное напряжения сохраняются в уравнениях равновесия, поскольку без них задача изгиба балки не имеет решения. Выполнением соответствующих физических соотношений пренебрегают.

Для изотропного и ортотропного линейно упругих материалов сдвиговая деформация определяется делением касательного напряжения на модуль сдвига. Чем больше модуль сдвига, например по сравнению с модулем упругости при растяжении и изгибе, тем мы ближе к гипотезе отсутствия сдвиговых деформаций, и, наоборот, чем меньше модуль сдвига, тем проблематичней использование указанной гипотезы. Особенно это актуально для задачи изгиба ортотропных пластин, не армированных в поперечном направлении. В этом случае модули сдвига в поперечном направлении в основном определяются свойствами слабого связующего и могут быть значительно меньше физических характеристик ортотропного пакета с плоскостным армированием.

В балке армирование осуществляется в плоскости xy, и если в поперечном направлении балку можно не армировать из-за слишком малого нормального поперечного напряжения, то небольшое количество слоёв под углами $\pm\alpha$ необходимо добавить к пакету, так как изгибаемая балка работает также на сдвиг. Поэтому модуль сдвига определяется не только связующим, но и армирующими волокнами, и может быть соизмерим с модулем упругости, и быть в несколько раз меньше, в зависимости от количества армирующих волокон.

Целью работы является оценка влияния сдвиговой деформации на напряжённо-деформированное состояние балки.

Ключевые слова: балка; изгиб; напряжение; деформация; прогиб; перемещение модель; гипотезы; граничные условия; уравнения

COMPUTATIONAL MODELS OF BEAM BENDING TAKING INTO ACCOUNT SHEAR DEFORMATION

Firsanov Vic.V.

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

ABSTRACT

The classical model of beam bending is based on Bernoulli's hypotheses: there is no transverse linear strain, no shear strain in the xy plane, where x is the longitudinal and y

is the transverse coordinates of the beam, and no transverse normal stress. At the same time, both the transverse normal and tangent stresses are preserved in the equilibrium equations, since without them the problem of bending the beam has no solution. Implementation of the corresponding physical relations is neglected.

For isotropic and orthotropic linear elastic materials, the shear strain is determined by dividing the tangent stress by the shear modulus. The larger the shear modulus, for example, compared to the elastic modulus in tension and bending, the closer we are to the hypothesis of no shear deformations, and Vice versa, the smaller the shear modulus, the more problematic the use of this hypothesis. This is especially true for the problem of bending orthotropic plates that are not reinforced in the transverse direction. Then the shear modules in the transverse direction are mainly determined by the properties of the weak binder and can be significantly less than the physical characteristics of an orthotropic package with planar reinforcement.

In a beam, the reinforcement is carried out in the xy plane, and if the beam cannot be reinforced in the transverse direction due to too small a normal transverse stress, then a small number of layers at $\pm\alpha$ angles must be applied, since the bent beam also works for shear.

Therefore, the shear modulus is determined not only by the binder, but also by the reinforcing fibers, and can be commensurate with the elastic modulus, and be several times smaller, depending on the number of reinforcing fibers.

The aim of the work is to assess the effect of shear deformation on the stress-strain state of the beam.

Keywords: beam; bend; stress; strain; deflection; displacement; model; hypotheses; boundary conditions; equations

ВВЕДЕНИЕ

Все неклассические теории изгиба балок и пластинок предусматривают отступление от классических гипотез Бернулли для балок и Кирхгофа для пластинок, чрезвычайно близких по сути и значительно упрощающих систему определяющих уравнений задачи. Выдающийся механик Тимошенко С.П. одним из первых предложил отказаться от гипотезы отсутствия сдвига в теории изгиба пластин и ввёл понятие осреднённой сдвиговой деформации, что привело к появлению на основаниях пластинки нежелательной касательной нагрузки [1,2], незначительно влияющей на общее напряжённо-деформированное состояние. С появлением композиционных материалов проблема построения неклассических моделей изгиба балок и пластин стала ещё более актуальной из-за наличия в композитной структуре очень слабого в физическом отношении связующего. Появились работы как в отечественной, так и в зарубежной научной периодике, характерным для которых является поиск непротиворечивых моделей [3-5]. В работе [6] представлен общий подход к построению моделей изгиба пластин в энергетически согласованных функциях. Для перехода к одномерной дифференциальной задаче в балках или двумерной в пластинках предлагается аппроксимировать искомые перемещения степенными функциями по поперечной координате, которые не могут задаваться произвольно для получения корректных результатов.

