УДК 539.3
DOI 10.33113/mkmk.ras.2020.26.02.157_173.01

# ЛИНЕЙНЫЙ УПРУГИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКОЙ ОРТОГОНАЛЬНОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ С РАЗЛИЧНЫМИ МОДЕЛЯМИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ

Рыбаков Л.С.

*ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия*

## АННОТАЦИЯ

Представлена линейная теория плоской регулярной упругой системы, образованной из горизонтальных и вертикальных стержней и восходящих и нисходящих наклонных стержней, жестко связанных между собой в точках пересечения упругих линий стержней первых двух семейств. Особенность изучаемой системы в сочетании разных моделей деформирования стержней. По предположению все стержни работают на растяжение – сжатие, а горизонтальные стержни наделены еще способностью воспринимать и поперечные изгибные нагрузки.

При построении теории применен метод склейки. Путем анализа поведения изолированных элементов и геометрических условий их сопряжения установлено, что деформирование системы описывается узловыми смещениями и поворотами, полными деформациями и начальными внутренними силовыми факторами стержней. Все эти зависимые переменные оказались функциями целочисленных параметров, использованных для нумерации элементы системы, и связаны между собой геометрическими и физическими соотношениями теории. Остальные определяющие зависимости ее добыты из вариационных принципов Лагранжа и Кастильяно, базирующихся на дискретном аналоге вариационного исчисления, в котором, в отличии от его классической версии, функционалы формируются суммами и зависят от функций дискретных аргументов.

Из принципа Лагранжа выявлены статические уравнения и дана постановка дискретной краевой задачи в узловых смещениях и поворотах. Общее решение статических уравнений представлено с точностью до трёх функций целочисленных параметров, названных силовыми функциями. В построенной теории они играют ту же роль, что и функции напряжений в механике упругих тел. С помощью силовых функций из принципа Кастильяно выведены уравнения совместности полных деформаций стержней и дана постановка дискретной краевой задачи в начальных силовых факторах и в силовых функциях.

**Ключевые слова:** дискретно-континуальный линейный упругий анализ; метод склейки; принципы Лагранжа и Кастильяно; плоская стержневая система с разными моделями деформирования элементов

# LINEAR ELASTIC ANALYSIS OF A PLANE ORTHOGONAL ROD SYSTEM WITH DIFFERENT MODELS OF DEFORMATION OF ELEMENTS

Rybakov L.S.

*Moscow Aviation Institute* (*National Research University*), *Moscow, Russia*

## ABSTRACT

A linear theory of a plane regular elastic system formed of horizontal and vertical rods and ascending and descending inclined rods, rigidly connected to each other at the intersections of elastic lines of the rods of the first two families, is presented. The peculiarity of the system under study is the combination of different models of rod deformation. According to the assumption, all rods work for tension-compression, and horizontal rods are also endowed with the ability to perceive transverse bending loads.

When constructing the theory, the gluing method is applied. By analyzing the behavior of isolated elements and the geometric conditions of their coupling, it is shown that the deformation of the system is described by nodal displacements and rotations, complete deformations and the initial internal force factors of the rods. All these dependent variables turned out to be functions of integer parameters used for numbering the elements of the system, and are related to each other by geometric and physical relations of the theory. The rest of its defining dependencies are derived from the Lagrange and Castigliano variational principles, which are based on the discrete analog of the calculus of variations, in which, unlike its classical version, functionals are formed by sums and depend on functions of discrete arguments.

Static equations are identified from the Lagrange principle and the formulation of the discrete boundary value problem in nodal displacements and rotations is given. The general solution of static equations is presented up to three functions of integer parameters called force functions. In the constructed theory, they play the same role as the stress functions in the mechanics of elastic bodies. Using force functions, the compatibility equations for the complete deformations of the rods are derived from the Castigliano principle and the formulation of the discrete boundary value problem in the initial force factors and in the force functions is given.



**Keywords:** discrete-continuous linear elastic analysis; gluing method; Lagrange and Castigliano principles; plane rod system with different models of element deformation


## ВВЕДЕНИЕ

Среди методов линейного упругого анализа стержневых систем особое место занимают дискретно-континуальные методы. Опираясь на дискретно-континуальную природу упругих систем, они предоставляют широкие возможности для учета индивидуального поведения и взаимодействия элементов систем, в полной мере используя континуальный и дискретный математические аппараты.

Широкую известность среди них обрели классические методы строительной механики, к числу которых относятся метод сил, метод перемещений, смешанный метод и различные их модификации [1-19]. Эти методы носят алгоритмический характер и применимы к широкому кругу стержневых систем. С появлением современных вычислительных средств их развитие шло по пути применения матричного аппарата и поиска эффективных вычислительных процедур [20-24].

Из других методов дискретно-континуального анализа стержневых систем выделим метод склейки [25,26]. Суть его в членении системы на элементы и анализе их деформирования с учетом геометрических условий сопряжения с соседними элементами. В случае регулярных систем эта процедура приводит к нахождению функций целочисленных параметров, использованных для нумерации элементов системы, и завершается построением строгих дискретных теорий упругости, вид которых зависит от структуры систем и выбранных моделей поведения их элементов. Общим для таких теорий является состав определяющих соотношений, включающий геометрические и физические зависимости, статические уравнения и уравнения совместности деформаций в терминах обобщенных узловых смещений, полных деформаций и начальных внутренних силовых факторов стержней. В этих соотношениях и в допускаемых ими постановках дискретных краевых задач усматриваются дискретные аналоги соответствующих континуальных моделей упругих тел.

Ниже метод склейки используется для построения линейной теории плоской регулярной стержневой системы ортогональной структуры с различными моделями деформирования ее элементов.

Дискретные операции над функциями целочисленных аргументов делают формулы и уравнения трудно обозримыми из-за присутствия в них функций со смещенными текущими значениями целочисленных аргументов. Чтобы избежать это, введем специальные операторы, помещаемые перед функцией и содержащие полную информацию об операциях над ее аргументами.

Пусть $\psi\left[i_1,i_2\right]$ – функция дискретных целочисленных аргументов $i_1$, $i_2$ (кратко $\psi\left[i_\sigma\right]$ и $i_\sigma$; всюду греческие индексы принимают значения 1, 2). Введем линейные операторы сдвига ($\delta_{\alpha\sigma}$ – символ Кронекера)

$$\begin{gathered}\nabla^{\pm}_{\alpha}\psi=\psi\left[i_\sigma\pm\delta_{\alpha\sigma}\right],\quad \nabla^{\pm\pm}_{12}\psi=\psi\left[i_\sigma\pm 1\right],\quad \nabla^{\pm\mp}_{12}\psi=\psi\left[i_\sigma\mp\left(-1\right)^{\sigma}\right],\\ \nabla^{+}_{\alpha}\nabla^{-}_{\alpha}=\nabla^{-}_{\alpha}\nabla^{+}_{\alpha}=1,\quad \nabla^{\pm\pm}_{12}=\nabla^{\pm\pm}_{21}=\nabla^{\pm}_{1}\nabla^{\pm}_{2},\quad \nabla^{\pm\mp}_{12}=\nabla^{\mp\pm}_{21}=\nabla^{\pm}_{1}\nabla^{\mp}_{2},\end{gathered}\tag{1}$$

с помощью которых формируются частные разностные операторы первого порядка

$$\begin{aligned}&\Delta^{\pm}_{\alpha}\psi=\pm\psi\left[i_\sigma\pm\delta_{\alpha\sigma}\right]\mp\psi\left[i_\sigma\right], && \Delta^{\pm}_{\alpha}=\pm\nabla^{\pm}_{\alpha}\mp 1,\\ &\Delta^{\pm}_{12}\psi=\pm\psi\left[i_\sigma\pm 1\right]\mp\psi\left[i_\sigma\right], && \Delta^{\pm}_{12}=\pm\nabla^{\pm\pm}_{12}\mp 1,\\ &\Delta^{\pm}_{21}\psi=\pm\psi\left[i_\sigma\mp\left(-1\right)^{\sigma}\right]\mp\psi\left[i_\sigma\right], && \Delta^{\pm}_{21}=\pm\nabla^{\pm\mp}_{12}\mp 1\end{aligned}\tag{2}$$

и более высоких порядков. Например, для частных разностных операторов второго порядка, определяемых равенствами

$$\begin{aligned}&\Delta^{2}_{\alpha}\psi=\psi\left[i_\sigma+\delta_{\alpha\sigma}\right]-2\psi\left[i_\sigma\right]+\psi\left[i_\sigma-\delta_{\alpha\sigma}\right],\\ &\Delta^{2}_{12}\psi=\psi\left[i_\sigma+1\right]-2\psi\left[i_\sigma\right]+\psi\left[i_\sigma-1\right],\\ &\Delta^{2}_{21}\psi=\psi\left[i_\sigma-\left(-1\right)^{\sigma}\right]-2\psi\left[i_\sigma\right]+\psi\left[i_\sigma+\left(-1\right)^{\sigma}\right],\end{aligned}$$

справедливы выражения (см. (1), (2))

$$\begin{aligned}&\Delta^{2}_{\alpha}=\Delta^{+}_{\alpha}\Delta^{-}_{\alpha}=\Delta^{+}_{\alpha}-\Delta^{-}_{\alpha}=\nabla^{+}_{\alpha}-2+\nabla^{-}_{\alpha},\\ &\Delta^{2}_{12}=\Delta^{+}_{12}\Delta^{-}_{12}=\Delta^{+}_{12}-\Delta^{-}_{12}=\nabla^{++}_{12}-2+\nabla^{--}_{12},\\ &\Delta^{2}_{21}=\Delta^{+}_{21}\Delta^{-}_{21}=\Delta^{+}_{21}-\Delta^{-}_{21}=\nabla^{+-}_{21}-2+\nabla^{-+}_{21}.\end{aligned}$$

Введенные операторы позволяют сохранять текущие значения дискретных аргументов несмещенными, отказываясь ради краткости от явного начертания их в символах функций.

