УДК 531.01
DOI 10.33113/mkmk.ras.2020.26.01.122_138.08

СВЯЗАННАЯ ЗАДАЧА КОНСОЛИДАЦИИ В НЕЛИНЕЙНОЙ ПОСТАНОВКЕ. ТЕОРИЯ И МЕТОД РЕШЕНИЯ*

Артамонова Н.Б., Шешенин С.В.

ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Задачи консолидации связаны с изучением деформирования грунта под нагрузкой при наличии оттока жидкости. При совместном деформировании пористого скелета и содержащейся в порах жидкости происходит взаимодействие твердой и жидкой фаз грунта. Фильтрационные процессы в грунтовом массиве описываются связанной системой дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами. Для решения таких уравнений используется осреднение по представительной области.

В работе уравнения нелинейной модели консолидации записаны из общих законов сохранения механики сплошной среды (уравнения равновесия, закона сохранения масс твердой и жидкой фаз грунта и закона фильтрации Дарси) с применением пространственного осреднения по представительной области. Были приняты следующие предположения: фильтрующаяся жидкость заполняет поры целиком, жидкость ньютоновская и однородная, деформация жидкости при изменении порового давления подчиняется закону баротропии, материал скелета грунта несжимаем. Для определения эффективных свойств возможен подход, основанный на решении локальных задач в представительной области.

В результате получена связанная физически и геометрически нелинейная формулировка краевой задачи при использовании подхода Лагранжа с адаптацией для твердой фазы и подхода ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) для жидкости в предположении квазистатического деформирования каркаса.

В методе решения связанной задачи осуществляется линеаризация вариационных уравнений в сочетании с внутренними итерациями по методу Узавы для связывания на каждом шаге по времени. Для пространственной дискретизации используется метод конечных элементов: элементы трилинейного типа для аппроксимации собственно уравнения фильтрации и квадратичные элементы для аппроксимации уравнений равновесия. Для учета сил инерции может применяться неявная схема по времени.

Ключевые слова: связанная задача консолидации; нелинейное деформирование; закон Дарси; модель Био; тензор передачи порового давления; тензорный параметр Био; вариационная формулировка; седловая система; итерационный решатель

COUPLING CONSOLIDATION PROBLEM IN A NONLINEAR FORMULATION. THEORY AND METHOD OF SOLUTION

Artamonova N.B., Sheshenin S.V.

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

---

* *Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №20-01-00431_а).*

ABSTRACT

The consolidation problems are related to the study of soil deformation under load in the presence of fluid outflow. In the process of joint deformation of the porous skeleton and the fluid contained in the pores, the solid and liquid phases of the soil interact. The filtration processes in the soil mass are described by a coupling system of differential equations with rapidly oscillating coefficients. To solve such equations, averaging over the representative volume element (RVE) is used.

In the paper, the equations of the nonlinear consolidation model are written from the general laws of conservation of continuum mechanics (the equilibrium equation, the law of mass conservation of solid and liquid phases of the soil, and Darcy's filtration law) using spatial averaging over the representative volume element. The following assumptions were made: the fluid fills the pores entirely, the fluid is Newtonian and homogeneous, the deformation of the fluid with a change in pore pressure obeys the law of barotropy, and the soil skeleton material is incompressible. To determine effective properties, an approach based on solving local problems in a representative volume element is possible.

As a result, a coupled physically and geometrically nonlinear formulation of the boundary value problem was obtained using the Lagrange approach with adaptation for the solid phase and the ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) approach for the fluid under the assumption of quasistatic deformation of the rock skeleton.

In the method of solving the coupled problem, linearization of variational equations is carried out in combination with internal iterations according to the Uzawa method for connecting at each time step. For spatial discretization, the finite element method is used: trilinear type elements for approximating the filtration equation and quadratic elements for approximating the equilibrium equation. An implicit time scheme can be used to take into account the inertia forces.

Keywords: coupling consolidation problem; nonlinear deformation; Darcy's law; Biot’s model; pore pressure transfer tensor; Biot’s tensor parameter; variational formulation; saddle system; iterative solver

ВВЕДЕНИЕ

Задачи совместного деформирования грунта и движения жидкости могут решаться в несвязанной постановке (упругий режим фильтрации) и в связанной постановке. При решении задач об откачке нефти из глубоких скважин упругий режим фильтрации бывает вполне достаточен. Задачи о деформировании водонасыщенного грунта под нагрузкой, как правило, решаются в связанной постановке. Метод конечных элементов – наиболее широко используемый метод для решения задач консолидации [1-8].

Большинство разработанных моделей консолидации базируются на моделях фильтрации, линейной теории упругости или упруго-пластичности для малых деформаций [1,9-11]. Нелинейные реакции геотехнических элементов конструкций, как правило, возникают в результате пластических умеренно больших деформаций скелета грунта. Влияние конечных деформаций обычно проявляется в глинистых грунтах под нагрузкой, где деформации развиваются во времени с гидродинамическим запаздыванием и зависят от скорости оттока жидкости из грунта. Обобщения классических уравнений консолидации на большие деформации в основном базируются на использовании определяющих соотношений в скоростях [12,13]. Используется также мультипликативное разложение градиента деформации [2,3,8,14].

В последнее время взаимодействие между течением жидкости и скелетом грунта моделируется с использованием различных связанных схем. В связанном методе уравнение фильтрации и уравнение равновесия среды решаются одномоментно на каждом шаге по времени [15,16]. В итерационно связанном методе осуществляются последовательные схемы решения. Сначала решается или задача фильтрации, или механическая задача, а потом решается другая задача, используя результат решения первой [4,5,15-18]. Итерационно связанные последовательные методы могут использовать независимые решатели механики сплошных сред и средства моделирования пластового потока, развитые в нефтяной промышленности [8].

При решении связанных динамических задач консолидации различные исследователи часто используют метод ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) для исправления сильно искаженной лагранжевой сетки [19-22], что приводит к перестроению сетки и, соответственно, к некоторой потере точности решения. Следует отметить, что в нашей работе метод ALE используется только для объединения эйлерова и лагранжева подходов и не связан с перестроением лагранжевой сетки.

1. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МОДЕЛИ КОНСОЛИДАЦИИ

В фильтрационном потоке одна часть пространства занята жидкостью, а другая – твердой фазой грунта. Жидкость будем считать ньютоновской и однородной. Предполагается, что жидкость заполняет весь объем пустот в грунте.

Задача консолидации решается на макроуровне. Результатом осреднения является пространство, заполненное одновременно жидкостью и твердой фазой, частицы которых движутся со своими скоростями. В случае геометрически и физически нелинейной среды пористость зависит от перемещений в грунте: $n = n\left(\vec{u}\left(\vec{x},t\right)\right)$. В нашей работе связанная система уравнений модели консолидации включает три уравнения в частных производных – уравнение равновесия, уравнение фильтрации и уравнение изменения пористости относительно трех неизвестных функций: перемещения каркаса грунта, давления жидкости и пористости. Нужно заметить, что известны постановки, в которых неизвестными являются и давление, и скорость жидкости.