В представленной работе последовательно в порядке усложнения рассмотрены две модели изгиба балки постоянной нагрузкой при симметричных относительно середины граничных условиях, в которых искомые перемещения аппроксимируются по толщине степенными функциями. При выводе уравнений предполагалась независимость модулей упругости и сдвига.

<u>Модель №1</u>. Зададим упругие перемещения (продольные и поперечные) в балке, изгибаемой постоянной нагрузкой, распределенной по верхней протяженной границе, в виде

$$u = u_0(x)\,y,\ \ v = v_0(x),$$

где $u_0(x)$ не связано с $v_0(x)$, как в классической теории.

В рассматриваемой модели используются две классические гипотезы: $\sigma_y = 0$ и $\varepsilon_y = 0$, а сдвиговая деформация γ_{xy} не равна нулю.

Определим деформации, используя соотношения Коши

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = u_0' y,\quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = u_0 + v_0'$$

и напряжения из физических соотношений

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = Eu_0' y,\quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy} = G\left(u_0 + v_0'\right). \tag{1}$$

Отметим, что граничные условия отсутствия касательных напряжений на верхней и нижней протяженных границах балки не может быть удовлетворены в рамках этой модели. В этом случае будем иметь растягивающие или сжимающие касательные усилия на протяженных сторонах, влияющее на общее напряженное состояние, и, возможно, влияющие на изгибное состояние и значение прогиба.

Уравнения равновесия бесконечно малого элемента балки в отсутствие объемных сил

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0,\quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \tag{2}$$

запишем в перемещениях с помощью (1)

$$Eu_0'' y = 0 \text{ или } u_0'' = 0,$$

$$\text{откуда } u_0 = ax + b. \tag{3}$$

$$G\left(u_0' + v_0''\right) + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0.$$

Определим σ_y, проинтегрировав последнее равенство

$$\sigma_y = -G\left(u_0' + v_0''\right)y + \varphi(x).$$

Произвольную функцию интегрирования $\varphi(x)$ определим из граничных условий

$$\sigma_y = -q\,\Big|_{y=\frac{h}{2}},\quad \sigma_y = 0\,\Big|_{y=-\frac{h}{2}},\quad \varphi(x) = -\frac{q}{2},$$

$$\sigma_y = -G\left(u_0' + v_0''\right)y - \frac{q}{2}.$$

Из граничного условия для σ_y получим дифференциальное уравнение относительно двух искомых функций u_0 и v_0

$$u_0' + v_0'' = \frac{q}{Gh}. \tag{4}$$

Подставляя сюда (3) и дважды интегрируя по x, получим

$$v_0 = \left(\frac{q}{Gh} - a\right)\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2.$$

Здесь и в (3) a, b, C_1, C_2 – константы интегрирования, определяемые из граничных условий.

Рассмотрим случай, когда балка жёстко закреплена по торцам, а начало координат находится в середине балки. Из-за симметрии $C_1 = b = 0$.

Выполняя граничное условие $v = 0$ при $x = \pm l$ определим C_2 и получим решение для функции прогиба и продольное перемещение с неопределённой константой a

$$v_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{q}{Gh} - a\right)\left(x^2 - l^2\right)$$

$$u = axy.$$

Если точно выполнить условие $u = 0$ при $x = \pm l$, то необходимо положить $a = 0$. Тогда $u = 0$ всюду, включая границы, а, следовательно $\sigma_x = M_x = 0$, что не соответствует задаче изгиба балки. Граничные условия для продольного перемещения выполняются интегрально, но тогда константа a остается неопределенной, поэтому приведенное решение неприемлемо для рассматриваемой задачи.