Ниже используются еще дискретные аналоги интегрирования по частям, называемые суммированием по частям. Чтобы пояснить их смысл, рассмотрим две функции $\varphi\left[i_\sigma\right]$ и $\psi\left[i_\sigma\right]$ дискретных аргументов $i_\sigma$, определенные при $i_\sigma\in\left[0,I_\sigma\right]$, где $I_\sigma>0$ – заданные целые числа, а $\left[0,I_\sigma\right]$ – замкнутый целочисленный отрезок, начинающийся с 0 и заканчивающийся $I_\sigma$. Будем считать, что $\varphi[i_\sigma]=\psi[i_\sigma]\equiv 0$ при $i_\sigma \notin [0, I_\sigma]$. Тогда операции суммирования по частям можно выразить формулами

$$\begin{gathered}
\sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma} \varphi \nabla_\alpha^{\pm} \psi = \sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma} \nabla_\alpha^{\mp} \varphi \cdot \psi, \quad \sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma} \varphi \nabla_{12}^{\pm\pm} \psi = \sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma} \nabla_{12}^{\mp\mp} \varphi \cdot \psi, \\
\sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma} \varphi \Delta_\alpha^{\pm} \psi = -\sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma} \Delta_\alpha^{\mp} \varphi \cdot \psi, \quad \sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma} \varphi \Delta_{\alpha,3-\alpha}^{\pm} \psi = -\sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma} \Delta_{\alpha,3-\alpha}^{\mp} \varphi \cdot \psi, \qquad (3) \\
\sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma} \varphi \Delta_\alpha^{2} \psi = \sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma} \Delta_\alpha^{2} \varphi \cdot \psi, \quad \sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma} \varphi \Delta_{\alpha,3-\alpha}^{2} \psi = \sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma} \Delta_{\alpha,3-\alpha}^{2} \varphi \cdot \psi.
\end{gathered}$$

Здесь и далее под суммой с индексом суммирования $i_\sigma$ понимается две суммы. Одна из них указывает на суммирование по индексу $i_1$ в пределах, отвечающих $\sigma=1$, а другая – по индексу $i_2$ в пределах, соответствующих $\sigma=2$. Кроме того, в формулах (3) предполагается, что слагаемые, содержащие значения функций за пределами области их определения, следует опустить, знак умножения в виде точки ограничивает справа область действия предшествующих разностных операторов, а запятая в сложном индексе играет роль разделителя.

## 1. ПОЭЛЕМЕНТНЫЙ УПРУГИЙ АНАЛИЗ

Рассмотрим плоскую свободную стержневую систему, представляющую собой периодическое повторение вдоль декартовых осей $x_\sigma$ элементарной ячейки из стержней в форме прямоугольника с двумя несвязанными между собой диагональными стержнями (рис.1). Назовём горизонтальные, вертикальные и нисходящие и восходящие диагональные стержни соответственно 11-, 22-, 21- и 12-стержнями (совокупно $\alpha\beta$-стержнями). Смежные стержни жестко связаны между собой в узлах системы – точках пересечения упругих линий $\alpha\alpha$-стержней.

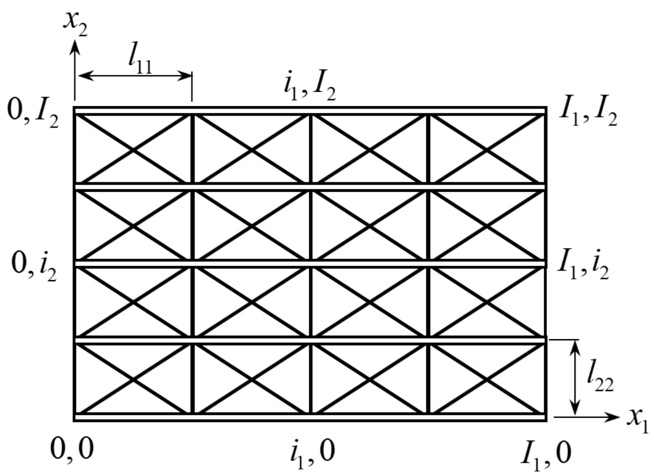


Рис.1.

По предположению все $\alpha\beta$-стержни упругие, однородные и работают на растяжение – сжатие, исключая горизонтальные стержни (на рис.1 они выделены двойными линиями), которые работают еще и на изгиб. Стержни, принадлежащие одному семейству, одинаковые и расположены с постоянным шагом.

Элементы изучаемой системы (узлы и стержни) нумеруются с помощью двух целочисленных параметров, выступающих для зависимых переменных величин в роли дискретных аргументов. Обозначим их символом $i_\sigma$ и будем считать, что они растут в направлении осей $x_\sigma$ соответственно. В номере $i_1, i_2$ элемента число $i_1$ обозначает его горизонтальный номер, а второе число $i_2$ вертикальный номер.

Условимся текущему узлу и исходящим из него текущим $\alpha\beta$-стержням присваивать один и тот же номер. Области изменения параметров $i_\sigma$ для элементов системы зависят от ее внешней формы. В случае системы с прямоугольной границей (рис.1), если принять, что для узлов $i_\sigma \in \left[0, I_\sigma\right]$, то для $\alpha\alpha$-, 12- и 21-стержней $i_\sigma \in \left[0, I_\sigma - \delta_{\alpha\sigma}\right]$, $i_\sigma \in \left[0, I_\sigma - 1\right]$ и $i_\sigma \in \left[\delta_{\sigma 2}, I_\sigma - \delta_{\sigma 1}\right]$ соответственно.

Геометрические и упругие свойства системы описываются длинами $l_{\alpha\alpha}$ $\alpha\alpha$-стержней (суммирование по повторяющимся индексам не предполагается), жесткостями $g_{\alpha\beta}$ на растяжение – сжатие $\alpha\beta$-стержней и жесткостью $g$ на изгиб 11-стержней. Регулярность системы предполагает неизменность этих параметров в пределах фиксированного семейства стержней.

В общем случае внешние воздействия на систему слагаются из узловых сил и моментов, погонных осевых сил $\alpha\beta$-стержней и поперечных сил 11-стержней.

Следуя методу склейки, расчленим изучаемую систему на узлы и стержни, приложим к изолированным элементам внешние воздействия на них, после чего проведем анализ их механического поведения с учетом геометрических условий сопряжения с соседними элементами.

Пусть $x \in \left[0, l_{\alpha\beta}\right]$ – локальная осевая координата $\alpha\beta$-стержня. Введем для произвольной точки упругой линии $\alpha\beta$-стержня следующие переменные: $u_{\alpha\beta}(x)$, $n_{\alpha\beta}(x)$ и $p_{\alpha\beta}(x)$ – осевые соответственно смещение, внутреннее усилие и заданная погонная осевая нагрузка. Для 11-стержней будем использовать еще обозначения $v(x), \theta(x), q(x), m(x)$ и $p(x)$ для прогиба, угла наклона упругой линии, перерезывающей силы, изгибающего момента и заданной поперечной нагрузки. Смещение узла и действующую на него внешнюю силу вдоль оси $x_\alpha$ обозначим символами $U_\alpha$ и $P_\alpha$, а для поворота узла и внешнего момента в нем введем символы $\Theta$ и $H$. Смысл введенных величин и принятые для них правила знаков поясняет рис.2, на котором показан фрагмент системы в окрестности текущего узла с отсеченной частью 11-стержня.

Названные зависимые переменные являются и функциями целочисленных параметров $i_\sigma$, так что следовало бы, например, писать $u_{\alpha\beta}(x; i_1, i_2)$, $U_\alpha\left[i_1, i_2\right]$ или кратко $u_{\alpha\beta}(x; i_\sigma)$, $U_\alpha\left[i_\sigma\right]$. По принятому выше соглашению эти аргументы можно явно не указывать. Этого же будем придерживаться и в отношении континуальной переменной $x$.

