

УДК 531.3

DOI 10.33113/mkmk.ras.2020.26.01.139_150.09

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СОСТАВНЫХ УПРУГИХ СИСТЕМ СО СВЯЗЯМИ*

Русских С.В.^{1,2}, Шклярчук Ф.Н.^{2,1}

¹ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия

²ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Рассматривается нестационарное движение двух упругих систем, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями в обобщенных координатах. Считается, что в исходном состоянии или в процессе трансформации эти две системы соединяются между собой в конечном числе точек упругими или геометрическими голономными связями. На основании принципа возможных перемещений (Даламбера-Лагранжа) получены уравнения движения составной системы в тех же самых обобщенных координатах с учетом связей. При этом упругие связи учитываются путем добавления потенциальной энергии деформации соединительных элементов, которая выражается с использованием условий соединения через обобщенные координаты двух систем. Геометрические связи учитываются в вариационном уравнении путем добавления вариации работы неизвестных реакций удержания связей при их малых возможных изменениях и выражаются через вариации обобщенных координат рассматриваемых систем. Из этого расширенного вариационного уравнения получаются уравнения составной системы, к которым добавляются алгебраические уравнения геометрических связей. Этот подход эквивалентен подходу получения уравнений в обобщенных координатах с неопределенными множителями Лагранжа, представляющими реакции в связях.

В качестве примера рассмотрена система, состоящая из упругой на изгиб, нерастяжимой консольной балки, совершающей нелинейные в квадратичном приближении продольно-поперечные колебания, на конце которой шарнирно присоединено тяжелое твердое тело, поворачивающееся на конечный угол. Изгиб балки представляется по методу Ритца двумя обобщенными координатами. Две линейные связи по перемещениям балки и тела в шарнире удовлетворяются точно, а третья нелинейная связь, представляющая условие нерастяжимости балки, добавляется к уравнениям движения системы, включающим неизвестную реакцию удержания этой связи.

Получены численные решения начальной задачи о вынужденных нелинейных колебаниях балки с присоединенным телом в двух вариантах со сравнениями: 1) нелинейная связь удовлетворяется аналитически точно, а неизвестная реакция исключается из уравнений колебаний; 2) связь дифференцируется по времени и удовлетворяется путем численного интегрирования совместно с дифференциальными уравнениями движения системы.

Ключевые слова: упругие системы; составные системы; связи; нелинейные колебания; уравнения движения системы со связями; численное интегрирование уравнений

* Работа выполнена в рамках государственного задания ИПРИМ РАН (номер госрегистрации темы АААА-А19-119012290118-3).

NUMERICAL SOLUTION OF NONLINEAR MOTION EQUATIONS OF COMPOUND ELASTIC SYSTEMS WITH JOINS

Russkikh S.V.^{1,2}, Shklyarchuk F.N.^{2,1}

¹*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia*

²*Institute of Applied Mechanics Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

ABSTRACT

The unsteady motion of two elastic systems described by nonlinear differential equations in generalized coordinates is considered. It is believed that in the initial state or during the transformation process, these two systems are connected to each other in a finite number of points by elastic or geometric holonomic bonds. Based on the principle of virtual displacements (D'Alembert-Lagrange), the equations of motion of the composite system in the same generalized coordinates are obtained taking into account the constraints. In this case, elastic bonds are taken into account by adding the potential energy of deformation of the connecting elements, which is expressed using the conditions of the connection through the generalized coordinates of the two systems. Geometric bonds are taken into account in the variational equation by adding variations to the work of unknown reactions of bond retention at their small possible changes and are expressed through variations of the generalized coordinates of the systems under consideration. From this extended variational equation, equations of the composite system are obtained, to which algebraic equations of geometric relationships are added. This approach is equivalent to the approach of obtaining equations in generalized coordinates with indefinite Lagrange multipliers representing reactions in bonds.

As an example, we consider a system consisting of a bending elastic, inextensible cantilever beam that performs non-linear quadratic longitudinal-transverse vibrations, at the end of which a heavy rigid body is pivotally connected, which rotates through a finite angle. The beam bending is represented by the Ritz method by two generalized coordinates. Two linear constraints on the displacements of the beam and the body in the hinge are satisfied exactly, and the third nonlinear constraint, representing the condition of inextensibility of the beam, is added to the equations of motion of the system, including an unknown reaction to hold this constraint.

Numerical solutions of the initial problem of forced nonlinear vibrations of a beam with an attached body are obtained in two versions with comparisons: 1) the nonlinear coupling is satisfied analytically accurately, and the unknown reaction is excluded from the vibration equations; 2) the connection is differentiated in time and is satisfied by numerical integration together with the differential equations of motion of the system.