Касательное напряжение τ_{xy} не зависит от поперечной координаты y, поэтому производная $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}$ равна нулю в первом уравнении системы (2), но интегральная характеристика напряженного состояния Q_x не равна нулю.

Пренебрегая точным выполнением первого уравнения системы (2), перейдём к интегральным характеристикам, изгибающему моменту M_x и перерезывающей силе Q_x , и выполним условие равновесия для элемента балки шириной h

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0,$$

где

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x y dy = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E u_0' y^2 dy = E u_0' \frac{h^3}{12},$$

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} dy = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G\left(u_0' + v_0''\right) dy = G\left(u_0 + v_0'\right) h.$$

Запишем приведенное дифференциальное уравнение в перемещениях и добавим к нему второе уравнение равновесия в перемещениях (4). Получим систему уравнений для определения искомых неизвестных u_0 и v_0

$$u_0'' - \frac{12G}{Eh^2}\left(u_0 + v_0'\right) = 0,$$

$$u_0' + v_0'' = \frac{q}{Gh}.$$

Интегрируя эту систему, выполняя граничные условия жёсткого закрепления по торцам и учитывая симметрию относительно середины балки, получим

$$u_0 = \frac{2q}{Eh^3} x\left(x^2 - l^2\right) y ,$$

$$v_0 = -\frac{q}{2Eh^3}\left(x^2 - l^2\right)^2 + \frac{q}{2Gh}\left(x^2 - l^2\right).$$

Решение для продольных перемещений и первое слагаемое в решении для прогиба полностью совпадают с классическим решением. Проведём оценку влияния второго слагаемого на значение прогиба в середине балки при $x = 0$

$$v_{0\max} = \frac{ql^4}{2Eh^3} + \frac{ql^2}{2Gh}.$$

Обозначим первое слагаемое v_{01}, второе v_{02}, модуль упругости E_x, а модуль сдвига G_{xy} для композиционной балки и определим отношение $\frac{v_{02}}{v_{01}}$

$$\frac{v_{02}}{v_{01}} = \frac{E_x}{G_{xy}} \frac{h^2}{l^2}. \tag{5}$$

Если принять $G_{xy} = 0,2E_x$, а $\frac{h}{l} = 0,2$, то $\frac{V_{02}}{V_{01}} = 0,2$, то есть, имеем уточнение в 20% по сравнению с классическим решением. Чем меньше модуль сдвига G_{xy} по отношению к E_x при одинаковом соотношении ширины и длины балки, уточнение будет еще более значительным. При одинаковом соотношении $\frac{E_x}{G_{xy}}$ и уменьшении отношения $\frac{h}{l}$ уточнение может быть (при достаточно большой длине) пренебрежимо малым.

В качестве недостатка модели отметим невозможность выполнить граничные условия для касательных напряжений на протяженных границах балки. Положительным результатом является уточнение значения прогиба, зависящее от соотношения геометрических и жесткостных параметров материала балки.

<u>Модель №2</u>. Модель №1 усложним добавлением по одному слагаемому в представление продольных перемещений и прогиба

$$u = u_0(x)y + u_1(x)y^3,\ v = v_0 + v_1 y^2.$$

При таком представлении перемещений деформация в поперечном направлении ε_y не равна нулю, но нормальный элемент балки в процессе деформирования не меняет своей длины. Аппроксимации по координате y являются «согласованными» [1]. Для продольного перемещения удержаны нечётные степени поперечной координаты, поскольку указанное перемещение при изгибе балки имеет разные знаки в волокнах, расположенных выше и ниже нейтральной линии.