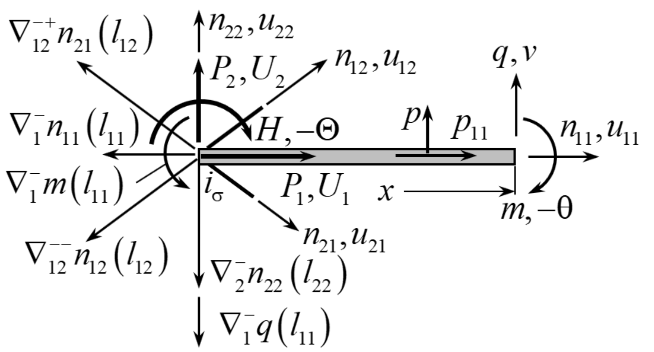


Рис.2.

Геометрические условия сопряжения стержней и узлов имеют вид

$$\begin{aligned} &u_{\alpha\alpha}(0) = U_\alpha, \quad v(0) = U_2, \quad \theta(0) = \Theta, \\ &u_{12}(0) = c_1 U_1 + c_2 U_2, \quad u_{21}(0) = c_1 U_1 - c_2 U_2, \quad c_\alpha = l_{\alpha\alpha} l_{12}^{-1}, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} &u_{\alpha\alpha}(l_{\alpha\alpha}) = \nabla_\alpha^+ U_\alpha, \quad v(l_{11}) = \nabla_1^+ U_2, \quad \theta(l_{11}) = \nabla_1^+ \Theta, \\ &u_{12}(l_{12}) = \nabla_{12}^{++}(c_1 U_1 + c_2 U_2), \quad u_{21}(l_{12}) = \nabla_{12}^{+-}(c_1 U_1 - c_2 U_2), \end{aligned} \tag{5}$$

а деформирование изолированных $\alpha\beta$- стержней описывают уравнения

$$\begin{aligned} &g_{\alpha\beta} u''_{\alpha\beta}(x) + p_{\alpha\beta}(x) = 0, \quad g v^{\mathrm{IV}}(x) = p(x), \quad \theta(x) = v'_{11}(x), \\ &n_{\alpha\beta}(x) = g_{\alpha\beta} u'_{\alpha\beta}(x), \quad m = -g v''(x), \quad q(x) = -g v'''(x), \end{aligned} \tag{6}$$

общее решение которых дается формулами

$$\begin{aligned} &u_{\alpha\beta}(x) = u_{\alpha\beta}(0) + g_{\alpha\beta}^{-1} N_{\alpha\beta} x + u_{\alpha\beta}^*(x), \quad n_{\alpha\beta}(x) = N_{\alpha\beta} + n_{\alpha\beta}^*(x), \\ &v(x) = v(0) + \theta(0)x - \tfrac{1}{6} g^{-1} x^2 (3M + Qx) + v_*(x), \quad N_{\alpha\beta} = n_{\alpha\beta}(0), \\ &\theta(x) = \theta(0) - \tfrac{1}{2} g^{-1} x (2M + Qx) + \theta_*(x), \quad M = m(0), \\ &m(x) = M + Qx + m_*(x), \quad q(x) = Q + q_*(x), \quad Q = q(0). \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь

$$u_{\alpha\beta}^*(x) = -g_{\alpha\beta}^{-1} \int_0^x (x-\tau) p_{\alpha\beta}(\tau) d\tau, \quad v_*(x) = \tfrac{1}{6} g^{-1} \int_0^x (x-\tau)^3 p(\tau) d\tau,$$

$$n_{\alpha\beta}^*(x) = g_{\alpha\beta}\left(u_{\alpha\beta}^*\right)', \quad \theta_*(x) = v'_*, \quad m_*(x) = -g v''_*, \quad q_*(x) = -g v'''_*.$$

Из условий (4), (5) и формул (7) вытекают соотношения

$$\begin{aligned} &N_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} U_{\alpha\beta} - N_{\alpha\beta}^*, \quad Q = 3\bar{g}(2V - K) + Q_*, \\ &\bar{M} = M l_{11}^{-1} = -\bar{g}(3V - K) + \bar{M}_* \end{aligned} \tag{8}$$

и обратные им зависимости

$$\begin{aligned} &U_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}^{-1} N_{\alpha\beta} + U_{\alpha\beta}^*, \quad V = -\tfrac{1}{3} \bar{g}^{-1}\left(3\bar{M} + Q\right) + V_*, \\ &K = -\bar{g}^{-1}\left(2\bar{M} + Q\right) + K_*. \end{aligned} \tag{9}$$

В них использованы обозначения

$$\begin{aligned} &U_{\alpha\beta}^* = l_{\alpha\beta}^{-1} u_{\alpha\beta}^*(l_{\alpha\beta}), \quad \Theta_* = \theta_*(l_{11}), \quad V_* = l_{11}^{-1} v_*(l_{11}), \\ &N_{\alpha\beta}^* = g_{\alpha\beta} U_{\alpha\beta}^*, \quad \bar{M}_* = M_* l_{11}^{-1} = \bar{g}(3V_* - \Theta_*), \quad \bar{M} = M l_{11}^{-1}, \\ &Q_* = -3\bar{g}(2V_* - \Theta_*), \quad \lambda = c_1 c_2^{-1}, \quad \bar{g} = 2 g l_{11}^{-2}, \quad \bar{U}_\alpha = U_\alpha l_{\alpha\alpha}^{-1} \end{aligned}$$

и выделены полные деформации стержней

$$U_{\alpha\alpha}=\Delta_\alpha^+\bar U_\alpha,\quad V=\lambda^{-1}\Delta_1^+\bar U_2-\Theta,\quad K=\Delta_1^+\Theta,$$
$$U_{\alpha,3-\alpha}=\Delta_{\alpha,3-\alpha}^+\left[c_{3-\alpha}^2\bar U_{3-\alpha}-(-1)^\alpha c_\alpha^2\bar U_\alpha\right]. \tag{10}$$

Итак, деформирование изучаемой системы описано с точностью до функций дискретных аргументов $i_\sigma$, каковыми являются узловые смещения $\bar U_\alpha$ и повороты $\Theta$, полные деформации стержней $U_{\alpha\beta}, V,\ K$ и начальные внутренние силовые факторы $N_{\alpha\beta},\ \bar M,\ Q$. Первые две группы переменных связаны между собой геометрическими зависимостями (10), а переменные второй и третьей групп вошли в физические соотношения (8), (9).

## 2. СТАТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

С целью вывода статических соотношений обратимся к вариационному принципу Лагранжа, согласно которому

$$\delta L=\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma-\delta_{\alpha\sigma}}\delta L_{\alpha\alpha}+\sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma-1}\delta L_{12}+\sum_{i_\sigma=\delta_{2\sigma}}^{I_\sigma-\delta_{1\sigma}}\delta L_{21}-\sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma}\sum_{\alpha=1}^{2}P_\alpha\delta U_\alpha+\sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma}H\delta\Theta=0. \tag{11}$$

Здесь $\delta L$ – первая вариация полной энергии системы, слагаемая из таких же вариаций $\delta L_{\alpha\beta}=\delta\Pi_{\alpha\beta}-\delta A_{\alpha\beta}$ $\alpha\beta$-стержней за вычетом вариации работы узловых внешних воздействий, а $\delta\Pi_{\alpha\beta}$ и $\delta A_{\alpha\beta}$ – первые вариации потенциальной энергии и работы внешних сил $\alpha\beta$-стержня, равные (см. (6))

$$\delta\Pi_{\alpha\beta}=\int_0^{l_{\alpha\beta}}\left(n_{\alpha\beta}\delta u'_{\alpha\beta}-\delta_{\alpha1}\delta_{\beta1}m\delta v''\right)dx,\quad \delta A_{\alpha\beta}=\int_0^{l_{\alpha\beta}}\left(p_{\alpha\beta}\delta u_{\alpha\beta}+\delta_{\alpha1}\delta_{\beta1}p\delta v\right)dx.$$

Прибегая в правой части предпоследнего выражения к интегрированию по частям и принимая во внимание формулы (4)-(7), (10), находим

$$\delta L_{\alpha\beta}=l_{\alpha\beta}N_{\alpha\beta}\delta U_{\alpha\beta}-\delta_{\alpha1}\delta_{\beta1}l_{11}\left[\left(\bar M+Q\right)\delta K-Q\delta V\right]+$$
$$+n_{\alpha\beta}^*\left(l_{\alpha\beta}\right)\delta u_{\alpha\beta}\left(l_{\alpha\beta}\right)-\delta_{\alpha1}\delta_{\beta1}\left[m_*\left(l_{11}\right)\delta\theta\left(l_{11}\right)-q_*\left(l_{11}\right)\delta v\left(l_{11}\right)\right].$$