Keywords: elastic systems; composite systems; constraints; nonlinear oscillations; equations of motion of a system with constraints; numerical integration of equations

ВВЕДЕНИЕ

В линейных задачах динамики нерегулярных упругих конструкций, описываемых математическими моделями с большим числом степеней свободы, часто используется метод подконструкций (подсистем) – суперэлементов [1], модуль-элементов [2], отсеков [3]. Уравнения для каждой подконструкции составляются отдельно; при этом можно использовать различные расчетные модели и методы и редуцировать число неизвестных параметров путем статической конденсации и преобразования к нормальным координатам, представляющим несколько низших собственных форм колебаний закрепленной или свободной подконструкции. Геометрические условия соединения

подконструкций на контактных границах удовлетворяются в отдельных точках (узлах), по методу наименьших квадратов или по методу Бубнова-Галеркина. При соединении упругих тел на малых участках контактной границы возникают локальные податливости тел, которые можно описывать «безынерционными» обобщенными координатами или после их исключения – эквивалентными пружинами [3,4].

Этот подход для составных упругих в общем случае нелинейных систем также может быть реализован путем использования уравнений Лагранжа или принципа Даламбера-Лагранжа в обобщенных координатах с неопределенными множителями и геометрическими связями [5-7]. При этом для уменьшения числа переменных могут быть использованы различные варианты исключения неопределенных множителей (реакций удержания связей) и точного выполнения некоторых условий связей с исключением такого же числа обобщенных координат. Оставшиеся связи в виде алгебраических уравнений присоединяются к дифференциальным уравнениям движения и образуют замкнутую систему дифференциально-алгебраических уравнений. Такие системы обычно являются «жесткими» и для их численного решения требуется использовать специальные методы [8-10].

В данной работе на примере расчета переходных нелинейных колебаний упругой нерастяжимой балки с поворачивающимся по заданному закону тяжелым телом на ее конце выполнены численные решения этой задачи со сравнениями двух вариантов: решение двух дифференциальных уравнений движения системы при точном выполнении связей балки с телом; решение двух дифференциальных уравнений и одного алгебраического уравнения нелинейной связи для трех обобщенных координат.

1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМ СО СВЯЗЯМИ

Уравнения движения двух несвязанных между собой упругих нелинейных систем в обобщенных координатах записываются в символическом виде

$$L_i^{(k)}(\bar{\mathbf{q}}_j^{(k)}, t) = \mathbf{Q}_i^{(k)}(t); \quad i = 1, 2, \dots, n_k; \quad k = 1, 2, \quad (1)$$

где $\bar{\mathbf{q}}_j^{(k)}$, $\mathbf{Q}_i^{(k)}(t)$ – обобщенные координаты и обобщенные силы k -ой системы; $L_i^{(k)}$ – нелинейный дифференциальный оператор; верхней стрелкой обозначается совокупность всех обобщенных координат k -ой системы, т.е. $\bar{\mathbf{q}}_j^{(k)} \rightarrow \mathbf{q}_1^{(k)}, \mathbf{q}_2^{(k)}, \dots, \mathbf{q}_{n_k}^{(k)}$.

При соединении рассматриваемых систем друг с другом по перемещениям и конечным углам поворота в определенных точках систем должны удовлетворяться в общем случае нелинейные геометрические связи

$$f_r(\bar{\mathbf{q}}_j^{(1)}, \bar{\mathbf{q}}_j^{(2)}, t) = 0; \quad r = 1, 2, \dots, s. \quad (2)$$

Для упругих связей записывается потенциальная энергия деформации и выражается через обобщенные координаты систем; например, для p -ой упругой связи – $P_p(\bar{\mathbf{q}}_j^{(1)}, \bar{\mathbf{q}}_j^{(2)})$.

Уравнения движения составной системы со связями могут быть получены как уравнения Лагранжа в обобщенных координатах с неопределенными множителями [5,6] или на основании вариационного принципа возможных

перемещений (Даламбера-Лагранжа) с учетом вариации работы неизвестных реакций N_r при малых возможных изменениях связей δf_r в виде

$$\sum_{i,k} (L_i^{(k)} - Q_i^{(k)}) \delta q_i^{(k)} + \sum_p \delta \Pi_p - \sum_r N_r \delta f_r = 0, \quad (3)$$

где

$$\delta \Pi_p = \sum_{i,k} \frac{\partial \Pi_p}{\partial q_i^{(k)}} \delta q_i^{(k)}; \quad \delta f_r = \sum_{i,k} \frac{\partial f_r}{\partial q_i^{(k)}} \delta q_i^{(k)}. \quad (4)$$

В результате в силу произвольности и независимости вариаций $\delta q_i^{(k)}$, уравнения движения составной системы с учетом связей (2) будут иметь вид

$$L_i^{(k)} - Q_i^{(k)} + \sum_p \frac{\partial \Pi_p}{\partial q_i^{(k)}} - \sum_r N_r \frac{\partial f_r}{\partial q_i^{(k)}} = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n_k; \quad k = 1, 2; \quad (5)$$

к этим уравнениям необходимо добавить условия связей (2).

Для решения связанной системы уравнений (2), (5) для неизвестных функций $q_i^{(k)}(t)$, $N_r(t)$ при $i = 1, 2, \dots, n_k$, $k = 1, 2$, $r = 1, 2, \dots, s$ необходимо использовать методы численного интегрирования систем дифференциально-алгебраических уравнений [8-10]. Если геометрические связи $f_r = 0$ заменить соответствующими дифференциальными связями $\dot{f}_r = 0$, то тогда можно использовать методы численного интегрирования систем дифференциальных уравнений.