Уравнение равновесия в текущей конфигурации в терминах эффективных напряжений имеет вид

$$\vec{\nabla}\cdot\underset{\sim}{\sigma}^{eff}\left(\vec{u}\right)-\alpha\vec{\nabla}p+\rho\vec{f}=0,\quad \vec{x}\in V, \tag{1.1}$$

Здесь $\rho=\left(1-n\right)\rho_s+n\rho_f$ – средняя плотность грунта, $\rho_s=\rho_s\left(\vec{x}\right)$ и $\rho_f=\rho_f\left(\vec{x}\right)$ – средние по представительной области плотности твердой фазы грунта и жидкости соответственно, $\vec{f}$ – массовая сила, p – среднее давление жидкости, $\vec{u}$ – средние перемещения в твердой фазе грунта, $\underset{\sim}{\sigma}^{eff}$ – эффективные напряжения

$$\underset{\sim}{\sigma}^{eff}=\underset{\sim}{\sigma}+\alpha p\underset{\sim}{I}=\left(1-n\right)\underset{\sim}{\sigma}_s-\left(n-\alpha\right)p\underset{\sim}{I},$$

$\underset{\sim}{\sigma}$ – среднее полное напряжение, $\underset{\sim}{\sigma}^s$ – осредненные напряжения в твердой фазе грунта, α – параметр Био (коэффициент передачи порового давления) [23,24]

$$\alpha=1-\beta_s/\beta^{\mathrm{eff}},$$

β_s – сжимаемость материала скелета грунта, β^{eff} – эффективная сжимаемость грунта. Скалярный безразмерный коэффициент α принимает значения от 0 до 1 в зависимости от пористости и упругих свойств твердой составляющей грунта. Коэффициент α показывает, какая часть порового давления является активной при формировании макроскопических деформаций. Для анизотропных сред $\boldsymbol{\alpha}$ является тензорным параметром.

Уравнения фильтрации и изменения пористости выводятся на основе объединения уравнения, характеризующего режим фильтрации, уравнения состояния жидкости и уравнений неразрывности. Для большинства задач геомеханики уравнение, характеризующее режим фильтрации, – это закон Дарси. Для медленных течений жидкости $(\text{Re} \ll 1)$ закон Дарси имеет вид

$$\vec{v} = -\frac{\underset{\sim}{k}}{n\mu} \cdot \vec{\nabla} p + \frac{d\vec{u}}{dt}, \tag{1.2}$$

$\vec{v}$ – средняя по представительной области скорость движения жидкости, $\underset{\sim}{k}$ – тензор коэффициентов проницаемости пористой среды, μ – динамический коэффициент вязкости фильтрующейся жидкости, t – время, Re – число Рейнольдса.

Для быстрых течений $(\text{Re} \gg 1)$ закон фильтрации становится нелинейным относительно градиента давления жидкости. Например, в [25] приведено уравнение Форхгеймера для одномерной фильтрации жидкости

$$\frac{\Delta p}{L} = a\left(\frac{q}{nA}\right) + b\left(\frac{q}{nA}\right)^2 = aw + bw^2, \;\; w = v - \frac{du}{dt}, \tag{1.3}$$

q – объемный расход жидкости, A – поперечное сечения образца, w – относительная скорость движения жидкости, L – длина образца, a и b – постоянные, зависящие от свойств жидкости и пористой среды. Уравнение вида (1.3) хорошо описывает экспериментальные данные, полученные для достаточно больших скоростей течения при наличии инерциальных эффектов [25]. Его можно преобразовать следующим образом. Выразим из (1.3) скорость w

$$w = -\frac{a}{2b} + \frac{a}{2b}\sqrt{1 + \frac{4b}{a^2}\left(\frac{\Delta p}{L}\right)}.$$

После разложения выражения с корнем в ряд Тейлора до второй степени получаем одномерный закон фильтрации, нелинейный относительно градиента давления $(\Delta p/L)$

$$w = \frac{1}{a}\left(\frac{\Delta p}{L}\right) - \frac{b}{a^3}\left(\frac{\Delta p}{L}\right)^2.$$

В работе [26] для описания трехмерной фильтрации жидкости с большими скоростями течения $(\text{Re} \gg 1)$ предлагается уравнение вида

$$gradp = -\frac{\mu n}{k}\vec{w} - \beta \rho_f n^2 \frac{|\vec{w}|}{\sqrt{k}}\vec{w} = -f\left(|\vec{w}|\right)\vec{w},$$

β – безразмерный параметр, зависящий от формы пор, k – коэффициент проницаемости. Его обращение вполне естественно сформулировать в виде

$$\vec{w} = -g\left(|gradp|\right) gradp.$$

Однако для задач консолидации справедлив закон Дарси в виде (1.2), так как отток жидкости происходит медленно [27-32]. Как показал анализ литературных данных [33,34], в расчетах следует полагать

$$\mu = const \ \text{ при } T = const\,,\ \ Q = const\,,\ \ \underset{\sim}{k} = \underset{\sim}{k}\left(I_1\left(\underset{\sim}{\sigma}^{eff}\right)\right),$$

T – температура, Q – минерализация, $I_1\left(\underset{\sim}{\sigma}^{eff}\right)$ – первый инвариант тензора эффективных напряжений. Следовательно, закон Дарси (1.2) является нелинейным из-за изменения пористости и проницаемости в процессе деформирования грунта.

Будем предполагать, что процесс деформирования жидкости является изотермическим, а изменение плотности жидкости при изменении порового давления p подчиняется закону баротропии

$$\frac{d\rho_f}{\rho_f} = \beta_f dp, \tag{1.4}$$

β_f – сжимаемость жидкости. Согласно [35], при небольших изменениях p можно считать $\beta_f = const$.

Уравнения неразрывности в дифференциальной форме, записанные в актуальной конфигурации с точки зрения пространственного описания имеют вид [36]

$$\begin{cases} \dfrac{d\left(n\rho_f\right)}{dt} + n\rho_f \vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0 \\ \dfrac{d\left(\left(1-n\right)\rho_s\right)}{dt} + \left(1-n\right)\rho_s \vec{\nabla}\cdot\dfrac{d\vec{u}}{dt} = 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

Для учета сжимаемости материала скелета грунта в расчетах удобно использовать линейную зависимость изменения плотности твердой фазы от изменения давления флюида [37]

$$\frac{d\rho_s}{\rho_s} = \chi_s dp. \tag{1.6}$$

Для несвязного грунта (например, песка) коэффициент пропорциональности χ_s равен коэффициенту сжимаемости β_s твердой фазы грунта. А для связных грунтов (глинистых грунтов, известняков, песчаников и т.п.) χ_s находится из решения специальной краевой задачи в представительной области, описанной, например, в [38].

Из второго уравнения системы (1.5) (с учетом (1.6)) выводится уравнение изменения пористости, а при подстановке уравнений (1.2), (1.4) и уравнения изменения пористости в первое уравнение системы (1.5) получаем уравнение фильтрации жидкости

$$\begin{cases} n\vec{\nabla}\cdot\left(\dfrac{\underset{\sim}{k}}{n\mu}\cdot\vec{\nabla}p\right) = \vec{\nabla}\cdot\dfrac{d\vec{u}}{dt} + \left(n\beta_f + \left(1-n\right)\chi_s\right)\dfrac{dp}{dt} \\ \dfrac{dn}{dt} = \left(1-n\right)\left(\chi_s\dfrac{dp}{dt} + \vec{\nabla}\cdot\dfrac{d\vec{u}}{dt}\right) \end{cases} \tag{1.7}$$

Однако для большинства задач консолидации сжимаемостью минеральных зерен можно пренебречь, так как ρ_s, в отличие от плотности жидкости, слабо зависит от изменения давления [39], поэтому в дальнейших выводах будем полагать

$$\frac{d\rho_s}{\rho_s}=0. \tag{1.8}$$

Но это не исключает объемные деформации осредненного каркаса за счет уменьшения порового пространства в результате перемещения частиц твердой фазы грунта или переупаковки зерен в дисперсных несвязных грунтах.