Подставим сюда нужные зависимости (5), (10), а полученные выражения в равенство (11), после чего выполним суммирование по частям (3). В итоге придем к условию стационарности

$$\sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma}\left\{\sum_{\alpha=1}^{2}\left[\Delta_\alpha^-N_{\alpha\alpha}+c_\alpha\left[\Delta_{12}^-N_{12}-(-1)^\alpha\Delta_{21}^-N_{21}\right]+\delta_{\alpha2}\Delta_1^-Q+P_\alpha^*\right]\cdot\delta U_\alpha-\right.$$
$$\left.-l_{11}\left(\Delta_1^-\bar M-\nabla_1^-Q+\bar H_*\right)\cdot\delta\Theta\right\}=0,$$

из которого вытекают искомые статические соотношения

$$\Delta_\alpha^-N_{\alpha\alpha}+c_\alpha\left[\Delta_{12}^-N_{12}-(-1)^\alpha\Delta_{21}^-N_{21}\right]+\delta_{\alpha2}\Delta_1^-Q+P_\alpha^*=0,$$
$$\Delta_1^-\bar M-\nabla_1^-Q+\bar H_*=0. \tag{12}$$

Внешние силовые воздействия представлены здесь величинами

$$P_\alpha^*=P_\alpha-\delta_{\alpha2}\nabla_1^-q_*\left(l_{11}\right)-\nabla_\alpha^-n_{\alpha\alpha}^*\left(l_{\alpha\alpha}\right)-c_\alpha\left[\nabla_{12}^{--}n_{12}^*\left(l_{12}\right)-(-1)^\alpha\nabla_{12}^{-+}n_{21}^*\left(l_{12}\right)\right],$$
$$\bar H_*=\bar H-\nabla_1^-\bar m_*\left(l_{11}\right),\quad \bar H=l_{11}^{-1}H,\quad \bar m_*\left(l_{11}\right)=l_{11}^{-1}m_*\left(l_{11}\right).$$

Заметим, что соотношения (12) можно вывести путем анализа равновесия внутреннего изолированного узла системы (рис.2). Роль статических краевых условий играют уравнения равновесия свободных граничных узлов системы. Они получаются из равенств (12) путем отбрасывания членов, указывающих на несуществующие стержни.

В трёх уравнениях равновесия (12) содержится шесть неизвестных силовых факторов $N_{\alpha\beta}$, $\bar{M}$, $Q$, что говорит о статической неопределимости изучаемой упругой системы и возможности построения общего решения уравнений (12) с точностью до трёх функций дискретных аргументов $i_\sigma$. Здесь они будут играть ту же роль, что и функции напряжений в механике упругих тел. Назовем их силовыми функциями и представим общее решение уравнений (12) в виде сумм

$$N_{\alpha\beta} = N_{\alpha\beta}^0 + N_{\alpha\beta}^p, \quad \bar{M} = \bar{M}^0 + \bar{M}^p, \quad Q = Q^0 + Q^p \tag{13}$$

общего решения $N_{\alpha\beta}^0$, $\bar{M}^0$, $Q^0$ однородных $\left(P_\alpha^* = \bar{H}_* \equiv 0\right)$ уравнений (12) и какого-либо частного решения $N_{\alpha\beta}^p$, $\bar{M}^p$, $Q^p$ неоднородных $\left(P_\alpha^* \neq 0,\ \bar{H}_* \neq 0\right)$ уравнений (12). За последние можно принять внутренние силовые факторы в стержнях какой-либо основной системы метода сил. Однако, в конкретных случаях нагружения предпочтительнее эвристический подход, по которому за нетривиальные значения частного решения исходной системы принимаются усилия в любой ее подсистеме, способной нести заданную нагрузку.

Приступая к отысканию однородного решения, заметим, что первые два однородных уравнения (12) преобразуются с помощью соотношений (2) к виду

$$\begin{gathered}\Delta_1^-\left[N_{11}^0 + c_1\left(\nabla_2^- N_{12}^0 + \nabla_2^+ N_{21}^0\right)\right] + c_1\Delta_2^-\left(N_{12}^0 - \nabla_2^+ N_{21}^0\right) = 0,\\ \Delta_1^-\left[Q^0 + c_2\left(N_{12}^0 - \nabla_2^+ N_{21}^0\right)\right] + \Delta_2^-\left[N_{22}^0 + c_2\left(\nabla_1^- N_{12}^0 + \nabla_2^+ N_{21}^0\right)\right] = 0.\end{gathered} \tag{14}$$

Первое из них обратится в тождество, если положить

$$N_{11}^0 + c_1\left(\nabla_2^- N_{12}^0 + \nabla_2^+ N_{21}^0\right) = 2c_1\nabla_1^+\Delta_2^2\Phi, \quad N_{12}^0 - \nabla_2^+ N_{21}^0 = -2\Delta_1^+\Delta_2^+\Phi.$$

Здесь $\Phi\left[i_\sigma\right]$ – первая силовая функция. Вторую силовую функцию $\Psi\left[i_\sigma\right]$ введем зависимостью

$$N_{12}^0 + \nabla_2^+ N_{21}^0 = -2\Psi,$$

которая вместе с предыдущими равенствами позволяет получить формулы

$$\begin{gathered}N_{12}^0 = -\Psi - \Delta_1^+\Delta_2^+\Phi, \quad N_{21}^0 = -\nabla_2^-\Psi + \Delta_1^+\Delta_2^-\Phi,\\ N_{11}^0 = c_1\left[\left(1+\nabla_2^-\right)\Psi + \left(1+\nabla_1^+\right)\Delta_2^2\Phi\right]\end{gathered} \tag{15}$$

и придать второму уравнению (14) вид

$$\Delta_1^-\left[Q^0 - 2c_2\Delta_1^+\Delta_2^+\Phi\right] + \Delta_2^-\left\{N_{22}^0 - c_2\left[\left(1+\nabla_1^-\right)\Psi - \Delta_1^2\Delta_2^+\Phi\right]\right\} = 0.$$

Это равенство и третье однородное уравнение (12) обратятся в тождества, если ввести третью силовую функцию $\Omega\left[i_\sigma\right]$ выражениями

$$\begin{gathered}N_{22}^0 = c_2\left[\left(1+\nabla_1^-\right)\Psi + \left(1+\nabla_2^+\right)\Delta_1^2\Phi - \Delta_1^2\Omega\right],\\ Q^0 = c_2\Delta_1^+\Delta_2^-\Omega, \quad \bar{M}^0 = c_2\Delta_2^-\Omega.\end{gathered} \tag{16}$$

Таким образом, уравнения равновесия (12) имеют общее решение

$$
\begin{aligned}
&N_{\alpha\alpha} = c_\alpha\left[\left(1+\nabla^-_{3-\alpha}\right)\Psi + \left(1+\nabla^+_\alpha\right)\Delta^2_{3-\alpha}\Phi - \delta_{\alpha 2}\Delta^2_1\Omega\right] + N^p_{\alpha\alpha},\\
&N_{12} = -\Psi - \Delta^+_1\Delta^+_2\Phi + N^p_{12}, \quad N_{21} = -\nabla^-_2\Psi + \Delta^+_1\Delta^-_2\Phi + N^p_{21},\\
&Q = c_2\Delta^+_1\Delta^-_2\Omega + Q^p, \quad \bar{M} = c_2\Delta^-_2\Omega + \bar{M}^p.
\end{aligned} \tag{17}
$$

Вспоминая области определения начальных внутренних силовых факторов, устанавливаем, что в формулах (17) фигурируют значения силовых функций $\Psi, \Phi$ и $\Omega$, отвечающие соответственно $i_\sigma \in \left[-1, I_\sigma\right]$, $i_\sigma \in \left[-1, I_\sigma + 1\right]$ и $i_\sigma \in \left[-1, I_\sigma + \delta_{\sigma 1}\right]$.