Систему уравнений (2), (5) можно редуцировать, удовлетворяя некоторые (в первую очередь линейные) или все связи (2) и исключить из уравнений (5) соответствующие реакции связей N_r . При этом редуцированная система уравнений становится весьма громоздкой.

2. НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОЙ БАЛКИ С ПОВОРАЧИВАЮЩИМСЯ ТЯЖЕЛЫМ ТЕЛОМ НА КОНЦЕ

Рассмотрим упругую консольно закрепленную нерастяжимую балку постоянного поперечного сечения, на конце которой при $x=l$ шарнирно присоединено тяжелое абсолютно твердое тело, совершающее неустановившееся вращательное движение с большим углом поворота, рис.1. Колебания гибкой балки будем считать умеренно большими и нелинейными в квадратичном приближении, инерцией в продольном направлении и инерцией вращения поперечных сечений балки будем пренебрегать. Относительный угол поворота тела $\varphi(t)$ будем считать заданным.

Продольное перемещение u при изгибе выражается через поперечное перемещение v из условия нерастяжимости оси балки

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = 0;$$

откуда путем интегрирования с учетом $u(0, t) = 0$, $u(l, t) = u_1(t)$ получаем

$$u_1 = -\frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (6)$$

В качестве обобщенных координат будем рассматривать перемещение v_1 и угол поворота ϑ_1 на конце балки при $x=l$. Поперечное перемещение выразим через эти координаты приближенно как для конечного элемента при изгибе без учета поперечных сдвигов [11]

$$v(x,t) = v_1(t)\varphi_1(x) + \vartheta_1(t)\psi_1(x);$$

$$\varphi_1(x) = 3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3}; \quad \psi_1(x) = -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}. \tag{7}$$

Угол поворота поперечного сечения определяется как $\vartheta(x,t) = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x}$.

С учетом (6) и (7) продольное перемещение конца балки u_1 записывается в виде

$$u_1 = -\left(\frac{3}{5l}v_1^2 - \frac{1}{10}v_1\vartheta_1 + \frac{l}{15}\vartheta_1^2\right) = -\frac{1}{2}l\left(p\frac{v_1}{l} + q\vartheta_1\right), \tag{8}$$

где

$$p(v_1, \vartheta_1) = \frac{6}{5}\frac{v_1}{l} - \frac{1}{10}\vartheta_1; \quad q(v_1, \vartheta_1) = -\frac{1}{10}\frac{v_1}{l} + \frac{2}{15}\vartheta_1. \tag{9}$$

Условие (8) с учетом (9) будем рассматривать как нелинейную геометрическую связь.

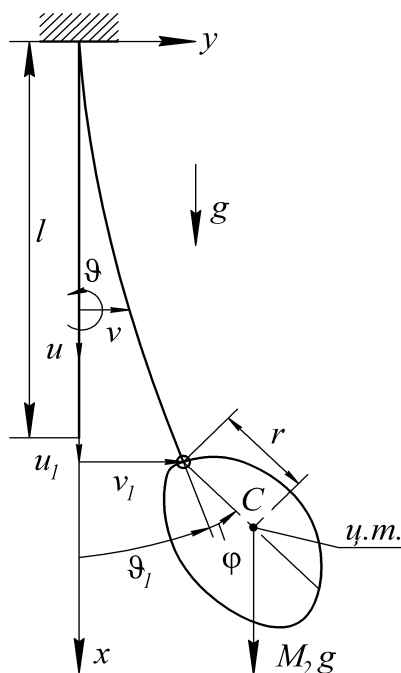


Рис.1. Балка с поворачивающимся телом на конце.

Нелинейные уравнения колебаний рассматриваемой системы (рис.1) в обобщенных координатах $v_1(t)$ и $\vartheta_1(t)$ с учетом всех геометрических связей составим по методу Лагранжа.

Кинетическая энергия балки с постоянной погонной массой m

$$T_1 = \frac{1}{2} m \int_0^l \dot{v}^2 dx = \frac{1}{2} (m_{vv} \dot{v}_1^2 + 2m_{v\vartheta} \dot{v}_1 \dot{\vartheta}_1 + m_{\vartheta\vartheta} \dot{\vartheta}_1^2); \quad (10)$$

$$m_{vv} = \frac{13}{35} ml; \quad m_{v\vartheta} = -\frac{11}{210} ml^2; \quad m_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{105} ml^3.$$

Потенциальная энергия балки с постоянной изгибной жесткостью EI

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} EI \int_0^l \left(\frac{\partial^2 v}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} (k_{vv} v_1^2 + 2k_{v\vartheta} v_1 \vartheta_1 + k_{\vartheta\vartheta} \vartheta_1^2); \quad (11)$$

$$k_{vv} = 1 \frac{EI}{l^3}; \quad k_{v\vartheta} = -6 \frac{EI}{l^2}; \quad k_{\vartheta\vartheta} = 4 \frac{EI}{l}.$$