Таким образом, из (1.1) и (1.7) с учетом предположения (1.8) получаем связанную систему уравнений модели консолидации в дифференциальной постановке в текущей конфигурации

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\sigma^{eff}\left(\vec{u}\right)-\alpha\vec{\nabla}p+\rho\vec{f}=0 \\ n\vec{\nabla}\cdot\left(\dfrac{\underset{\sim}{k}}{n\mu}\cdot\vec{\nabla}p\right)=\vec{\nabla}\cdot\dfrac{d\vec{u}}{dt}+n\beta_f\dfrac{dp}{dt} \\ \dfrac{dn}{dt}=\left(1-n\right)\vec{\nabla}\cdot\dfrac{d\vec{u}}{dt} \end{cases} \tag{1.9}$$

$$\underset{\sim}{k}=\underset{\sim}{k}\left(I_1\left(\underset{\sim}{\sigma}^{eff}\left(\vec{u}\right)\right)\right),\;\; n=n\left(\vec{u}\left(\vec{x},t\right)\right),\;\; \mu=const,\;\; \beta_f=const.$$

Следует отметить, что в системе (1.9) уравнение равновесия удобно решать, используя лагранжев подход, а уравнение фильтрации и уравнение изменения пористости записаны в эйлеровом пространстве. Чтобы систему уравнений решать в одной системе координат, далее переформулируем последние два уравнения системы (1.9) в движущейся системе координат, которая будет связана с лагранжевыми координатами твердого каркаса по типу метода ALE [40].

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ КОНСОЛИДАЦИИ В ALE ФОРМУЛИРОВКЕ

В методе ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) вводятся три области: пространственная текущая V, пространственная начальная $\overset{\circ}{V}$ и, вообще говоря, произвольно движущаяся область V_ξ, соответствующая криволинейной системе координат $\vec{\xi}$ [40]. Затем рассматриваются взаимно-однозначные отображения этих областей (законы движения)

$$\begin{gathered} \vec{X}=\vec{X}\left(\vec{\xi},t\right),\;\; \vec{x}=\vec{x}\left(\vec{\xi},t\right),\;\; \vec{x}=\vec{x}\left(\vec{X},t\right)\;\left(\vec{x}=\vec{X}\;\text{при}\;t=0\right) \\ \vec{\xi}=\vec{\xi}\left(\vec{X},t\right), \end{gathered} \tag{2.1}$$

а также композиция отображений

$$\vec{x}\left(\vec{X},t\right)=\vec{x}\left(\vec{\xi}\left(\vec{X},t\right),t\right). \tag{2.2}$$

В результате дифференцирования по времени соответствующих законов движения (2.1) определяются скорость $\vec{v}$ частицы $\vec{X}$ и скорость $\vec{\tilde{v}}$ точки $\vec{\xi}$ в текущей области V и скорость $\vec{w}$ движения материальной частицы $\vec{X}$ в области V_ξ

$$\vec v\left(\vec X,t\right)=\frac{\partial\vec x\left(\vec X,t\right)}{\partial t}=\frac{d\vec x}{dt},\quad \vec{\tilde v}\left(\vec\xi,t\right)=\frac{\partial\vec x\left(\vec\xi,t\right)}{\partial t},\quad \vec w\left(\vec X,t\right)=\frac{\partial\vec\xi\left(\vec X,t\right)}{\partial t}.$$

С помощью дифференцирования по времени композиции отображений (2.2) получаем соотношение между скоростями $\vec v$, $\vec{\tilde v}$ и $\vec w$

$$\vec v=\frac{\partial\vec x\left(\vec\xi\left(\vec X,t\right),t\right)}{\partial t}=\frac{\partial\vec x\left(\vec\xi,t\right)}{\partial t}+\frac{\partial\vec x}{\partial\vec\xi}\cdot\frac{\partial\vec\xi}{\partial t}=\vec{\tilde v}+\frac{\partial\vec x}{\partial\vec\xi}\cdot\vec w.$$

Отсюда можно определить скорость движения материальной частицы $\vec X$ относительно системы координат $\vec\xi$ (конвективную скорость)

$$\vec c=\vec v-\vec{\tilde v}=\frac{\partial\vec x}{\partial\vec\xi}\cdot\vec w. \qquad (2.3)$$

Представляемый в работе подход состоит в том, что лагранжевы координаты твердой фазы (каркаса) выбраны как координаты $\vec\xi$ ALE метода. Тогда $\vec c$ – это скорость движения жидкости относительно каркаса. Таким образом, моделируется просачивание жидкости через подвижную лагранжеву сетку для твердого каркаса. Из (2.3) с учетом закона Дарси (1.2) получаем

$$\vec c=\vec v-\frac{d\vec u}{dt}=-\frac{\underset{\sim}{k}}{n\mu}\cdot\vec\nabla p. \qquad (2.4)$$

В методе ALE [40] материальные производные скалярных величин (например, пористости n или давления жидкости p) выражаются в терминах конвективной скорости $\vec c$ (2.4)

$$\frac{dn}{dt}=\frac{\partial n\left(\vec\xi,t\right)}{\partial t}+\frac{\partial n}{\partial\vec\xi}\cdot\vec w=\frac{\partial n\left(\vec\xi,t\right)}{\partial t}+\frac{\partial n}{\partial\vec x}\cdot\vec c=\frac{\partial n\left(\vec\xi,t\right)}{\partial t}-\vec\nabla n\cdot\left(\frac{\underset{\sim}{k}}{n\mu}\cdot\vec\nabla p\right), \qquad (2.5)$$

$$\frac{dp}{dt}=\frac{\partial p\left(\vec\xi,t\right)}{\partial t}-\vec\nabla p\cdot\left(\frac{\underset{\sim}{k}}{n\mu}\cdot\vec\nabla p\right). \qquad (2.6)$$

Используя формулы (2.5), (2.6), запишем последние два уравнения системы (1.9) (уравнения фильтрации и изменения пористости) в координатах $\vec\xi$ для твердой фазы. Учтем, что в этих координатах $d\vec u/dt=\partial\vec u/\partial t$.

В результате (с учетом уравнения равновесия (1.1)) получаем дифференциальную постановку нелинейной связанной модели консолидации (с использованием подхода ALE)

$$\begin{cases}\vec\nabla\cdot\underset{\sim}{\sigma}^{eff}\left(\vec u\right)-\alpha\vec\nabla p+\rho\vec f=0\\ n\vec\nabla\cdot\left(\frac{\underset{\sim}{k}}{n\mu}\cdot\vec\nabla p\right)=\vec\nabla\cdot\dot{\vec u}+n\beta_f\,\dot p-\beta_f\vec\nabla p\cdot\frac{\underset{\sim}{k}}{\mu}\cdot\vec\nabla p\\ \dot n-\vec\nabla n\cdot\frac{\underset{\sim}{k}}{n\mu}\cdot\vec\nabla p=\left(1-n\right)\left(\vec\nabla\cdot\dot{\vec u}\right)\end{cases} \qquad (2.7)$$

где $\dot{\vec u}=\partial\vec u\left(\vec\xi,t\right)/\partial t$, $\dot p=\partial p\left(\vec\xi,t\right)/\partial t$, $\dot n=\partial n\left(\vec\xi,t\right)/\partial t$, $\underset{\sim}{k}=\underset{\sim}{k}\left(\underset{\sim}{\sigma}^{eff}\right)$.

Зададим типичные граничные условия

$$\begin{cases} \vec{u} = 0; \Sigma\vec{\xi} \in \Sigma_u = \quad {}_1 \\ \underset{\sim}{\sigma}^{eff} \cdot \vec{n} = \vec{S}; \Sigma\vec{\xi} \in \Sigma_\sigma = \quad {}_2 \\ \dfrac{\partial p}{\partial \vec{n}} = 0; \Sigma\vec{\xi} \in \Sigma_w = \quad {}_1 \\ p = 0; \Sigma\,\vec{\xi} \in \Sigma_{\,p} = \quad {}_2 \end{cases} \tag{2.8}$$

$$\Sigma_u \cup \Sigma_\sigma = \Sigma, \quad \Sigma_w \cup \Sigma_p = \Sigma, \quad \Sigma_u = \Sigma_w = \Sigma_1, \quad \Sigma_\sigma = \Sigma_p = \Sigma_2.$$

Согласно (2.8), часть границы $\left(\vec{\xi} \in \Sigma_1\right)$ неподвижна и непроницаема. На остальной части границы $\left(\vec{\xi} \in \Sigma_2\right)$ действует поверхностная нагрузка, а давление жидкости равно нулю. Такие граничные условия обычно действуют на дневной поверхности, которая подвергается внешнему силовому воздействию и через которую свободно фильтруется жидкость.

3. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ВАРИАЦИОННОЙ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ КОНСОЛИДАЦИИ

Для решения краевой задачи (2.7), (2.8) численными методами удобна вариационная постановка в текущей конфигурации

$$\begin{cases} \int\limits_V \underset{\sim}{\sigma}^{eff}\left(\vec{u}\right) : \vec{\nabla}\vec{w}dV - \int\limits_V \alpha p \vec{\nabla}\cdot\vec{w}dV - \int\limits_V \rho \vec{f}\cdot\vec{w}dV - \int\limits_{\Sigma_2} \vec{S}\left(\vec{u}\right)\cdot\vec{w}d\Sigma = 0 \\ \int\limits_V \vec{\nabla}q \cdot \dfrac{\underset{\sim}{k}}{\mu}\cdot\vec{\nabla}pdV + \int\limits_V q\vec{\nabla}n \cdot \dfrac{\underset{\sim}{k}}{n\mu}\cdot\vec{\nabla}pdV - \int\limits_V q\beta_f \vec{\nabla}p \cdot \dfrac{\underset{\sim}{k}}{\mu}\cdot\vec{\nabla}pdV + \\ \qquad + \int\limits_V q\vec{\nabla}\cdot\dot{\vec{u}}dV + \int\limits_V qn\beta_f\,\dot{p}dV = 0 \\ \int\limits_V h\dot{n}dV - \int\limits_V h\vec{\nabla}n \cdot \dfrac{\underset{\sim}{k}}{n\mu}\cdot\vec{\nabla}pdV = \int\limits_V h\left(1-n\right)\vec{\nabla}\cdot\dot{\vec{u}}dV \end{cases} \tag{3.1}$$

$\vec{S}$ – поверхностная сила из граничных условий (2.8), $\vec{w}$, q, h – пробные функции из подпространств Соболева, удовлетворяющих заданным граничным условиям 1-го рода: $H_u = \left\{\vec{w} \mid \vec{w} \in W_2^1, \vec{w}\big|_{\Sigma_1} = 0\right\}$, $H_p = \left\{q \mid q \in W_2^1, q\big|_{\Sigma_2} = 0\right\}$, $H_n = \left\{h \mid h \in W_2^1\right\}$.

В системе (3.1) уравнения фильтрации и изменения пористости уже линейны относительно дифференциалов вектора перемещений $d\vec{u}$, давления жидкости dp и изменения пористости dn. Для дальнейшего решения задачи (3.1) необходимо линеаризовать уравнение равновесия, т.е. продифференцировать его по параметру t, в результате чего получится линейное уравнение относительно $d\vec{u}$ и dp. Для удобства уравнение равновесия сначала было преобразовано к начальной области $\overset{o}{V}$ с использованием эффективного тензора Кирхгофа $\underset{\sim}{S}^{eff}$ и тензора деформаций Грина-Лагранжа $\underset{\sim}{E}$, а затем линеаризовано с помощью дифференциала Гато

$$\int\limits_{\overset{o}{V}}\left(\overset{o}{\vec{\nabla}}\vec{w}:\underset{\sim}{C}^{TAN}\left(\underset{\sim}{F}\left(\vec{u}\right)\right):\overset{o}{\vec{\nabla}}d\vec{u}\right)d\overset{o}{V}+\int\limits_{\overset{o}{V}}\underset{\sim}{S}^{eff}\left(\vec{u}\right):\left[\left(\overset{o}{\vec{\nabla}}\vec{w}\right)^{T}\cdot\overset{o}{\vec{\nabla}}d\vec{u}\right]d\overset{o}{V}-$$

$$-\int\limits_{\overset{o}{V}}\alpha\, dp\, J\underset{\sim}{C}^{-1}\left(\vec{u}\right):D\underset{\sim}{E}\left(\vec{u}\right)\left[\vec{w}\right]d\overset{o}{V}- \tag{3.2}$$

$$-\int\limits_{\overset{o}{V}}\alpha pJ\left(\underset{\sim}{C}^{-1}\left(\vec{u}\right):D\underset{\sim}{E}\left(\vec{u}\right)\left[d\vec{u}\right]\right)\left(\underset{\sim}{C}^{-1}\left(\vec{u}\right):D\underset{\sim}{E}\left(\vec{u}\right)\left[\vec{w}\right]\right)d\overset{o}{V}-$$

$$-\int\limits_{\overset{o}{V}}2\alpha pJ\, D\underset{\sim}{E}\left(\vec{u}\right)\left[\vec{w}\right]:\left(\frac{\partial\underset{\sim}{C}^{-1}\left(\vec{u}\right)}{\partial\underset{\sim}{C}\left(\vec{u}\right)}\right):D\underset{\sim}{E}\left(\vec{u}\right)\left[d\vec{u}\right]d\overset{o}{V}-$$

$$-\int\limits_{\overset{o}{V}}\alpha pJ\underset{\sim}{C}^{-1}\left(\vec{u}\right):D^{2}\underset{\sim}{E}\left(\vec{u}\right)\left[\vec{w},d\vec{u}\right]d\overset{o}{V}=dA^{e}\left[\vec{w}\right].$$

В случае «мертвой» нагрузки

$$dA^{e}\left[\vec{w}\right]=\int\limits_{\overset{o}{V}}\overset{o}{\rho}\, d\vec{f}\left(\vec{X},t\right):\vec{w}d\overset{o}{V}+\int\limits_{\overset{o}{\Sigma}_2}d\vec{S}^{0}\left(\vec{X},t\right)\cdot\vec{w}d\overset{o}{\Sigma}$$

$$C^{TAN}_{mjnl}=C^{E}_{ijkl}F_{mi}F_{nk},\;\; F_{ij}=\partial x_i/\partial X_j,\;\; \underset{\sim}{C}^{E}=\partial\underset{\sim}{S}^{eff}/\partial\underset{\sim}{E},\;\; J=\det\underset{\sim}{F},$$

$$D\underset{\sim}{E}\left(\vec{u}\right)\left[\vec{w}\right]=0{,}5\left(\left(\overset{o}{\vec{\nabla}}\vec{w}\right)^{T}\cdot\underset{\sim}{F}\left(\vec{u}\right)+\underset{\sim}{F}^{T}\left(\vec{u}\right)\cdot\overset{o}{\vec{\nabla}}\vec{w}\right),\;\; \underset{\sim}{\sigma}^{eff}=\underset{\sim}{F}\cdot\left(J^{-1}\underset{\sim}{S}^{eff}\right)\cdot\underset{\sim}{F}^{T}.$$

$\underset{\sim}{C}^{E}$ – касательный модуль, $\underset{\sim}{C}$ – мера деформаций Коши-Грина, $\vec{w}$ – пробная функция, $\underset{\sim}{F}$ – деформационный градиент, J – якобиан преобразования текущей области, занимаемой твердой фазой, размазанной по всей области V, в ее начальную область $\overset{o}{V}$.