Найдем граничные условия, которым должны удовлетворять силовые функции в случае свободной упругой системы. По определению частное решение обеспечивает выполнение неоднородных уравнений равновесия всех узлов. Поэтому источником искомых условий служат однородные уравнения равновесия граничных узлов. Чтобы получить их достаточно в однородных уравнениях (12), записанных для текущих граничных узлов, обнулить отсутствующие величины

$$
\begin{aligned}
&N^0_{11} = N^0_{12} = N^0_{21} = \bar{M}^0 = Q^0 = 0 \ \text{ при } \ i_1 = -1, I_1,\\
&N^0_{\alpha 2} = 0 \ \text{ при } \ i_2 = -1, I_2, \quad N^0_{21} = 0 \ \text{ при } \ i_2 = 0, I_2 + 1.
\end{aligned}
$$

Отсюда с помощью формул (15), (16) приходим к искомым условиям

$$
\begin{aligned}
&\Psi = 0 \quad \text{при} \quad i_\sigma = -1, I_\sigma,\\
&\Phi = 0 \quad \text{при} \quad i_\sigma = -1, 0, I_\sigma, I_\sigma + 1,\\
&\Omega = 0 \quad \text{при} \quad i_1 = -1, 0, I_1, I_1 + 1 \ \text{ и } \ i_2 = -1, I_2,
\end{aligned} \tag{18}
$$

показывающими, что в случае свободной системы функции $\Psi$, $\Phi$ и $\Omega$ имеют нетривиальные значения при $i_\sigma \in \left[0, I_\sigma - 1\right]$, $i_\sigma \in \left[1, I_\sigma - 1\right]$ и $i_\sigma \in \left[\delta_{1\sigma}, I_\sigma - 1\right]$. В тех же случаях, когда на систему наложены геометрические связи, краевые условия, накладываемые на силовые функции, устанавливаются с помощью принципа Кастильяно.

## 3. УРАВНЕНИЯ СОВМЕСТНОСТИ ПОЛНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

Статических искомых $N_{\alpha\beta}$, $\bar{M}_{11}, Q_{11}$ столько же, сколько $\alpha\beta$-стержней с утроенным числом 11-стержней, а именно, $6I_1I_2 + 3I_1 + I_2$. Число же независимых уравнений равновесия (12) свободной системы равно $3\left(I_1+1\right)\left(I_2+1\right)-3$, так что степень статической неопределимости изучаемой системы равна $3I_1I_2 - 2I_2$ и, как нетрудно видеть, она слагается из числа $\left(I_1-1\right)\left(I_2-1\right)$ внутренних узлов, числа $I_1I_2$ элементарных ячеек и числа $\left(I_1-1\right)\left(I_2+1\right)$ стыков 11-стержней. Найдем уравнения совместности деформаций с помощью принципа Кастильяно. Для этого достаточно рассмотреть свободную систему, для которой этот принцип переходит в начало наименьшей работы, постулирующим условие стационарности

$$
\delta\Pi = \sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma-\delta_{\alpha\sigma}}\delta\Pi_{\alpha\alpha} + \sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma-1}\delta\Pi_{12} + \sum_{i_\sigma=\delta_{2\sigma}}^{I_\sigma-\delta_{1\sigma}}\delta\Pi_{21} = 0. \tag{19}
$$

Здесь $\delta\Pi$ – первая вариация потенциальной энергии всей системы, а

$$\delta\Pi_{\alpha\beta} = \int\limits_0^{l_{\alpha\beta}} \left( u'_{\alpha\beta}\delta n_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha1}\delta_{\beta1} v''\delta m \right) dx = \\ = l_{\alpha\beta} U_{\alpha\beta} \delta N^0_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha1}\delta_{\beta1} l_{11} \left[ K\delta\overline{M}^{\,0} + \left( K - V \right) \delta Q^0 \right] \tag{20}$$

– первая вариация потенциальной энергии $\alpha\beta$- стержня, при вычислении которой были использованы выражения (7), (10) и учтено, что в силу представления (13)

$$\delta N_{\alpha\beta} = \delta N^0_{\alpha\beta}, \quad \delta Q = \delta Q^0, \quad \delta\overline{M} = \delta\overline{M}^{\,0}.$$

Вспоминая формулы (15), (16) посредством зависимости (20) находим

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma - \delta_{\alpha\sigma}} \delta\Pi_{\alpha\alpha} = l_{12} \sum_{\alpha=1}^{2} \sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma - \delta_{\alpha\sigma}} \Big\{ c_\alpha^2 U_{\alpha\alpha} \left[ \left( 1 + \nabla^-_{3-\alpha} \right) \delta\Psi + \left( 1 + \nabla^+_\alpha \right) \Delta^2_{3-\alpha} \delta\Phi \right] + \\ + c_2 \left[ \delta_{\alpha1} c_1 \left( V\Delta^+_1 - K\nabla^+_1 \right) \Delta^-_2 - \delta_{\alpha2} c_2 U_{22} \Delta^2_1 \right] \delta\Omega \Big\},$$

$$\sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma-1} \delta\Pi_{12} = -l_{12} \sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma-1} U_{12} \left( \delta\Psi + \Delta^+_1 \Delta^+_2 \delta\Phi \right),$$

$$\sum_{i_\sigma=\delta_{2\sigma}}^{I_\sigma-\delta_{1\sigma}} \delta\Pi_{21} = -l_{12} \sum_{i_\sigma=\delta_{2\sigma}}^{I_\sigma-1} U_{21} \left( \nabla^-_2 \delta\Psi - \Delta^+_1 \Delta^-_2 \delta\Phi \right).$$

Выполняя в этих выражениях суммирование по частям (см. (3)) с учетом условий (18), верных и для вариаций силовых функций, и подставляя найденные результаты в равенство (19), получим

$$\sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma-1} \left[ \sum_{\alpha=1}^{2} c_\alpha^2 \left( 1 + \nabla^+_{3-\alpha} \right) U_{\alpha\alpha} - U_{12} - \nabla^+_2 U_{21} \right] \cdot \delta\Psi + \\ + \sum_{i_\sigma=1}^{I_\sigma-1} \left[ \sum_{\alpha=1}^{2} c_\alpha^2 \left( 1 + \nabla^-_\alpha \right) \Delta^2_{3-\alpha} U_{\alpha\alpha} - \Delta^-_1 \Delta^-_2 \left( U_{12} - \nabla^+_2 U_{21} \right) \right] \cdot \delta\Phi + \\ + \sum_{i_\sigma=\delta_{1\sigma}}^{I_\sigma-1} c_2^2 \left[ \lambda\Delta^+_2 \left( \Delta^-_1 V + \nabla^-_1 K \right) - \Delta^2_1 U_{22} \right] \cdot \delta\Omega = 0. \tag{21}$$

Отсюда находим уравнения совместности полных деформаций стержней

$$\sum_{\alpha=1}^{2} c_\alpha^2 \left( 1 + \nabla^+_{3-\alpha} \right) U_{\alpha\alpha} = U_{12} + \nabla^+_2 U_{21} \quad \left( i_\sigma \in [0, I_\sigma - 1] \right). \\ \sum_{\alpha=1}^{2} c_\alpha^2 \left( 1 + \nabla^-_\alpha \right) \Delta^2_{3-\alpha} U_{\alpha\alpha} = \Delta^-_1 \Delta^-_2 \left( U_{12} - \nabla^+_2 U_{21} \right) \quad \left( i_\sigma \in [1, I_\sigma - 1] \right), \\ \lambda\Delta^+_2 \left( \Delta^-_1 V + \nabla^-_1 K \right) = \Delta^2_1 U_{22} \quad \left( i_\sigma \in [\delta_{1\sigma}, I_\sigma - 1] \right). \tag{22}$$

Как и следовало ожидать, подстановка в них соотношений (10) превращает их в тривиальное тождество $0 \equiv 0$.

Уравнения (22) представляют аналитическую запись трёх систем однородных линейных алгебраических уравнений относительно значений полных деформаций стержней $U_{\alpha\beta}, V, K$. Порядок $I_1 I_2$ первой из них совпадает с числом ячеек системы. Вторая система имеет порядок $\left( I_1 - 1 \right)\left( I_2 - 1 \right)$, совпадающий с числом внутренних узлов системы. Что касается третьей системы, то ее порядок равен $\left( I_1 - 1 \right) I_2$ и совпадает с количеством сочленений 11-стержней. Как и должно быть, совокупный порядок всех трёх систем не отличим от степени статической неопределимости свободной системы и числа нетривиальных значений силовых функций.

Предположим теперь, что на граничные узлы системы наложены идеальные связи. В этом случае исчезают условия (18), и повторные преобразования приводят к результату, отличающемуся от равенства (21) областями суммирования двойных сумм: суммирование по областям нетривиальных значений силовых функций заменяется суммированием по безусловным областями их определения.

Из измененного равенства (21) по-прежнему вытекают уравнения (22). Что же касается геометрических граничных условий, то они получаются приравниваем нулю сомножителей при не равных теперь нулю вариациях силовых функций, обозначенных в условиях (18). При этом, как было условлено, слагаемые, указывающие непосредственно или после раскрытия предшествующих разностных операторов на несуществующие стержни, следует положить равными нулю.