Кинетическая энергия поступательного и вращательного движений тела

$$T_2 = \frac{1}{2} M_2 (\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) + \frac{1}{2} J_C \dot{\theta}^2,$$

где M_2 и J_C – масса и момент инерции относительно центра тяжести (точка C) присоединенного тела. Координаты центра тяжести тела x_C , y_C и полный угол его поворота θ будут (рис.1)

$$x_C = l + u_1 + r \cos \theta; \quad y_C = v_1 + r \sin \theta; \quad \theta = \vartheta_1 + \varphi.$$

С учетом этих выражений получаем

$$T_2 = \frac{1}{2} [\dot{u}_1^2 + \dot{v}_1^2 + 2r(-\dot{u}_1 \sin \theta + \dot{v}_1 \cos \theta) \dot{\theta}] + \frac{1}{2} J_2 (\dot{\vartheta}_1 + \dot{\varphi})^2, \quad (12)$$

где $J_2 = J_C + M_2 r^2$; r – расстояние от шарнира до центра тяжести тела (рис.1).

Потенциальная энергия силы тяжести тела

$$\Pi_2 = M_2 g (-u_1 + r(1 - \cos \theta)). \quad (13)$$

С учетом выражений (7), (10)-(13) уравнения Лагранжа для обобщенных координат v_1 и ϑ_1 при $\theta = \vartheta_1 + \varphi$ записываются в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} & (m_{vv} + M_2(1 + p^2)) \ddot{v}_1 + (m_{v\vartheta} + M_2 lpq + M_2 r(p \sin \theta + \cos \theta)) \ddot{\vartheta}_1 + \\ & + k_{vv} v_1 + k_{v\vartheta} \vartheta_1 + M_2 (p \dot{p} \dot{v}_1 + p \dot{q} l \dot{\vartheta}_1) + \\ & + M_2 r (\ddot{\varphi} (p \sin \theta + \cos \theta) + \dot{\theta}^2 (p \cos \theta - \sin \theta)) + M_2 gp = 0; \\ & (m_{\vartheta\vartheta} + M_2 lpq + M_2 r(p \sin \theta + \cos \theta)) \ddot{v}_1 + \quad (14) \\ & + (m_{\vartheta\vartheta} + M_2 lq(lq + 2r \sin \theta) + J_2) \ddot{\vartheta}_1 + k_{v\vartheta} v_1 + k_{\vartheta\vartheta} \vartheta_1 + \\ & + M_2 (l(p \dot{q} \dot{v}_1 + q \dot{q} l \dot{\vartheta}_1) + r \sin \theta (\dot{p} \dot{v}_1 + \dot{q} l \dot{\vartheta}_1)) + \\ & + M_2 rlq (\ddot{\varphi} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) + J_2 \ddot{\varphi} + M_2 g (ql + r \sin \theta) = 0. \end{aligned}$$

Введем безразмерную координату $\bar{v}_1 = v_1/l$ и безразмерное время $\tau = t/T$, где T – некоторый характерный промежуток времени; производную по τ будем обозначать штрихом. Тогда система (14) записывается в безразмерном виде

$$\begin{aligned}
& (\mu_{11} + 1 + p^2) \bar{v}_1'' + (\mu_{12} + pq + \bar{r}(p \sin \theta + \cos \theta)) \vartheta_1'' + \\
& + \kappa_{11} \bar{v}_1 + \kappa_{12} \vartheta_1 + (pp' \bar{v}_1' + pq' \vartheta_1') + \\
& + \bar{r} \left(p(\varphi'' \sin \theta + \theta'^2 \cos \theta) + (\varphi'' \cos \theta - \theta'^2 \sin \theta) \right) + \bar{g} p = 0; \\
& (\mu_{12} + pq + \bar{r}(p \sin \theta + \cos \theta)) \bar{v}_1'' + (\mu_{22} + q^2 + 2q\bar{r} \sin \theta + j_2) \vartheta_1'' + \\
& + \kappa_{12} \bar{v}_1 + \kappa_{22} \vartheta_1 + (pq' \bar{v}_1' + qq' \vartheta_1') + \bar{r} \sin \theta (p' \bar{v}_1' + q' \vartheta_1') + \\
& + \bar{r} q (\varphi'' \sin \theta + \theta'^2 \cos \theta) + j_2 \varphi'' + \bar{g} (q + \bar{r} \sin \theta) = 0,
\end{aligned} \tag{15}$$