Далее линеаризованное вариационное уравнение равновесия в начальной конфигурации (3.2) преобразовывалось обратно к текущей области. В результате была получена система связанных линеаризованных вариационных уравнений модели консолидации в геометрически нелинейной постановке в текущей конфигурации

$$\begin{cases}\int\limits_{V}\left(\underset{\sim}{d}\left(\vec{w}\right):\underset{\sim}{C}^{d}:\underset{\sim}{d}\left(d\vec{u}\right)\right)dV+\int\limits_{V}\underset{\sim}{\sigma}^{eff}\left(\vec{u}\right):\left[\left(\vec{\nabla}\vec{w}\right)^{T}\cdot\vec{\nabla}d\vec{u}\right]dV-\\ \quad -\int\limits_{V}\alpha dp\vec{\nabla}\cdot\vec{w}dV-\int\limits_{V}\alpha p\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{w}\right)\left(\vec{\nabla}\cdot d\vec{u}\right)dV+\\ \quad +\int\limits_{V}\alpha p\left(\vec{\nabla}\vec{w}\right)^{T}:\vec{\nabla}d\vec{u}dV-\int\limits_{V}\rho d\vec{f}\cdot\vec{w}dV-\int\limits_{\Sigma_2}d\vec{S}\cdot\vec{w}d\Sigma=0\\ \int\limits_{V}q\beta_f\vec{\nabla}p\cdot\frac{\underset{\sim}{k}}{\mu}\cdot\vec{\nabla}pdV-\int\limits_{V}\vec{\nabla}q\cdot\frac{\underset{\sim}{k}}{\mu}\cdot\vec{\nabla}pdV-\int\limits_{V}q\vec{\nabla}n\cdot\frac{\underset{\sim}{k}}{n\mu}\cdot\vec{\nabla}pdV=\\ \qquad =\int\limits_{V}q\vec{\nabla}\cdot\dot{\vec{u}}dV+\int\limits_{V}qn\beta^{f}\dot{p}dV\\ \int\limits_{V}h\dot{n}dV-\int\limits_{V}h\vec{\nabla}n\cdot\frac{\underset{\sim}{k}}{n\mu}\cdot\vec{\nabla}pdV=\int\limits_{V}h\left(1-n\right)\vec{\nabla}\cdot\dot{\vec{u}}dV\end{cases} \tag{3.3}$$

$$C^d_{ijkl} = J^{-1} F_{ip} F_{jq} F_{kr} F_{ls} C^E_{pqrs}, \quad \underset{\sim}{d}\left(\vec{w}\right) = 0,5\left[\left(\vec{\nabla}\vec{w}\right)^T + \vec{\nabla}\vec{w}\right].$$

В определяющих соотношениях для скелета грунта $dS^{eff} = \underset{\sim}{C}^E : d\underset{\sim}{E}$ могут использоваться:

1) гиперупругий материал: $\underset{\sim}{C}^E = \partial^2 W \big/ \partial \underset{\sim}{E}^2$, где W – упругий потенциал;

2) гипоупругий материал: $\underset{\sim}{C}^E = \underset{\sim}{C}^E\left(\underset{\sim}{E}\right)$.

4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОНСОЛИДАЦИИ

Рассмотрим дифференциальную постановку задачи консолидации с использованием подхода ALE (2.7). При небольших градиентах давления и градиентах пористости квадратичными членами в уравнениях (2.5) и (2.6) можно пренебречь. Среду будем предполагать изотропной (коэффициент проницаемости k – скалярный параметр). Тогда, с учетом сделанных предположений, линеаризованная система дифференциальных уравнений модели консолидации (2.7) примет вид

$$\begin{cases} div\left(\underset{\sim}{C}^d\left(\vec{u}\right) : grad\, d\vec{u}\right) + div\left(\underset{\sim}{\sigma}^{eff}\left(\vec{u}\right)\cdot grad\, d\vec{u}\right) - \alpha grad\, dp - \\ \quad -\alpha\left(grad\ p\right)\left(div\, d\vec{u}\right) + \alpha\left(grad\ p\right)\cdot\left(grad\, d\vec{u}\right) + \rho d\vec{f} = 0 \\ n\left(\vec{u}\right) div\left(\dfrac{k\left(\vec{u}\right)}{n\left(\vec{u}\right)\mu} grad\ p\right) = div\,\dot{\vec{u}} + n\beta_f\,\dot{p} \\ \dot{n} = \left(1-n\right) div\,\dot{\vec{u}} \end{cases} \tag{4.1}$$

где $\dot{\vec{u}} = \partial\vec{u}\left(\vec{\xi},t\right)\big/\partial t$, $\dot{p} = \partial p\left(\vec{\xi},t\right)\big/\partial t$, $\dot{n} = \partial n\left(\vec{\xi},t\right)\big/\partial t$.

Системе (4.1) с граничными условиями (2.8) соответствует линеаризованная вариационная постановка задачи консолидации (4.2)-(4.4)

$$\begin{cases} \int\limits_V C^d_{ijkl} du_{k,l} w_{i,j} dV + \int\limits_V \sigma^{eff}_{kj} du_{i,k} w_{i,j} dV - \int\limits_V \alpha dp w_{i,i} dV - \int\limits_V \alpha p du_{j,j} w_{i,i} dV + \\ \quad + \int\limits_V \alpha p du_{j,i} w_{i,j} dV - \int\limits_V \rho df_i w_i dV - \int\limits_{\Sigma_2} dS_i w_i d\Sigma = 0 & (4.2) \\ \int\limits_V \dfrac{k}{\mu} p_{,i} q_{,i} dV + \int\limits_V q\dfrac{k}{n\mu} n_{,i} p_{,i} dV + \int\limits_V q\dot{u}_{i,i} dV + \int\limits_V qn\beta^f \dot{p} dV = 0 & (4.3) \\ \int\limits_V h\dot{n} dV = \int\limits_V h\left(1-n\right)\dot{u}_{i,i} dV & (4.4) \end{cases}$$

Сначала решается система уравнений равновесия (4.2) и фильтрации (4.3) методом Узавы [41] в предположении постоянной пористости. А после решения этой задачи пористость вычисляется из уравнения (4.4).

Дискретизации вариационных уравнений (4.2), (4.3) по координатам осуществлялась с помощью метода конечных элементов, при этом использовались элементы трилинейного типа (Q1) для аппроксимации изменения давления воды и серендиповы квадратичные элементы (Q2) для аппроксимации приращения перемещений в грунте. Такой выбор конечных элементов был обусловлен тем, что, как показывает практика [3], для седловой задачи LBB-условие устойчивости выполняется именно для элементов Q2-Q1 и не выполняется для элементов Q1-Q1.

Рассмотрим N-мерные подпространства $H_u^N \in H_u$ и $H_p^N \in H_p$. Функции $d\vec{u}^N\left(\vec{\xi},t\right) \in H_u^N$ и $p^N\left(\vec{\xi},t\right) \in H_p^N$ будут приближенными решениями уравнений (4.2), (4.3), если при каждом $t>0$ и при всех $\vec{w}^N\left(\vec{\xi},t\right) \in H_u^N$ и $h^N\left(\vec{\xi},t\right) \in H_p^N$ они будут удовлетворять уравнениям (4.5).

$$\begin{cases} \int\limits_V C_{ijkl}^d\left(\vec{u}^N\right) du_{k,l}^N w_{i,j}^N dV + \int\limits_V \sigma_{kj}^{eff}\left(\vec{u}^N\right) du_{i,k}^N w_{i,j}^N dV - \int\limits_V \alpha dp^N w_{i,i}^N dV - \\ \quad - \int\limits_V \alpha p^N du_{j,j}^N w_{i,i}^N dV + \int\limits_V \alpha p^N du_{j,i}^N w_{i,j}^N dV - \int\limits_V \rho df_i w_i^N dV - \\ \quad - \int\limits_{\Sigma_2} dS_i w_i^N d\Sigma = 0 \\ \int\limits_V \frac{k\left(\vec{u}^N\right)}{\mu} p_{,i}^N q_{,i}^N dV + \int\limits_V \frac{k\left(\vec{u}^N\right)}{n\left(\vec{u}^N\right)\mu} n_{,i} p_{,i}^N q^N dV + \int\limits_V \dot{u}_{i,i}^N q^N dV + \\ \qquad + \int\limits_V n\beta^f \dot{p}^N q^N dV = 0 \end{cases} \tag{4.5}$$