Принимая гипотезу о ненадавливаемости волокон балки в поперечном направлении, полагая в физических соотношениях $\sigma_y = 0$, запишем определяющие соотношения задачи:

деформации

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = u_0' y + u_1' y^3,$$
$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 2v_1 y,$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = u_0 + v_0' + \left(3u_1 + v_1'\right) y^2.$$

напряжения

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E\left(u_0' y + u_1' y^3\right),$$
$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = G\left(u_0 + v_0' + \left(3u_1 + v_1'\right) y^2\right).$$

Эти соотношения подставим в уравнения равновесия плоской задачи (2) и получим уравнения равновесия в перемещениях, куда войдут все искомые кинематические неизвестные задачи $u_0,\ u_1,\ v_0,\ v_1$

$$\left(u_0'' + \frac{2G}{E}\left(3u_1 + v_1'\right)\right) y + u_1'' y^3 = 0,$$
$$G\left(u_0' + v_0'' + \left(3u_1' + v_1''\right) y^2\right) + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0.$$

Из второго уравнения этой системы определим σ_y, а после выполнения граничных условий $\sigma_y\big|_{y=\frac{h}{2}} = -q$ и $\sigma_y\big|_{y=-\frac{h}{2}} = 0$ получим удобное для интегрирования дифференциальное уравнение

$$u_0' + v_0'' + \left(3u_1' + v_1''\right)\frac{h^2}{12} = \frac{q}{Gh}.$$

Еще одно дифференциальное уравнение получим при удовлетворении граничных условий отсутствия касательной нагрузки на протяжённых границах балки $\tau_{xy}\big|_{y=\pm\frac{h}{2}} = 0$

$$u_0 + v_0' + \left(3u + v_1'\right)\frac{h^2}{4} = 0.$$

Таким образом, система разрешающих уравнений задачи изгиба балки при использовании принятых гипотез имеет вид

$$\left(u_0'' + \frac{2G}{E}\left(3u_1 + v_1'\right)\right) y + u_1'' y^3 = 0,$$
$$u_0' + v_0'' + \left(3u_1' + v_1''\right)\frac{h^2}{12} = \frac{q}{Gh}, \qquad (6)$$
$$u_0 + v_0' + \left(3u_1 + v_1'\right)\frac{h^2}{4} = 0.$$

Имеем три уравнения и четыре искомых неизвестных, но первое уравнение системы (6) распадается на два уравнения, так как для выполнения этого уравнения необходимо приравнять нулю оба слагаемых, содержащих y в разной степени

$$u_0'' + \frac{2G}{E}\left(3u_1 + v_1'\right) = 0,$$
$$u_1'' = 0.$$

В результате интегрирования системы уравнений (6) получим решение для искомых функций с точностью до произвольных констант

$$u_0 = -\frac{2G}{E}\left(-\frac{qx^3}{Gh^3} + \left(3b + C_1\right)\frac{x^2}{2}\right) + C_3x + C_4,$$

$$v_0 = -\frac{q}{2Eh^3}x^4 + \left(2b + C_1\right)\left(\frac{G}{3E}x^3 + \frac{h^2}{4}x\right) + \frac{3q}{4Gh}x^2 - C_3\frac{x^2}{2} - C_4x + C_5,$$

$$v_1 = -\left(\frac{6q}{Gh^3} + 3a\right)\frac{x^2}{2} + C_1x + C_2,$$

$$u_1 = ax + b.$$

Рассмотрим те же граничные условия, что и в предыдущей задаче, и так же используем симметрию задачи относительно середины балки $x = 0$. Тогда константы интегрирования $C_1 = b = C_4 = 0$, как не соответствующие симметрии. Остальные константы определим из условий жесткого закрепления торцов балки.

Потребуем, чтобы при $x = \pm l,\ u_0 = 0,\ v_0 = v_1 = 0$. При этом $u_1 \neq 0$, но условие $u_1 = 0$ при $x = \pm l$ выполняется интегрально, поэтому константу a оставляем неопределённой до анализа окончательного решения рассматриваемой задачи.