где

$$\begin{aligned}
q(\bar{v}_1, \vartheta_1) &= \frac{6}{5} \bar{v}_1 - \frac{1}{10} \vartheta_1; \quad p(\bar{v}_1, \vartheta_1) = -\frac{1}{10} \bar{v}_1 + \frac{2}{15} \vartheta_1; \\
\mu_{11} &= \frac{13}{35} \frac{ml}{M_2}; \quad \mu_{12} = -\frac{11}{210} \frac{ml}{M_2}; \quad \mu_{22} = \frac{1}{105} \frac{ml}{M_2}; \\
\kappa_{11} &= 1 - \frac{EI}{M_2 l^3} T^2; \quad \kappa_{12} = -6 \frac{EI}{M_2 l^3} T^2; \quad \kappa_{22} = 4 \frac{EI}{M_2 l^3} T^2; \\
j_2 &= \frac{J_2}{M_2 l^2}; \quad \bar{r} = \frac{r}{l}; \quad \bar{g} = \frac{g T^2}{l}.
\end{aligned}$$

Учитывая, что продольно-поперечный изгиб балки рассматривается в квадратичном приближении по v_1 и ϑ_1 , в уравнениях (15) при заданном $\varphi(t)$ можно положить

$$\sin \theta \approx \vartheta_1 \cos \varphi + \left(1 - \frac{1}{2} \vartheta_1^2\right) \sin \varphi; \quad \cos \theta \approx \left(1 - \frac{1}{2} \vartheta_1^2\right) \cos \varphi - \vartheta_1 \sin \varphi$$

и затем пренебречь нелинейными членами с v_1 и ϑ_1 выше второго порядка. Однако при численном решении удобнее использовать непосредственно более компактные уравнения (15).

Из уравнений (15) получаются линейризованные уравнения для малых величин \bar{v}_1 и ϑ_1

$$\begin{aligned}
& (1 + \mu_{11}) \bar{v}_1'' + (\mu_{12} + \bar{r} \cos \varphi) \vartheta_1'' + (-2\bar{r} \varphi' \sin \varphi) \bar{v}_1' + \\
& + \left(\kappa_{11} + \frac{6}{5} \left(\bar{r} (\varphi'' \sin \varphi + \varphi'^2 \cos \varphi) + \bar{g} \right) \right) \bar{v}_1 + \\
& + \left(\kappa_{12} - \frac{11}{10} \bar{r} (\varphi'' \sin \varphi + \varphi'^2 \cos \varphi) - \frac{1}{10} \bar{g} \right) \vartheta_1 + \\
& + \bar{r} (\varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi) = 0; \\
& (\mu_{12} + \bar{r} \cos \varphi) \bar{v}_1'' + (\mu_{22} + j_2) \vartheta_1'' + \\
& + \left(\kappa_{12} - \frac{1}{10} \left(\bar{r} (\varphi'' \sin \varphi + \varphi'^2 \cos \varphi) + \bar{g} \right) \right) \bar{v}_1 + \\
& + \left(\kappa_{22} + \bar{g} \bar{r} \cos \varphi + \frac{2}{15} \left(\bar{r} (\varphi'' \sin \varphi + \varphi'^2 \cos \varphi) + \bar{g} \right) \right) \vartheta_1 + \\
& + j_2 \varphi'' + \bar{g} \bar{r} \sin \theta = 0.
\end{aligned} \tag{16}$$

3. УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ С ОСВОБОЖДЕННЫМИ СВЯЗЯМИ

Отделим тело от балки (рис.2) и для него введем новые обобщенные координаты: u_2 и v_2 – продольное и поперечное перемещения точки подвеса твердого тела; θ – угол поворота тела. Для балки обобщенными координатами по-прежнему будут являться перемещение v_1 и угол поворота ϑ_1 на ее конце. Реакции присоединенного тела при его движении будем обозначать через N , P и M . Геометрические связи шарнирного соединения тела с концом упругой балки записываются в виде

$$u_2 - u_1 = 0; \quad v_2 - v_1 = 0; \quad \theta - (\vartheta_1 + \varphi) = 0. \quad (17)$$

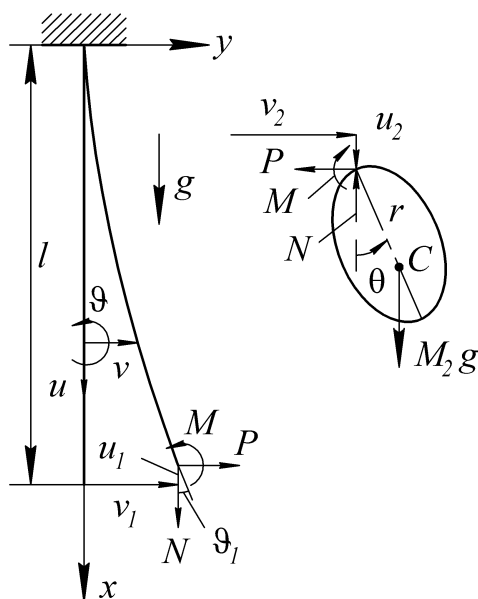


Рис.2. Балка и тело с освобожденными кинематическими связями.

Уравнения поперечных колебаний балки с учетом действующих на ее конце сил (реакций тела, рис.2) в обобщенных координатах v_1 и ϑ_1 имеют вид

$$\begin{aligned} m_{vv} \ddot{v}_1 + m_{v\vartheta} \ddot{\vartheta}_1 + k_{vv} v_1 + k_{v\vartheta} \vartheta_1 + p &= NP; \\ m_{v\vartheta} \ddot{v}_1 + m_{\vartheta\vartheta} \ddot{\vartheta}_1 + k_{v\vartheta} v_1 + k_{\vartheta\vartheta} \vartheta_1 + q &= NM. \end{aligned} \quad (18)$$

Продольная растягивающая сила входит в уравнения (18) нелинейно.