Разобьем область V на конечные элементы: 20-узловые Q2 для приращений перемещений $d\vec{u}^N$ и 8-узловые Q1 для давления воды p^N. Пусть $\overset{r}{\widehat{du}} = \left(\overset{r}{\widehat{du}_1}, \overset{r}{\widehat{du}_2}, \overset{r}{\widehat{du}_3}\right)$ – вектор узловых приращений перемещений в произвольном конечном элементе Q2 $\left(r = 1,\ldots,8\right)$, а $\hat{p}^q$ – узловые давления в элементе Q1 $\left(q = 1,\ldots,4\right)$. Выразим $d\vec{u}^N\left(\vec{\xi},t\right)$ и $p^N\left(\vec{\xi},t\right)$ через узловые приращения перемещений и узловые давления соответственно

$$du_i^N = \sum_{r=1}^{8} \overset{u}{N}_r \overset{r}{\widehat{du}_i} \equiv \overset{u}{N}_r \overset{r}{\widehat{du}_i}, \quad p^N = \sum_{q=1}^{4} \overset{p}{N}_q \hat{p}^q \equiv \overset{p}{N}_q \hat{p}^q, \quad i = 1,2,3,$$

$\overset{u}{N}_m$ и $\overset{p}{N}_q$ – функции формы элементов Q2 и Q1 соответственно. Найдем их производные по пространственным координатам

$$du_{i,j}^N = \overset{u}{N}_{r,j} \overset{r}{\widehat{du}_i}, \quad p_{,j}^N = \overset{p}{N}_{q,j} \hat{p}^q.$$

Для удобства читателя дискретизацию по времени опишем, используя дифференциальные операторы. Для решения системы (4.5) будем использовать обобщение неявной схемы с внутренними итерациями по методу Узавы, предложенной еще в работе [42] (см. также [43]). Применим итерационный процесс с внутренними итерациями на каждом шаге по времени

$$
\begin{cases}
div\left(\underset{\sim}{C}^{d}\left(\hat{\boldsymbol{u}}^{m-1}\right):grad\,\widehat{\Delta\boldsymbol{u}}^{m,s}\right)+div\left(\underset{\sim}{\sigma}^{eff}\left(\hat{\boldsymbol{u}}^{m-1}\right)\cdot grad\,\widehat{\Delta\boldsymbol{u}}^{m,s-1}\right)- \\
\quad -\alpha\, grad\,\widehat{\Delta p}^{m,s-1}-\alpha\left(grad\,\hat{p}^{m-1}\right)\left(div\,\widehat{\Delta\boldsymbol{u}}^{m,s}\right)+ \\
\quad +\alpha\left(grad\,\hat{p}^{m-1}\right)\cdot\left(grad\,\widehat{\Delta\boldsymbol{u}}^{m,s}\right)=-\rho d\boldsymbol{f} \\
-div\widehat{\Delta\boldsymbol{u}}^{m,s-1}+\tau n^{m-1}div\left(\dfrac{k\left(\hat{\boldsymbol{u}}^{m-1}\right)}{n^{m-1}\mu}grad\,\hat{p}^{m,s}\right)-n\beta_f\,\hat{p}^{m,s-1}=-n\beta_f\,\hat{p}^{m-1}
\end{cases}
\tag{4.6}
$$

Здесь τ – величина шага по времени, m – номер шага по времени, s – номер итерации. Приращения перемещений и давления воды выражаются формулами

$$\widehat{\Delta\boldsymbol{u}}^{m,s}=\hat{\boldsymbol{u}}^{m,s}-\hat{\boldsymbol{u}}^{m-1},\ \widehat{\Delta p}^{m,s-1}=\hat{p}^{m,s-1}-\hat{p}^{m-1}.$$

На каждом шаге по времени после решения системы (4.6) решается уравнение пористости (4.4), согласно схеме

$$\frac{n^{m}-n^{m-1}}{\tau}=\left(1-n^{m-1}\right)div\frac{\widehat{\Delta\boldsymbol{u}}^{m}}{\tau},$$

где $\widehat{\Delta\boldsymbol{u}}^{m}$ – решение задачи (4.6) на последней итерации m-го шага по времени.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получена нелинейная формулировка задачи консолидации, включающая физическую и геометрическую нелинейности. Для описания процесса деформирования твердой фазы грунта применялся лагранжев подход, для описания движения жидкости – метод ALE. С его помощью моделируется относительное движение жидкости через подвижную лагранжеву сетку для твердого каркаса. Следует отметить, что предложенное в данной работе применение метода ALE для связывания лагранжева описания деформирования твердого скелета грунта и эйлерова описания движения жидкости представляется новым. Полученная вариационная формулировка справедлива для гиперупругого и гипоупругого материала скелета грунта.

Для решения нелинейной задачи консолидации была получена линеаризованная вариационная постановка задачи. Связывание уравнений деформирования каркаса и фильтрации жидкости осуществляется методом Узавы.

Результаты численного моделирования, использующего предложенную математическую модель, будут представлены в следующей публикации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Small J.C., Booker J.R., Davis E.H. *Elasto-plastic consolidation of soils* // Int. J. Solids and Struct. – 1976. – Vol.12. – Pp.431-448.
2. Borja R.I., Alarcón E. *A mathematical framework for finite strain elastoplastic consolidation. Part 1: Balance laws, variational formulation, and linearization* // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 1995. – Vol.122. – Pp.145-171.
3. Borja R.I., Tamagnini C., Alarcón E. *Elastoplastic consolidation at finite strain. Part 2: Finite element implementation and numerical examples* // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 1998. – Vol.159. – Pp.103-122.

4. Settari A., Mourits F.M. *A coupled reservoir and geomechanical simulation system* // SPE J. – 1998. – Vol.3. – Iss.3. – Pp.219-226.
5. Settari A., Walters D.A. *Advances in coupled geomechanical and reservoir modeling with applications to reservoir compaction* // SPE J. – 2001. – Vol.6. – Iss.3. – Pp.334-342.
6. Mojarad R.S., Settari A. *New solution for anisotropic formation damage due to produced water re-injection* // J. Can. Petrol. Technol. – 2009. – Vol.48. – Iss.4. – Pp.1-7.
7. Chin L.Y., Thomas L.K. *Fully coupled geomechanics and fluid-flow analysis of wells with stress-dependent permeability* // SPE J. – 2001. – Vol.5. – Iss.1. – Pp.32-45.
8. Liu Z., Liu R. *A fully implicit and consistent finite element framework for modeling reservoir compaction with large deformation and nonlinear flow model. Part I: Theory and formulation* // Comput. Geosci. – 2018. – Vol.22. – Iss.3. – Pp.623-637.
9. Biot M.A. *General theory of three-dimensional consolidation* // J. Appl. Phys. – 1941. – Vol.12. – No.2. – Pp.155-164.
10. Biot M.A. *General solutions of the equations of elasticity and consolidation for a porous material* // J. Appl. Mech., Trans. ASME. – 1956. – Vol.23. – No.1. – Pp.91-96.
11. Borja R.I. *One-step and linear multistep methods for nonlinear consolidation* // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 1991. – Vol.85. – Pp.239-272.
12. Carter J.P., Booker J.R., Davis E.H. *Finite deformation of an elasto-plastic soil* // Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech. – 1977. – Vol.1. – Pp.25-43.
13. Carter J.P., Booker J.R., Small J.C. *The analysis of finite elasto-plastic consolidation* // Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech. – 1979. – Vol.3. – Pp.107-129.
14. Simo J.C., Hughes T.J.R. *Computational inelasticity*. – New York: Springer-Verlag, 1998. – 392 p.
15. Jeannin L., Mainguy M., Masson R., Vidal-Gilbert S. *Accelerating the convergence of coupled geomechanical-reservoir simulations* // Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech. – 2006. – Vol.31. – Iss.10. – Pp.1163-1181.
16. Dean R.H., Gai X., Stone C.M., Minkoff S.E. *A comparison of techniques for coupling porous flow and geomechanics* // SPE J. – 2006. – Vol.11. – Pp.132-140.
17. Wheeler M.F., Gai X. *Iteratively coupled mixed and Galerkin finite element methods for poro-elasticity* // Numer. Meth. Partial Differ. Eqs. – 2007. – Vol.23. – Iss.4. – Pp.785-797.
18. Kim J., Tchelepi H.A., Juanes R. *Stability, accuracy, and efficiency of sequential methods for coupled flow and geomechanics* // SPE J. – 2011. – Vol.16. – Pp.249-262.
19. Болдырев Г.Г., Муйземнек А.Ю., Малышев И.М. *Численное моделирование оснований при больших деформациях*. – Пенза: ПГУАС, 2007. – 14 с. (Препринт / docplayer.ru/31152946).
20. Di Y., Sato T. *Computational modelling of large deformation of saturated soils using an ALE finite element method* // Annuals of Disas. Prev. Res. Inst., Kyoto Univ. – 2004. – No.47C. – Pp.1-11.
21. Nazem M., Sheng D. *Arbitrary Lagrangian-Euleran method for consolidation problems in geomechanics* / Proc. VIII Int. Conf. Comput. Plasticity. COMPLAS VIII. Eds.: E. Onate, D.R.J. Owen. – Barcelona, 2005. – Pp.1-4.