## 4. АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ

Примем сначала за основные, определяемые в первую очередь, неизвестные узловые смещения $\bar{U}_\alpha$ и повороты $\Theta$. Начальные внутренние силовые факторы выражаются через них формулами (см. (8), (10))

$$N_{\alpha\alpha} = g_{\alpha\alpha}\Delta_\alpha^+\bar{U}_\alpha - N_{\alpha\alpha}^*, \quad N_{12} = g_{12}\Delta_{12}^+\left(c_1^2\bar{U}_1 + c_2^2\bar{U}_2\right) - N_{12}^*,$$
$$N_{21} = g_{21}\Delta_{21}^+\left(c_1^2\bar{U}_1 - c_2^2\bar{U}_2\right) - N_{21}^*, \quad Q = 3\bar{g}\left[2\lambda^{-1}\Delta_1^+\bar{U}_2 - \left(\nabla_1^+ + 1\right)\Theta\right] + Q_*,$$
$$\bar{M} = -\bar{g}\left[3\lambda^{-1}\Delta_1^+\bar{U}_2 - \left(\nabla_1^+ + 2\right)\Theta\right] + \bar{M}_*.$$

Подставляя их в равенства (12), приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} &\mathrm{L}_1\bar{U}_1 + c_1c_2^2\mathrm{L}_-\bar{U}_2 + F_1 = 0,\\ &c_1^2c_2\mathrm{L}_-\bar{U}_1 + \mathrm{L}_2\bar{U}_2 - 3\bar{g}\left(\Delta_1^+ + \Delta_1^-\right)\Theta + F_2 = 0,\\ &-3\bar{g}\lambda^{-1}\left(\Delta_1^+ + \Delta_1^-\right)\bar{U}_2 + \bar{g}\left(\Delta_1^2 + 6\right)\Theta + F_3 = 0 \end{aligned} \tag{23}$$

в частных разностях с операторами

$$\begin{aligned} &L_\alpha = g_{\alpha\alpha}\Delta_\alpha^2 + c_\alpha^3 L_+ + \delta_{\alpha 2}6\bar{g}\lambda^{-1}\Delta_1^2,\\ &L_\pm = g_{12}\Delta_{12}^2 \pm g_{21}\Delta_{21}^2 \end{aligned} \tag{24}$$

и с обусловленными внешними воздействиями на систему свободными членами

$$\begin{aligned} &F_\alpha = P_\alpha^* + \delta_{\alpha 2}\Delta_1^- Q_* - \Delta_\alpha^- N_{\alpha\alpha}^* - c_\alpha\left[\Delta_{12}^- N_{12}^* - (-1)^\alpha \Delta_{21}^- N_{21}^*\right],\\ &F_3 = \bar{H}_* + \Delta_1^-\bar{M}_* - \nabla_1^- Q_*. \end{aligned} \tag{25}$$

Система (23) предназначена для отыскания обобщенных узловых смещений. Если на граничные узлы наложены геометрические связи, предписывающие узлам заданные обобщенные смещения $\bar{U}_\alpha^*$, $\Theta_*$, то соответствующие уравнения равновесия заменяются геометрическими краевыми условиями вида

$$U_\alpha = U_\alpha^*, \quad \Theta = \Theta_*.$$

Чтобы записать статические граничные условия в основных неизвестных, следует записать уравнения равновесия свободных граничных узлов во внутренних силовых факторах и опустить в них члены, указывающие на несуществующие стержни. После этого оставшиеся внутренние силовые факторы надлежит заменить их выражениями через узловые смещения и повороты. Однако, более предпочтительным может оказаться такой путь. Допустим, что система дискретно неоднородная в отношении упругих свойств $\left(g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}\left[i_\sigma\right],\ \bar{g} = \bar{g}\left[i_\sigma\right]\right)$. Тогда при выводе уравнений (23) вместо равенств (24) получим

$$\begin{aligned} \mathrm{L}_\alpha &= \Delta_\alpha^- g_{\alpha\alpha}\Delta_\alpha^+ + c_\alpha^3 \mathrm{L}_+ + \delta_{\alpha 2} 6\lambda^{-1}\Delta_1^- \bar{g}\Delta_1^+, \\ \mathrm{L}_\pm &= \Delta_{12}^- g_{12}\Delta_{12}^+ \pm \Delta_{21}^- g_{21}\Delta_{21}^+. \end{aligned} \qquad (26)$$

Теперь уравнения (23) можно применять для всех свободных узлов, если иметь в виду, что фактическое начертание формул (25), (26) получается после отбрасывания в них членов с жесткостями несуществующих стержней и возврата прежних значений жесткостям существующих стержней. Изложенная процедура позволяет записывать уравнения равновесия узлов в обобщенных перемещениях и для нерегулярных систем.

Примем теперь за основные неизвестные начальные внутренние силовые факторы $N_{\alpha\beta}$, $\bar{M}$, $Q$. Для их отыскания следует воспользоваться уравнениями равновесия (12) и равенствами

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\kappa_{\alpha\alpha}}{c_\alpha}\left(1+\nabla_{3-\alpha}^+\right) N_{\alpha\alpha} - \kappa_{12}N_{12} - \kappa_{21}\nabla_2^+ N_{21} = S_1^* \ \left(i_\sigma \in \left[0, I_\sigma - 1\right]\right), \\ &\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\kappa_{\alpha\alpha}}{c_\alpha}\left(1+\nabla_\alpha^-\right)\Delta_{3-\alpha}^2 N_{\alpha\alpha} - \Delta_1^-\Delta_2^-\left(\kappa_{12}N_{12} - \kappa_{21}\nabla_2^+ N_{21}\right) = S_2^* \\ &\left(i_\sigma \in \left[1, I_\sigma - 1\right]\right), \\ &\bar{\kappa}\Delta_2^+\left[3\left(1+\nabla_1^-\right)\bar{M} + \left(1+2\nabla_1^-\right)Q\right] + c_2^{-3}\kappa_{22}\Delta_1^2 N_{22} = S_3^* \ \left(i_\sigma \in \left[\delta_{1\sigma}, I_\sigma - 1\right]\right), \end{aligned} \qquad (27)$$

в которые переходят уравнения совместности деформаций (22) после подстановки в них соотношений (9) и введения обозначений

$$\begin{aligned} &S_1^* = U_{12}^* + \nabla_2^+ U_{21}^* - \sum_{\alpha=1}^{2} c_\alpha^2\left(1+\nabla_{3-\alpha}^+\right)U_{\alpha\alpha}^*, \quad \kappa_{12} = g_{12}^{-1}, \quad \kappa_{21} = g_{21}^{-1}, \\ &S_2^* = \Delta_1^-\Delta_2^-\left(U_{12}^* - \nabla_2^+ U_{21}^*\right) - \sum_{\alpha=1}^{2} c_\alpha^2\left(1+\nabla_\alpha^-\right)\Delta_{3-\alpha}^2 U_{\alpha\alpha}^*, \quad \kappa_{\alpha\alpha} = c_\alpha^3 g_{\alpha\alpha}^{-1}, \\ &S_3^* = \lambda\Delta_2^+\left(\Delta_1^- V_* + \nabla_1^- K_*\right) - \Delta_1^2 U_{22}^*, \quad \bar{\kappa} = \lambda\left(3\bar{g}\right)^{-1}. \end{aligned} \qquad (28)$$

Система уравнений (12), (27) отражает постановку задачи в начальных внутренних силовых факторах $N_{\alpha\beta}$, $\bar{M}$, $Q$ и предназначена для отыскания именно их. В случае свободной системы имеют место статические граничные условия, содержащиеся в уравнениях (12). При наложении на граничные узлы идеальных связей эти условия надлежит заменить геометрическими граничными условиями, добываемыми, как отмечалось, из равенства (21).

Постановка задачи в силовых функциях сводится к замене в равенствах (27) начальных внутренних силовых факторов выражениями (17). Преобразования приводят к системе трех разрешающих уравнений в частных разностях

$$\begin{aligned}
&\mathrm{R}_1\Psi+\mathrm{R}_+\Phi-\left(1+\nabla_1^+\right)\Delta_1^2\Omega=S_1 \quad \left(i_\sigma\in\left[0,I_\sigma-1\right]\right),\\
&\mathrm{R}_-\Psi+\mathrm{R}_2\Phi-\left(1+\nabla_2^-\right)\Delta_1^4\Omega=S_2 \quad \left(i_\sigma\in\left[1,I_\sigma-1\right]\right),\\
&-\left(1+\nabla_1^-\right)\Delta_1^2\Psi-\left(1+\nabla_2^+\right)\Delta_1^4\Phi+\mathrm{R}_3\Omega=S_3 \quad \left(i_\sigma\in\left[\delta_{1\sigma},I_\sigma-1\right]\right).
\end{aligned} \tag{29}$$