Уравнения плоского движения свободного твердого тела под действием реакций балки (рис.2) записываются в переменных u_2 , v_2 и θ

$$\begin{aligned} M_2 \ddot{v}_2 + M_2 r (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) &= -P; \\ M_2 r (-\ddot{u}_2 \sin \theta + \ddot{v}_2 \cos \theta + g \sin \theta) + J_2 \ddot{\theta} &= -M; \\ M_2 (\ddot{u}_2 - r \ddot{\theta} \sin \theta - r \dot{\theta}^2 \cos \theta - g) &= -N. \end{aligned} \quad (19)$$

В итоге получаем замкнутую нелинейную систему 5-ти дифференциальных уравнений (18), (19) и 3-х алгебраических уравнений связи (17).

Далее для уменьшения числа уравнений реакции N , P и M выражаем через левые части уравнений (19) и подставляем их в уравнения (18), удовлетворяя при этом второе и третье условия связей (17). Преобразованные

таким образом уравнения (18) для переменных v_1 , ϑ_1 и u_2 при $\theta = \vartheta_1 + \varphi$ запишем в безразмерном виде, обозначая $\bar{u}_2 = u_2/l$

$$\begin{aligned} & (1 + \mu_{11})\bar{v}_1'' + (\mu_{12} + \bar{r}(p \sin \theta + \cos \theta))\vartheta_1'' + (-p)\bar{u}_2'' + \\ & + \kappa_{11}\bar{v}_1 + \kappa_{12}\vartheta_1 + \\ & + \bar{r}(p(\varphi'' \sin \theta + \theta'^2 \cos \theta) + (\varphi'' \cos \theta - \theta'^2 \sin \theta)) + \bar{g}p = 0; \\ & (\mu_{12} + \bar{r} \cos \theta)\bar{v}_1'' + (\mu_{22} + q\bar{r} \sin \theta + j_2)\vartheta_1'' + (-q - \bar{r} \sin \theta)\bar{u}_2'' + \\ & + \kappa_{12}\bar{v}_1 + \kappa_{22}\vartheta_1 + \\ & + \bar{r}q(\varphi'' \sin \theta + \theta'^2 \cos \theta) + j_2\varphi'' + \bar{g}(q + \bar{r} \sin \theta) = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Система двух уравнений (20) дополняется первой геометрической связью (17), которая с учетом выражения (8) принимает вид

$$\bar{u}_2 + \frac{1}{2}(\bar{v}_1 p(\bar{v}_1, \vartheta_1) + \vartheta_1 q(\bar{v}_1, \vartheta_1)) = 0. \quad (21)$$

Таким образом, получается система дифференциально-алгебраических уравнений (20) и (21). Если соотношение (21) продифференцировать по безразмерному времени τ , то с учетом обозначений (9) оно запишется в виде дифференциального уравнения

$$\bar{u}_2' + p\bar{v}_1' + q\vartheta_1' = 0. \quad (22)$$

Если условие (22) еще раз продифференцировать по τ и подставить полученное выражение \bar{u}_2'' в уравнения (20), то получим уравнения (15) для системы с учетом связей.

4. ПРИМЕР РАСЧЕТА

В качестве примера рассмотрим нелинейные колебания упругой нерастяжимой балки с тяжелым твердым телом на ее конце, поворачивающимся по заданному закону на большой угол $\varphi(t)$. Примем следующие размерные параметры системы: $l = 2,5$ м; $EI = 1000$ Па \cdot м⁴; $m = 2$ кг/м; $M_2 = 12$ кг; $J_C = 1$ кг \cdot м²; $r = 0,5$ кг; $g = 10$ м/с²; при этом период малых колебаний балки с телом на конце, повернутым на угол $\varphi = \pi/2$ равен $T_1 \approx 1,6$ с. Закон изменения угла поворота тела примем в виде: $\varphi(t) = \pi \cdot \sin(\pi t/2T)$ при $t \leq T$; $\varphi(t) = \pi$ при $t > T$. Здесь величина $T = 0,85$ с, представляющая время поворота тела на угол $\varphi = \pi$, выбрана путем проб так, чтобы колебания балки были умеренно большими. Величину T рассматриваем в качестве характерного времени при приведении уравнений к безразмерному виду с безразмерным временем $\tau = t/T$.

При интегрировании уравнений для неизвестных функций $\bar{v}_1(\tau)$ и $\vartheta_1(\tau)$ принимались нулевые начальные условия при $\tau = 0$: $\bar{v}_1(0) = 0$; $\bar{v}_1'(0) = 0$; $\vartheta_1(0) = 0$; $\vartheta_1'(0) = 0$. В случае, когда функция $\bar{u}_2(\tau)$ рассматривалась как независимая переменная, и алгебраическое условие связи (21) дифференцировалось дважды и добавлялось к дифференциальным уравнениям движения (20), принимались также начальные условия $\bar{u}_2(0) = 0$, $\bar{u}_2'(0) = 0$.