22. El-Amrani M., Seaid M. *Eulerian–Lagrangian time-stepping methods for convection-dominated problems* // Int. J. Computer Math. – 2008. – Vol.85. – Pp.421-439.
23. Шешенин С.В., Артамонова Н.Б., Мукатова А.Ж. *Применение метода осреднения для определения коэффициента передачи порового давления* // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. – 2015. – №2. – С.42-45.
24. Артамонова Н.Б., Мукатова А.Ж., Шешенин С.В. *Асимптотический анализ уравнения равновесия флюидонасыщенной пористой среды методом осреднения* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2017. – №2. – С.115-129.
25. Коллинз Р. *Течение жидкостей через пористые материалы*. – М.: Мир, 1964. – 350 с.
26. Lewis R.W., Nithiarasu P., Seetharamu K.N. *Fundamentals of the finite element method for heat and fluid flow*. – John Wiley & Sons, 2004. – 335 p.
27. Власов А.Н., Саваторова В.Л., Талонов А.В. *Усреднение уравнений фильтрации Бринкмана в слоистой пористой среде* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2010. – Т.16. – №4. – С.483-502.
28. Власов А.Н., Волков-Богородский Д.Б. *Асимптотическое усреднение уравнений фильтрации Бринкмана в многофазных средах с периодической структурой* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2012. – Т.18. – №1. – С.92-110.
29. Savatorova V.L., Vlasov A.N. *Modeling of viscous fluid filtration in porous media with cylindrical symmetry* // Composites: Mechanics, Computations, Applications. – 2013. – Vol.4. – No.1. – Pp.1-20.
30. Власов А.Н., Волков-Богородский Д.Б., Саваторова В.Л., Талонов А.В. *Усреднение нестационарных уравнений фильтрации вязкого вещества в деформируемой пористой среде* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2013. – Т.19. – №4. – С.535-554.
31. Savatorova V.L., Talonov A.V., Vlasov A.N., Volkov-Bogorodskiy D.B. *Averaging the nonstationary equations of viscous substance filtration through a rigid porous medium* // Composites: Mechanics, Computations, Applications. – 2014. – Vol.5. – No.1. – Pp.35-61.
32. Savatorova V.L., Talonov A.V., Vlasov A.N., Volkov-Bogorodskiy D.B. *Brinkman's filtration of fluid in rigid porous media: multiscale analysis and investigation of effective permeability* // Composites: Mechanics, Computations, Applications. – 2015. – Vol.6. – No.3. – Pp.239-264.
33. Быков Н.Е., Фурсов А.Я., Максимов М.И. и др. *Справочник по нефтепромысловой геологии* / под ред. Быкова Н.Е., Максимова М.И., Фурсова А.Я. – М.: Недра, 1981. – 525 с.
34. Добрынин В.М. *Деформации и изменения физических свойств коллекторов нефти и газа*. – М.: Недра, 1970. – 239 с.
35. Щелкачев В.Н., Лапук Б.Б. *Подземная гидравлика*. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 736 с.
36. Нигматулин Р.И. *Динамика многофазных сред. Ч.I.* – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 464 с.
37. Biot M.A., Willis D.G. *The elastic coefficients of the theory of consolidation* // J. Appl. Mech. – 1957. – Vol.24. – Pp.594-601.

38. Шешенин С.В., Лазарев Б.П., Артамонова Н.Б. *Применение асимптотического метода осреднения для определения коэффициента расширения водонасыщенной пористой среды при замерзании* // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. – 2016. – №6. – С.32-36.
39. Щелкачев В.Н. *Основы и приложения теории неустановившейся фильтрации. Ч.2.* – М.: Нефть и газ, 1995. – 493 с.
40. Donea J., Huerta A. *Finite element methods for flow problems*. – Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2003. – 358 p.
41. Быченков Ю.В., Чижонков Е.В. *Итерационные методы решения седловых задач*. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. – 349 с.
42. Киселев Ф.Б., Шешенин С.В. *Разностная схема для задачи нестационарной фильтрации в слоистых грунтах* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1996. – №4. – С.129-135.
43. Шешенин С.В., Киселев Ф.Б., Артамонова Н.Б. *Неявные численные схемы в задачах фильтрации в пористых средах* // Вестник МГСУ. – 2011. – №6. – С.312-317.

REFERENCES

1. Small J.C., Booker J.R., Davis E.H. *Elasto-plastic consolidation of soils*. Int. J. Solids and Struct., 1976, Vol.12, Pp.431-448.
2. Borja R.I., Alarcón E. *A mathematical framework for finite strain elastoplastic consolidation. Part 1: Balance laws, variational formulation, and linearization.* Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 1995, Vol.122, Pp.145-171.
3. Borja R.I., Tamagnini C., Alarcón E. *Elastoplastic consolidation at finite strain. Part 2: Finite element implementation and numerical examples*. Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 1998, Vol.159, Pp.103-122.
4. Settari A., Mourits F.M. *A coupled reservoir and geomechanical simulation system*. SPE J., 1998, Vol.3, Iss.3, Pp.219-226.
5. Settari A., Walters D.A. *Advances in coupled geomechanical and reservoir modeling with applications to reservoir compaction*. SPE J., 2001, Vol.6, Iss.3, Pp.334-342.
6. Mojarad R.S., Settari A. *New solution for anisotropic formation damage due to produced water re-injection*. J. Can. Petrol. Technol., 2009, Vol.48, Iss.4, Pp.1-7.
7. Chin L.Y., Thomas L.K. *Fully coupled geomechanics and fluid-flow analysis of wells with stress-dependent permeability*. SPE J., 2001, Vol.5, Iss.1, Pp.32-45.
8. Liu Z., Liu R. *A fully implicit and consistent finite element framework for modeling reservoir compaction with large deformation and nonlinear flow model. Part I: theory and formulation*. Comput. Geosci., 2018, Vol.22. Iss.3, Pp.623-637.
9. Biot M.A. *General theory of three-dimensional consolidation*. J. Appl. Phys., 1941, Vol.12, No.2, Pp.155-164.
10. Biot M.A. *General solutions of the equations of elasticity and consolidation for a porous material*. J. Appl. Mech., Trans. ASME, 1956, Vol.23, No.1, Pp.91-96.
11. Borja R.I. *One-step and linear multistep methods for nonlinear consolidation*. Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 1991, Vol.85, Pp.239-272.
12. Carter J.P., Booker J.R., Davis E.H. *Finite deformation of an elasto-plastic soil* // Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., 1977, Vol.1, Pp.25-43.
13. Carter J.P., Booker J.R., Small J.C. *The analysis of finite elasto-plastic consolidation*. Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., 1979, Vol.3, Pp.107-129.