После определения констант из граничных условий решение для основных искомых функций будет выглядеть следующим образом

$$u = \frac{2q}{Eh^3}\left(x^2 - l^2\right)xy + axy^3,$$

$$v = -\frac{q}{2Eh^3}\left(x^2 - l^2\right)^2 + \frac{3q}{4Gh}\left(x^2 - l^2\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{6q}{Gh^3} + 3a\right)\left(x^2 - l^2\right)y^2.$$

Заметим, что если положить $a = 0$, то прогиб нейтральной линии балки $\left(y = 0\right)$ будет, пусть незначительно, но всё же больше, чем прогиб на протяженных границах

$$v|_{y=0} = -\frac{q}{2Eh^3}\left(x^2 - l^2\right)^2 + \frac{3q}{4Gh}\left(x^2 - l^2\right),$$

$$v|_{y=\pm\frac{h}{2}} = -\frac{q}{2Eh^3}\left(x^2 - l^2\right)^2.$$

Поэтому уточнение классической модели можно осуществить, анализируя прогиб нейтральной линии балки. Но более корректным действием будет уравнивание функции прогиба на протяжённых границах и прогиба нейтральной линии, а это возможно только в случае $a = -\dfrac{2q}{Gh^3}$ или $v_1\left(x\right) = 0$.

Тогда

$$u = \frac{2q}{Eh^3}\left(x^2 - l^2\right)y - \frac{2q}{Gh^3}xy^3,$$
$$v = -\frac{q}{2Eh^3}\left(x^2 - l^2\right)^2 + \frac{3q}{4Gh}\left(x^2 - l^2\right). \qquad (7)$$

Первые слагаемые в выражениях для продольных и поперечных перемещений полностью совпадают с классическим решением рассматриваемой задачи.

Определим максимальный прогиб в центре балки при $x = 0$

$$v_{\max} = \frac{ql^4}{2Eh^3} + \frac{3ql^2}{4Gh}.$$

Оценим вклад второго слагаемого по отношению к классическому, представленному первым слагаемым.

Для металлических балок $\frac{E}{G} = 2,6$. Примем $\frac{l}{h} = 5$ и обозначим первое слагаемое $v_{\max 1}$, а второе $v_{\max 2}$

$$\frac{v_{\max 2}}{v_{\max 1}} = \frac{3}{2}\frac{E}{G}\left(\frac{h}{l}\right)^2 \approx 0,156$$

или около 16% уточнения по сравнению с классическим решением.

Для композита соотношение $\frac{E_x}{G_{xy}}$ может быть значительно больше, но даже при $\frac{E_x}{G_{xy}} = 5$, получим уточнение в 32% по отношению к классическому прогибу. Сравнивая полученный результат с тем, что представлен соотношением (5) первой рассмотренной модели, отметим, что вторая модель дает еще большее уточнение прогиба балки, примерно на 12%.

В качестве варианта можно удовлетворить первое уравнение системы (6) интегрально, но в этом случае мы получим систему из трёх уравнений относительно четырёх неизвестных, то есть, задача будет недоопределённой. И для ее решения одну из искомых функций необходимо задавать. К первому уравнению системы (6) добавим и вычтем слагаемое $Cu_1''y$, а константу C определим из условия ортогональности $\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\left(y^3 - Cy\right)ydy = 0$. Отсюда $C = \frac{3h^2}{20}$. Тогда вместо первого уравнения системы (6) используем следующее уравнение

$$\left(u_0 + \frac{3h^2}{20}u_1\right)'' + \frac{2G}{E}\left(3u_1 + v_1'\right) = 0. \qquad (8)$$

Обозначим

$$u_0 + v_0' = \varphi, \quad \left(3u_1 + v_1'\right) = \psi, \quad \left(u_0 + \frac{3h^2}{20}u_1\right)'' = \chi, \qquad (9)$$

где φ, ψ и χ – неизвестные функции продольной координаты.