Численное интегрирование дифференциальных уравнений осуществлялось методом BDF в программном комплексе компьютерной алгебры PTC MathCad 15.0 с постоянным шагом $\Delta\tau = 10^{-5}$.

На рис.3а,б,в приведены результаты расчетов в виде графиков функций $\bar{v}_1(\tau)$, $\vartheta_1(\tau)$ и $\bar{u}_2(\tau)$, соответственно.

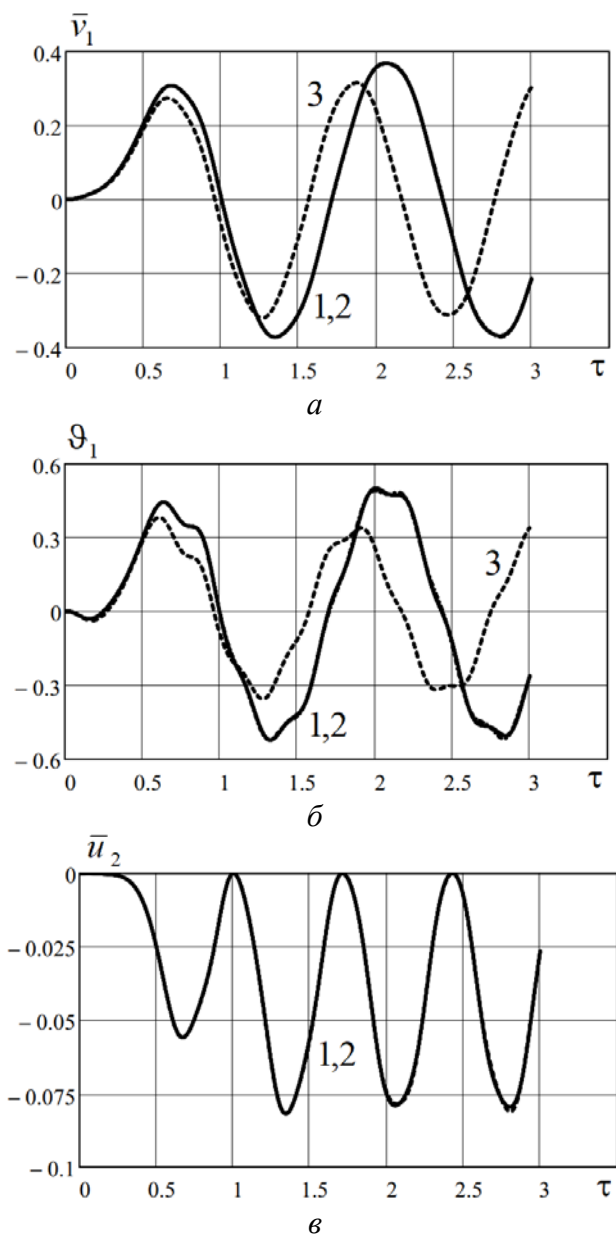


Рис.3. Результаты численного решения для балки с поворачивающимся телом на ее конце.

Сплошными линиями 1 на этих рисунках показаны результаты решения уравнений (15) для $\bar{v}_1(\tau)$ и $\vartheta_1(\tau)$, полученных с учетом всех геометрических связей в шарнире, соединяющим балку и тело. Штрихпунктирными линиями 2, которые в пределах масштаба графиков практически совпадают с линиями 1, показаны результаты решения уравнений (20) для $\bar{v}_1(\tau)$, $\vartheta_1(\tau)$ и $\bar{u}_2(\tau)$ с добавлением продифференцированного дважды условия нелинейной

геометрической связи (21). Пунктирными линиями на рис.3а,б показаны результаты решения линеаризованных уравнений (16) для $\bar{v}_1(\tau)$ и $\Theta_1(\tau)$ с учетом всех линейных геометрических связей при $\bar{u}_1 \approx \bar{u}_2 \approx 0$. На рис.3,в линия I построена на основании численного решения для $\bar{v}_1(\tau)$ и $\Theta_1(\tau)$ и формулы (21).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен подход получения уравнений движения упругих составных систем с геометрическими связями путем использования уравнений в обобщенных координатах отдельных свободных систем с учетом неизвестных реакций и присоединения к этим уравнениям условий связей.

В качестве примера выполнено сравнение двух вариантов численного решения задачи о переходных нелинейных колебаниях упругой нерастяжимой балки с поворачивающимся по заданному закону тяжелым твердым телом на ее конце. В первом варианте условие связи конца балки и тела по перемещениям и углу поворота выполняется точно. Во втором варианте нелинейная связь – условие равенства продольного перемещения тела и конца нерастяжимой балки выполняется приближенно путем численного интегрирования совместно с дифференциальными уравнениями колебаний балки, в которых учитывается реакция этой связи.