14. Simo J.C., Hughes T.J.R. *Computational inelasticity*. New York, Springer-Verlag, 1998, 392 p.
15. Jeannin L., Mainguy M., Masson R., Vidal-Gilbert S. *Accelerating the convergence of coupled geomechanical-reservoir simulations*. Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., 2006, Vol.31, Iss.10, Pp.1163-1181.
16. Dean R.H., Gai X., Stone C.M., Minkoff S.E. *A comparison of techniques for coupling porous flow and geomechanics*. SPE J., 2006, Vol.11, Pp.132-140.
17. Wheeler M.F., Gai X. *Iteratively coupled mixed and Galerkin finite element methods for poro-elasticity*. Numer. Meth. Partial Differ. Eqs., 2007, Vol.23, Iss.4, Pp.785-797.
18. Kim J., Tchelepi H.A., Juanes R. *Stability, accuracy, and efficiency of sequential methods for coupled flow and geomechanics*. SPE J., 2011, Vol.16, Pp.249-262.
19. Boldyrev G.G., Muizemnek A.Yu., Malyshev I.M. *Chislennoe modelirovanie osnovanij pri bol'shikh deformatsiyakh [Numerical simulation of foundations at high strains]*. Penza, PGUAS, 2007, 14 p. (Preprint/ docplayer.ru/31152946)
20. Di Y., Sato T. *Computational modelling of large deformation of saturated soils using an ALE finite element method*. Annuals of Disas. Prev. Res. Inst., Kyoto Univ., 2004, No.47C, Pp.1-11.
21. Nazem M., Sheng D. *Arbitrary Lagrangian-Euleran method for consolidation problems in geomechanics*. Proc. VIII Int. Conf. Comput. Plasticity, COMPLAS VIII. Eds.: E. Onate, D.R.J. Owen. Barcelona, 2005, Pp.1-4.
22. El-Amrani M., Seaid M. *Eulerian-Lagrangian time-stepping methods for convection-dominated problems*. Int. J. Computer Math., 2008, Vol.85, Pp.421-439.
23. Sheshenin S.V., Artamonova N.B., Mukatova A.Zh. *Application of the averaging method to determine the pore pressure transfer coefficient*. Moscow Univ. Mech. Bull., 2015, Vol.70, No.2, Pp.34-37.
24. Artamonova N.B., Mukatova A.Zh, Sheshenin S.V. *Asymptotic analysis of the equilibrium equation of a fluid-saturated porous medium by the homogenization method*. Mech. Solids, 2017, Vol.52, No.2, Pp.212-223.
25. Kollinz R. *Techenie zhidkostej cherez poristye materialy [Fluid flow through porous materials]*. Moskva, Izdatel'stvo Mir, 1970, 350 p.
26. Lewis R.W., Nithiarasu P., Seetharamu K.N. *Fundamentals of the finite element method for heat and fluid flow*. John Wiley & Sons, 2004, 335 p.
27. Vlasov A.N., Savatorova V.L., Talonov A.V. *Usrednenie uravnenij fil'tratsii Brinkmana v sloistoj poristoj srede [Averaging the equations of Brinkman's filtration in a layered porous medium]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2010, Vol.16, No.4, Pp.483-502.
28. Vlasov A.N., Volkov-Bogorodskiy D.B. *Asimptoticheskoe usrednenie uravnenij fil'tratsii Brinkmana v mnogofaznykh sredakh s periodicheskoj strukturoj [Asymptotic averaging the equations of Brinkman's filtration in multiphase media with a periodic structure]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2012, Vol.18, No.1, Pp.92-110.
29. Savatorova V.L., Vlasov A.N. *Modeling of viscous fluid filtration in porous media with cylindrical symmetry*. Composites: Mechanics, Computations, Applications, 2013, Vol.4, No.1, Pp.1-20.
30. Vlasov A.N., Volkov-Bogorodskiy D.B., Savatorova V.L., Talonov A.V. *Usrednenie nestatsionarnykh uravnenij fil'tratsii vyazkogo veshhestva v deformiruemoj poristoj srede [Averaging of non-stationary equations of viscous*

material filtration in a deformable porous medium]. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2013, Vol.19, No.4, Pp.535-554.
31. Savatorova V.L., Talonov A.V., Vlasov A.N., Volkov-Bogorodskiy D.B. *Averaging the nonstationary equations of viscous substance filtration through a rigid porous medium*. Composites: Mechanics, Computations, Applications, 2014, Vol.5, No.1, Pp.35-61.
32. Savatorova V.L., Talonov A.V., Vlasov A.N., Volkov-Bogorodskiy D.B. *Brinkman's filtration of fluid in rigid porous media: multiscale analysis and investigation of effective permeability*. Composites: Mechanics, Computations, Applications, 2015, Vol.6, No.3, Pp.239-264.
33. Bykov N.E., Fursov A.Ya., Maximov M.I. et al. *Spravochnik po neftepromyslovoj geologii [Oilfield Geology Handbook]* / pod red. Bykova N.E., Maximova M.I., Fursova A.Ya. Moskva, Izdatel'stvo Nedra, 1981, 525 p.
34. Dobrynin V.M. *Deformatsii i izmeneniya fizicheskikh svojstv kollektorov nefti i gaza [Deformations and changes in the physical properties of oil and gas reservoirs]*. Moskva, Izdatel'stvo Nedra, 1970, 239 p.
35. Shchelkachev V.N., Lapuk B.B. *Podzemnaya gidravlika [Underground hydraulics]*. Izhevsk, Nauchno-izdatel'skij tsentr "Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika", 2001, 736 p.
36. Nigmatulin R.I. *Dinamika mnogofaznykh sred. Part I [The dynamics of multiphase media. Part I]*. Moskva, Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoj literatury izdatel'stva "Nauka", 1987, 464 p.
37. Biot M.A., Willis D.G. *The elastic coefficients of the theory of consolidation*. J. Appl. Mech., 1957, Vol.24, Pp.594-601.
38. Sheshenin S.V., Lazarev B.P., Artamonova N.B. *Application of the asymptotic homogenization method to find the expansion coefficient of a water-saturated porous medium during freezing processes*. Moscow Univ. Mech. Bull., 2016, Vol.71, No.6, Pp.127-131.
39. Shchelkachev V.N. *Osnovy i prilozheniya teorii neustanovivshejsya fil'tratsii. Part 2 [Fundamentals and applications of the theory of unsteady filtration. Part 2]*. Moskva, Neft' i gaz, 1995, 493 p.
40. Donea J., Huerta A. *Finite element methods for flow problems*. Chichester, John Wiley & Sons Ltd, 2003, 358 p.
41. Bychenkov YU.V., Chizhonkov Ye.V. *Iteratsionnye metody resheniya sedlovykh zadach [Iterative methods for solving saddle problems]*. Moskva, BINOM, Laboratoriya znanij, 2014, 349 p.
42. Kiselev F.B., Sheshenin S.V. *The difference scheme for the problem of non-stationary filtration in layered soils*. Mech. Solids, 1996, Vol.31, No.4.
43. Sheshenin S.V., Kiselev F.B., Artamonova N.B. *Neyavnye chislennye skhemy v zadachakh fil'tratsii v poristykh sredakh [Implicit numerical schemes in filtration problems in porous media]*. Vestnik MGSU, 2011, No.6, Pp.312-317.

Поступила в редакцию 14 января 2020 года.

Сведения об авторах:

Артамонова Нина Брониславовна – к.г.-м.н., с.н.с., ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова», г. Москва, Россия, e-mail: artamonovanb@mail.ru

Шешенин Сергей Владимирович – д.ф.-м.н., проф., ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова», г. Москва, Россия, e-mail: sheshenin@mech.math.msu.su