Здесь введены разностные операторы

$$\begin{aligned}
&\mathrm{R}_1=\overline{\kappa}_{11}\left(\Delta_2^2+4\right)+\Delta_1^2+4+\overline{\kappa}_+,\\
&\mathrm{R}_\pm=\left(1+\nabla_1^\pm\right)\left(1+\nabla_2^\pm\right)\left(\overline{\kappa}_{11}\Delta_2^2+\Delta_1^2\right)+\overline{\kappa}_-\Delta_1^\pm\Delta_2^\pm,\\
&\mathrm{R}_2=\overline{\kappa}_{11}\left(\Delta_1^2+4\right)\Delta_2^4+\left(\Delta_2^2+4\right)\Delta_1^4+\overline{\kappa}_+\Delta_1^2\Delta_2^2,\\
&\mathrm{R}_3=\Delta_1^4-g_{22}\overline{\kappa}\left(\Delta_1^2+6\right)\Delta_2^2,
\end{aligned}$$

где

$$\overline{\kappa}_{\alpha\beta}=\kappa_{\alpha\beta}\kappa_{22}^{-1},\quad \overline{\kappa}_\pm=\overline{\kappa}_{12}\pm\overline{\kappa}_{21},\quad \Delta_\alpha^4=\Delta_\alpha^2\Delta_\alpha^2,$$

и обозначения

$$\begin{aligned}
&S_1=\kappa_{22}^{-1}S_1^*+\overline{\kappa}_{12}N_{12}^p+\overline{\kappa}_{21}\nabla_2^+N_{21}^p-\sum_{\alpha=1}^{2}c_\alpha^{-1}\overline{\kappa}_{\alpha\alpha}\left(1+\nabla_{3-\alpha}^+\right)N_{\alpha\alpha}^p,\\
&S_2=\kappa_{22}^{-1}S_2^*+\Delta_1^-\Delta_2^-\left(\overline{\kappa}_{12}N_{12}^p-\overline{\kappa}_{21}\nabla_2^+N_{21}^p\right)-\sum_{\alpha=1}^{2}c_\alpha^{-1}\overline{\kappa}_{\alpha\alpha}\left(1+\nabla_\alpha^-\right)\Delta_{3-\alpha}^2N_{\alpha\alpha}^p,\\
&S_3=c_2^{-1}\left\{g_{22}\overline{\kappa}\Delta_2^+\left[3\left(1+\nabla_1^-\right)\bar{M}^p+\left(1+2\nabla_1^-\right)Q^p\right]-\Delta_1^2N_{22}^p-g_{22}S_3^*\right\}.
\end{aligned} \tag{30}$$

Система (29) предназначена для отыскания силовых функций $\Psi$, $\Phi$ и $\Omega$. Она имеет шестой совокупный порядок по каждому дискретному аргументу. Следовательно, на каждой границе системы следует ставить три условия. В случае свободной системы ими являются условия (18). Если же на граничные узлы наложены идеальные связи, то потребные краевые условия извлекаются из только что упомянутых геометрических граничных условий в начальных внутренних силовых факторах путем подстановки в них выражений (17).

Функция $\Psi$ и первое уравнение (29) соотносятся с элементарными ячейками системы, $\Phi$ и второе уравнение (29) с ее внутренними узлами, а $\Omega$ и третье уравнение (29) со стыками 11-стержней. В свободной системе не будет внутренних узлов, если $I_1=1$, или $I_2=1$, или же $I_1=I_2=1$. Последний ситуация реализуется в системе с единственной ячейкой, являющейся частным проявлением двух предыдущих случаев.

При $I_2=1$ функция $\Phi\equiv 0$ и исключается из рассмотрения вместе со вторым уравнением системы (29). Силовые функции $\Psi$ и $\Omega$ становятся функциями одного дискретного аргумента $i_1$ и находятся из системы двух обыкновенных разностных уравнений, в которую превращаются оставшиеся уравнения (29).

Совсем просто выглядит случай $I_1=1$. Ему отвечает система без внутренних узлов и стыков 11-стержней (рис.3). По этой причине выпадают из рассмотрения второе и третье уравнения системы (29), а $\Phi=\Omega\equiv 0$. Единственная нетривиальная силовая функция $\Psi$, зависящая только от $i_2$, является решением обыкновенной разностной краевой задачи

$$
\begin{gathered}
\left(\nabla^{+}+2\eta+\nabla^{-}\right)\Psi[j]=\overline{\kappa}_{11}^{-1}S_1[0,j]\quad \left(j\in[0,J-1]\right),\\
\Psi[-1]=\Psi[J]=0
\end{gathered}
\tag{31}
$$

вытекающей из первого уравнения (29) и условий (18). Здесь введен параметр

$$\eta=1+\left(\kappa_{22}+0,5\kappa_{+}\right)\kappa_{11}^{-1}.$$

а символы $i_2$, $I_2$ и $\nabla_2^{\pm}$ заменены ради краткости на $j$, $J$ и $\nabla^{\pm}$ соответственно.

Точное решение краевой задачи (31) имеет вид [25]

$$\Psi[j]=\Psi_*[j]-\Psi_*[J]\frac{\pi_j}{\pi_J},\quad \Psi_*[j]=\kappa_{11}^{-1}\sum_{n=0}^{j-1}\pi_{j-n-1}S_1[0,n] \tag{32}$$

и представлено с помощью полинома Чебышёва 2-го рода степени $j$

$$\pi_j=\frac{\mu^{j+1}-\mu^{-j-1}}{\mu-\mu^{-1}},\quad \mu^{\pm 1}=-\eta\pm\sqrt{\eta^2-1}.$$

Подчеркнем, что это решение справедливо при любом целом $J>0$ и любых самоуравновешенных внешних силах, вошедших в переменную $S_1[0,j]$ (см. (30)) через величину $S_1^*[0,j]$ (см. (28)) и частное решение уравнений равновесия узлов. Согласно формулам (17)

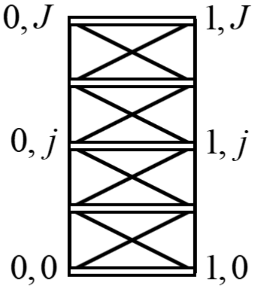

Рис.3.

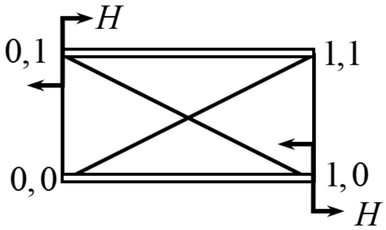

Рис.4.

$$
\begin{aligned}
&N_{11}[0,j]=c_1\left(1+\nabla^{-}\right)\Psi[j]+N_{11}^{p}[0,j],\\
&N_{22}[s,j]=c_2\Psi[j]+N_{22}^{p}[s,j]\quad (s=0,1),\\
&N_{12}[0,j]=-\Psi[j]+N_{12}^{p}[0,j],\\
&N_{21}[0,j]=-\nabla^{-}\Psi[j]+N_{21}^{p}[0,j],\\
&Q[j]=Q^{p}[j],\quad \overline{M}[j]=\overline{M}^{p}[j].
\end{aligned}
$$

При $J=1$ рассматриваемая система превращается в одну ячейку (рис.4) и согласно решению (32) силовая функция принимает единственное нетривиальное значение $\Psi[0]=-S_1[0,0]/\left(2\eta\kappa_{11}\right)$, которое, кстати, вытекает и из самой краевой задачи (31). В частном случае нагружения, показанном в виде примера на рис.4, $p_{\alpha\beta}=p=0$, и поэтому $U_{\alpha\beta}^{*}=S_1^{*}=0$. За частное решение уравнений равновесия узлов можно принять выражения

$$
\begin{aligned}
&N_{11}^{p}[0,s]=N_{12}^{p}[0,0]=N_{21}^{p}[0,1]=0,\quad \overline{M}^{p}[0,s]=-\delta_{1s}\overline{H},\\
&Q^{p}[0,s]=N_{22}^{p}[s,0]=-(-1)^{s}\,\overline{H},\quad (s=0,1),
\end{aligned}
$$

которым отвечают $S_1\left[0,0\right]=\Psi\left[0\right]=0$. Таким образом, решение рассматриваемой частной задачи дается последними формулами, что подтверждает и метод сил.