Результаты расчета для этих двух вариантов практически (в пределах масштаба графиков) совпадают.

ЛИТЕРАТУРА

1. Постнов В.А., Дмитриев С.А., Елтышев Б.К., Родионов А.А. *Метод суперэлементов в расчетах инженерных сооружений*. – Л.: Судостроение, 1979. – 287 с.
2. Постнов В.А., Тарануха Н.А. *Метод модуль-элементов в расчетах судовых конструкций*. – Л.: Судостроение, 1990. – 320 с.
3. Гришанина Т.В., Тютюнников Н.П., Шклярчук Ф.Н. *Метод отсеков в расчетах колебаний конструкций летательных аппаратов*. – М.: Изд-во МАИ, 2010. – 180 с.
4. Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. *Динамика упругих управляемых конструкций*. – М.: Изд-во МАИ, 2007. – 328 с.
5. Лурье А.И. *Аналитическая механика*. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.
6. Ланцош К. *Вариационные принципы механики*. – М.: Мир, 1965. – 408 с.
7. Бойков В.Г., Юдаков А.А. *Моделирование динамики системы твердых и упругих тел в программном комплексе Euler* // Информационные технологии и вычислительные системы. – 2011. – №1. – С.42-52.
8. Хайрер Э., Ваннер Г. *Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи*. – М.: Мир, 2014. – 685 с.
9. Скворцов Л.М. *Неявный метод пятого порядка для решения дифференциально-алгебраических уравнений* // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2015. – Т.55. – №6. – С.978-984.
10. Данилин А.Н. *Конечно-элементное моделирование плоского движения гибкой стержневой системы со связями* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2016. – Т.22. – №4. – С.467-490.

11. Шклярчук Ф.Н. *Колебания и аэроупругость летательных аппаратов*. – М.: Изд-во МАИ, 1981. – 89 с.

REFERENCES

1. Postnov V.A., Dmitriev S.A., Eltyshev B.K., Rodionov A.A. *Metod superelementov v raschetakh inzhenernykh sooruzhenij [The method of superelements in the calculations of engineering structures]*. Leningrad, Sudostroenie, 1979, 287 p.
2. Postnov V.A., Taranuxa N.A. *Metod modul'-elementov v raschetakh sudovykh konstruksij [The module-element method in the calculation of ship structures]*. Leningrad, Sudostroenie, 1990, 320 p.
3. Grishanina T.V., Tyutyunnikov N.P., Shklyarchuk F.N. *Metod otsekov v raschetakh kolebanij konstruksij letatel'nykh apparatov [Method of compartments in the calculation of structural oscillations of aircraft]*. Moskva, Izdatel'stvo Moskovskogo aviatsionnogo instituta, 2010, 180 p.
4. Grishanina T.V., Shkliarchuk F.N. *Dinamika upravlyaemykh konstruksij [Dynamics of elastic controlled structures]*. Moskva, Izdatel'stvo Moskovskogo aviatsionnogo instituta, 2007, 328 p.
5. Lur'e A.I. *Analiticheskaya mekhanika [Analytical mechanics]*. Moskva, Fizmatgiz, 1961, 824 p.
6. Lancosh K. *Variatsionnye printsipy mekhaniki [Variational principles of mechanics]*. Moskva, Mir, 1965, 408 p.
7. Bojkov V.G., Yudakov A.A. *Modelirovanie dinamiki sistemy tverdykh i upravlyayemykh tel v programnom komplekse Euler [Modeling the dynamics of a system of rigid and elastic bodies in the Euler software package]*. Informatsionnye tekhnologii i vychislitel'nye sistemy, 2011, No.1, Pp.42-52.
8. Xajrer E., Vanner G. *Reshenie obyknovennykh differentsial'nykh uravnenij. Zhestkie i differentsial'no-algebraicheskie zadachi [The solution of ordinary differential equations. Rigid and differential algebraic problems]*. Moskva, Mir, 2014, 685 p.
9. Skvortsov L.M. *A fifth order implicit method for the numerical solution of differential-algebraic equations*. Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2015, Vol.55, No.6, Pp.962-968.
10. Danilin A.N. *Konechno-elementnoe modelirovanie ploskogo dvizheniya gibkoj sterzhnevoj sistemy so svyazyami [Finite-element modeling of plane motion of a flexible rod system with constraints]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2016, Vol.22, No.4, Pp.467-490.
11. Shklyarchuk F.N. *Kolebaniya i aehrouprugost' letatel'nykh apparatov [Oscillations and Aeroelasticity aircrafts]*. Moskva, Izdatel'stvo Moskovskogo aviatsionnogo instituta, 1981, 89 p.

Поступила в редакцию 31 января 2020 года.

Сведения об авторах:

Русских Сергей Владимирович – к.ф.-м.н., доц., Кафедра «Проектирование и прочность авиационно-ракетных и космических изделий», ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия; e-mail: sergey.russkih@rambler.ru

Шклярчук Федор Николаевич – д.т.н., проф., г.н.с., ФГБНУ Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: shklyarchuk@list.ru