Система уравнений (6) с учётом (8) преобразуется к виду

$$\chi'' + \frac{2G}{E}\psi = 0,$$

$$\varphi' + \psi'\frac{h^2}{12} = \frac{q}{Gh},$$

$$\varphi + \psi\frac{h^2}{4} = 0.$$

Проинтегрировав эту систему уравнений и определив три искомые функции с точностью до произвольных констант интегрирования, подставим полученное решение в соотношения (9), получим систему из трёх дифференциальных уравнений относительно четырёх неизвестных. Как и ранее, положим $v_1 = 0$, проинтегрируем полученную систему, произвольные константы интегрирования определим, удовлетворяя заданным граничным условиям. Полученное решение полностью совпадает с уже известным решением (7).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Каждая из представленных моделей расчёта балки на изгиб имеет свои достоинства и недостатки.
2. В первой, упрощённой, модели не удаётся удовлетворить граничные условия на протяжённых границах для касательных напряжений, но граничные условия жёсткого защемления на торцах удовлетворяются точно.
3. Во второй, немного усложнённой модели, граничные условия на протяжённых границах удовлетворяются точно, а продольное перемещение на торцах первым слагаемым удовлетворяет точно, а вторым слагаемым интегрально.
4. Обе модели дают решения, уточняющие значения прогиба по сравнению с классическим решением, причём вторая модель даёт больший уточняющий эффект по прогибу.
5. Для получения решения, которое позволит точно удовлетворить всем граничным условиям задачи, необходимо усложнение модели расчёта.
6. Обе модели дают уточнённое решение для балки из изотропного материала, а для композитной балки уточняющий эффект ещё выше.
7. Эти модели могут быть полезны для получения более точного решения для пластин из композиционного материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. *Пластинки и оболочки.* – М.: Наука, 1966. – 636 с.
2. Васильев В.В. *Механика конструкций из композиционных материалов.* – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.
3. Васильев В.В., Лурье С.А. *Вариант уточненной теории изгиба балок из слоистых пластмасс* // Механика полимеров. – 1972. – №4. – С.577-768.
4. Carrera E., Giunta G., Petrolo M. *Beam Structures: Classical and Advanced Theories.* – Wiley, 2011. – 204 p.
5. Altenbach H., Chróścielewski J., Eremeyev V.A., Wiśniewski K. (Eds.) *Recent Developments in the Theory of Shells.* – Springer, 2019. – 799 p.

6. Васильев В.В., Лурье С.А. *К проблеме построения неклассических теорий пластин* // Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела. – 1990. – №2. – С.158-167.

REFERENCES

1. Timoshenko S.P., Voynovskiy-Kriger S. *Plastinki i obolochki [Plates and shells]*. Moskva, Nauka, 1966, 636 p.
2. Vasil'yev V.V. *Mekhanika konstruktsij iz kompozitsionnykh materialov [Mechanics of structures made of composite materials]*. Moskva, Mashinostroenie, 1988, 272 p.
3. Vasil'ev V.V., Lur'e S.A. *Variant utochnennoj teorii izgiba balok iz sloistykh plastmass [A variant of the refined theory of bending beams made of laminated plastics]*. Mekhanika polimerov, 1972, No.4, Pp.577-768.
4. Carrera E., Giunta G., Petrolo M. *Beam Structures: Classical and Advanced Theories.* Wiley, 2011, 204 p.
5. Altenbach H., Chróścielewski J., Eremeyev V.A., Wiśniewski K. (Eds.) *Recent Developments in the Theory of Shells.* Springer, 2019, 799 p.
6. Vasil'ev V.V., Lur'e S.A. *K probleme postroeniya neklassicheskikh teorij plastin [On the problem of constructing non-classical plate theories]*. Izvestiya Akademii nauk SSSR. Mekhanika tvyordogo tela, 1990, No.2, Pp.158-167.

Поступила в редакцию 19 февраля 2020 года.

Сведения об авторе:

Фирсанов Виктор Васильевич – к.т.н., доц., Кафедра «Проектирование и прочность авиационно-ракетных и космических изделий», ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт» (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия; e-mail: kaf603@mai.ru