Приведенные решения носят иллюстративный характер и не исчерпывают возможности, которыми располагает представленная теория в части построения точных аналитических и численных решений других задач.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Блейх Ф., Мелан Е. *Уравнения в конечных разностях статики сооружений.* – Харьков: Гос. науч.-техн. изд-во Украины, 1936. – 383 с.
2. Рабинович И.М. *Основы строительной механики стержневых систем.* – М.: Госстройиздат, 1960. – 519 с.
3. Розин Л.А. *Вариационная постановка задач для упругих систем.* – Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. – 223 с.
4. Филин А.П. *Прикладная механика твердого деформируемого тела: сопротивление материалов с элементами теории сплошных сред и строительной механики. Том II.* – М.: Наука, 1978. – 616 с.
5. Ржаницын А.Р. *Строительная механика.* – М.: Высшая школа, 1982. – 400 с.
6. Шулькин Ю.П. *Теория упругих стержневых конструкций.* – М.: Наука, 1984. – 272 с.
7. Renton J.D. *The Beam-Like Behavior of Space Trusses* // AIAA Journal. – 1984. – Vol.22. – No.2. – Pp.273-280.
8. Розин Л.А. *Теоремы и методы статики деформируемых систем.* – Л.: Изд-во ЛГУ, 1986. – 276 с.
9. Ржаницын А.Р. *Составные стержни и пластины.* – М.: Стройиздат, 1986. – 316 с.
10. Усюкин В.И. *Строительная механика конструкций космической техники.* – М.: Машиностроение, 1988. – 392 с.
11. Биргер И.А. *Стержни, пластины и оболочки.* – М.: Физматлит, 1992. – 392 с.
12. Леонтьев Н.Н., Соболев Д.Н., Амосов А.А. *Основы строительной механики стержневых систем.* – М.: АСВ, 1996. – 541 с.
13. Елисеев В.В. *Механика упругих тел.* – СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1999. – 341 с.
14. Hutchinson R.G., Fleck N.A. *The structural performance of the periodic truss* // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2006. – Vol.54. – Iss.4. – Pp.756-782.
15. Галишникова В.В., Игнатьев В.А. *Регулярные стержневые системы. Теория и методы расчета.* – Волгоград: ВолгГАСУ, 2006. – 552 с.
16. Светлицкий В.А. *Строительная механика машин. Механика стержней: в 2 т. Т. 1. Статика.* – М.: Физматлит, 2009. – 383 с.
17. Sun H., Wang Y., Zhao W. *Comparison of theories for stability of truss structures. Part 1: Computation of critical load* // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2009. – Vol.14. – Iss.4. – Pp.1700-1710. http://dx.doi.org/10.1016/j.cnsns. 2008.03.00.
18. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. *Строительная механика.* – СПб.: Изд-во «Лань», 2010. – 656 с.
19. Tran H.C., Lee J. *Force methods for trusses with elastic boundary conditions* // International Journal of Mechanical Sciences. – 2013. – Vol.66. – Pp.202-213.
20. *Современные методы расчета сложных статически неопределимых систем: Сб. статей* / Пер. с англ. под ред. Филина А.П. – Л.: Судпромгиз, 1961. – 876 с.

21. Аргирис Дж. *Современные достижения в методах расчета конструкций с применением матриц.* – М.: Стройиздат, 1968. – 241 с.
22. Martin H.C. *Introduction to Matrix Methods of Structural Analysis.* – New York: McGraw-Hill Book Co., 1966. – 331 p.
23. Meek J.L. *Matrix structural analyses.* – New York et al.: McGraw-Hill Book Co., 1971. – 628 p.
24. Ливсли Р. *Матричные методы строительной механики.* – М.: Стройиздат, 1980. – 224 с.
25. Рыбаков Л.С. *Термоупругость плоской регулярной фермы ортогональной структуры* // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2017. – №2. – С.136-152.
26. Рыбаков Л.С. *Принципы Лагранжа и Кастильяно в теории плоской регулярной фермы ортогональной структуры* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т.24. – №1. – С.93-110.

## REFERENCES

1. Bleich F., Melan E. *Die gewöhnlichen und partiellen Differ enzengleichungen der Baustatik.* Berlin, Springer, 1927, 350 p.
2. Rabinovich I.M. *Osnovy stroitel'noj mekhaniki sterzhnevykh sistem. [Fundamentals of structural mechanics of rod systems].* Moskva, Gosstrojizdat, 1960, 519 p.
3. Rozin L.A. *Variatsionnaya postanovka zadach dlya uprugikh sistem [Variational formulation of elastic system problems].* Leningrad, Izdatel'stvo LGU, 1978, 223 p.
4. Filin A.P. *Prikladnaya mekhanika tverdogo deformiruemogo tela: soprotivlenie materialov s ehlementami teorii sploshnykh sred i stroitel'noj mekhaniki. Tom II [Applied mechanics of solid: strength of materials with elements of theory of continuum and structural mechanics. Volume II].* Moskva, Nauka, 1978, 616 p.
5. Rzhanicyn A.R. *Stroitel'naya mekhanika [Structural mechanics].* Moskva, Vysshaya shkola, 1982, 400 p.
6. Shul'kin Ju.P. *Teoriya uprugikh sterzhnevykh konstruktsij [Theory of elastic rod structures].* Moskva, Nauka, 1984, 272 p.
7. Renton J.D. *The Beam-Like Behavior of Space Trusses.* AIAA Journal, 1984, Vol.22, No.2, Pp.273-280. DOI: 10.2514/3.8379.
8. Rozin L.A. *Teoremy i metody statiki deformiruemykh sistem [Theorems and methods of the statics of deformable systems].* Leningrad, Izdatel'stvo LGU, 1986, 276 p.
9. Rzhanicyn A.R. *Sostavnye sterzhni i plastiny [Composite rods and plates].* Moskva, Strojizdat, 1986, 316 p.
10. Usjukin V.I. *Stroitel'naya mekhanika konstruktsij kosmicheskoj tekhniki [Structural mechanics of space constructions].* Moskva, Mashinostroenie, 1988, 392 p.
11. Birger I.A. *Sterzhni, plastiny i obolochki [Rods, plates and shells].* Moskva, Fizmatlit, 1992, 392 p.
12. Leont'ev N.N., Sobolev D.N., Amosov A.A. *Osnovy stroitel'noj mekhaniki sterzhnevykh sistem [Fundamentals of the structural mechanics of rod systems].* Moskva, ACB, 1996, 541 p.
13. Eliseev V.V. *Mekhanika uprugikh tel [Mechanics of elastic bodies].* Sankt-Peterburg, Izd-vo SPbGTU, 1999, 341 p.
14. Hutchinson R.G., Fleck N.A. *The structural performance of the periodic truss.* Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2006, Vol.54, Iss.4, Pp.756-782.

15. Galishnikova V.V., Ignat’ev V.A. *Regulyarnye sterzhnevye sistemy. Teoriya i metody rascheta [Regular rod systems. Theory and methods of calculation]*. Volgograd, Volgogradskij gosudarstvennyj arkhitekturno-stroitel'nyj universitet, 2006, 552 p.
16. Svetlickij V.A. *Stroitel’naya mekhanika mashin. Mekhanika sterzhnej: v 2 tomakh. Tom 1. Statika [Structural mechanics of machines. Mechanics of rods: in 2 volumes, Vol.1. Statics]*. Moskva, Fizmatlit, 2009, 383 p.
17. Sun H., Wang Y., Zhao W. *Comparison of theories for stability of truss structures. Part 1: Computation of critical load.* Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2009, Vol.14, Iss.4, Pp.1700-1710.
18. Darkov A.V., Shaposhnikov N.N. *Stroitel’naya mekhanika [Structural mechanics]*. Sankt-Peterburg, Izdatel’stvo “Lan’”, 2010, 656 p.
19. Tran H.C., Lee J. *Force methods for trusses with elastic boundary conditions.* International Journal of Mechanical Sciences, 2013, Vol.66, Pp.202-213.
20. *Sovremennye metody rascheta slozhnykh staticheski neopredelimykh sistem: Sbornik statej [Recent methods of calculation of complex redundant systems: Collection of articles]*. / Transl. from engl. ed. by Filin A.P. Leningrad, Sudpromgiz, 1961, 876 p.
21. Argyris J.H. *Recent advances in matrix methods of structural analysis.* Oxford-London-New York-Paris, Pergamon Press, 1964.
22. Martin H.C. *Introduction to Matrix Methods of Structural Analysis.* New York, McGraw-Hill Book Co., 1966, 331 p.
23. Meek J.L. *Matrix structural analyses.* New York et al., McGraw-Hill Book Co., 1971, 628 p.
24. Livesley R.K. *Matrix methods of structural analysis.* Oxford-New York-Toronto Sydney-Braunschweig, Pergamon Press, 1975, 277 p.
25. Rybakov L.S. *Termouprugost’ ploskoj regulyarnoj fermy ortogonal’noj struktury [Thermoelasticity of a plane regular truss with orthogonal structure]*. Vestnik PNIPU. Mekhanika, 2017, No.2, Pp.136-152.
26. Rybakov L.S. *Printsipy Lagranzha i Kastil’yano v teorii ploskoj regulyarnoj fermy ortogonal’noj struktury [Variational principles of Lagrange and Castigliano in theory of a plane regular truss with orthogonal structure]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2018, Vol.24, No.1, Pp.93-110.


*Поступила в редакцию 22 мая 2020 года.*

Сведения об авторе:

Рыбаков Леонид Сергеевич – д.ф.-м.н., проф., Кафедра «Проектирование и прочность авиационно-ракетных и космических изделий», ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия; e-mail: rybakov.38@mail.ru