

НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ РЕАГИРУЮЩИХ ВЯЗКОУПРУГИХ ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИЦИЙ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

Баранов А.В.

*ФГАОУ ВО Российский государственный университет нефти и газа
(национальный исследовательский университет) им. И.М. Губкина,
г. Москва, Россия*

АННОТАЦИЯ

Представлена математическая модель неизоотермического течения неньтоновской жидкости в плоском канале. Многие допущения были сделаны на основании того, что течение осуществляется при низких значениях критерия Рейнольдса и высоком значении критерия Пекле. Это позволяет пренебречь в уравнении движения инерционными членами и в уравнении энергии осевой теплопроводностью. В качестве реологической модели используется модель Фан-Тьен-Таннера. Учитываются тепловые граничные условия первого рода и диссипация энергии. Течение сопровождается протеканием химической реакции, приводящей к резкому росту вязкости. Вязкость считается зависящей от температуры и степени превращения. Это, в свою очередь, привело к включению в математическую модель кинетического уравнения химической реакции. Считается, что химическая реакция проходит в одну стадию и может быть описана с помощью одного параметра – степени превращения. При достижении некоторой критической степени превращения вязкость устремляется в бесконечность и композиция теряет текучесть. Температура среды на входе в канал и температура стенок канала не совпадают. Это означает, что композиция по мере течения в канале будет прогреваться как от горячих стенок канала, так и за счет диссипации энергии. Тепловыделения химической реакции не учитываются. Решение проводилось численным методом конечных разностей по итерационной схеме. Приведены результаты расчетов. Показано значительное влияние различных факторов на профили скорости, а также на распределение давления и среднемассовой температуры вдоль канала. Из приведенных расчетов видно, что зависимость вязкости от температуры и степени превращения может значительно менять всю гидродинамическую и тепловую ситуацию в канале. Так, при расчете среднемассовой температуры игнорирование диссипации энергии и зависимости вязкости от степени превращения приводит к значительной ошибке, возрастающей при этом по мере увеличения приведенной длины.

Ключевые слова: математическое моделирование; вязкоупругая жидкость; неизоотермическое течение; полимерная композиция

NON-ISOTHERMAL FLOW OF REACTING VISCOELASTIC POLYMER COMPOUNDS IN A FLAT CHANNEL

Baranov A.V.

*Gubkin Russian State Oil and Gas University (National Research University),
Moscow, Russia*

ABSTRACT

Mathematical model of non-isothermal flow of non-Newtonian fluid in a flat channel is presented. Many assumptions were made on the basis of the fact that the flow occurs at low values of the Reynolds number and at a high Peclet number. This allows us to neglect inertia terms in the equation of motion and ignore axial thermal conductivity in the energy equation. Phan-Thien-Tanner model is used as a rheological model. Thermal boundary conditions of the first kind and the energy dissipation are taken into account. The flow is accompanied by a chemical reaction that leads to a sharp increase in viscosity. The viscosity is considered to depend on the temperature and the degree of conversion. This, in turn, led to the inclusion of the kinetic equation of a chemical reaction in the mathematical model. It is believed that a chemical reaction takes place in one stage and can be described using a single parameter – the degree of conversion. When a certain critical degree of conversion is reached, the viscosity rushes to infinity and the compound loses its fluidity. The fluid temperature at the inlet of the channel and the temperature of the walls of the channel are different. This means that the composition in the channel will be heated both because of hot channel walls and due to energy dissipation. The heat output at a chemical reaction is not taken into account. The solution was analyzed numerically by the finite difference method according to the iterative scheme. Results of calculations have been presented. The significant influence of various factors on the velocity profiles, as well as on the distribution of pressure and mass-average temperature along the channel is shown. From the made calculations, it can be seen that the dependence of viscosity on temperature and the degree of conversion can significantly change the entire hydrodynamic and thermal situation in the channel. Thus, when calculating the mass-average temperature, ignoring the energy dissipation and the dependence of the viscosity on the degree of conversion leads to a significant error, which is growing as the dimensionless length increases.

Keywords: mathematical modeling; viscoelastic fluid; non-isothermal flow; polymer composition

Исследованию процессов реодинамики и теплообмена при течении неньютоновских сред в различных каналах посвящены многочисленные публикации, частичный обзор которых приведен [1]. Полимерные композиции являются неньютоновскими средами, течение которых сопровождается ярко выраженными высокоэластичными эффектами. Заметную роль начинает играть первая разность нормальных напряжений, что требует введения в математическую модель реологического уравнения вязкоупругой среды. В последние годы в мировой литературе считается, что наилучшие результаты при описании течений нелинейных вязкоупругих сред дают реологические модели релаксационного (скоростного) типа. В зарубежной литературе их часто называют дифференциальными. Среди наиболее часто используемых уравнений из этого ряда можно выделить модели Гизекуса [2-4] и Фан-Тьен-Таннера (ФТТ) [5-9]. В данной работе используется модель ФТТ, упрощенная форма которой может быть записана в следующем виде [7]

$$f(\text{tr}(\tau))\tau + \bar{\lambda} \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \tau - \tau \cdot (\nabla \vec{V})^T - \nabla \vec{V} \cdot \tau \right) = \mu \left(\nabla \vec{V} + (\nabla \vec{V})^T \right), \quad (1)$$

где τ – экстра тензор напряжений, $f(\text{tr}(\tau))$ – функция первого инварианта (так называемого следа) экстра тензора напряжений, $\bar{\lambda}$ – время релаксации, \vec{V} – вектор скорости, μ – вязкость.

Функция $f(tr\tau)$ может быть записана как в экспоненциальном, так и в линейном виде [7]. В данной работе для упрощения выкладок примем линейную форму зависимости

$$f(tr\tau) = 1 + \frac{\varepsilon \bar{\lambda}}{\mu} tr\tau, \quad (2)$$

где ε – реологическая константа, обратно пропорциональная продольной вязкости. Так, для некоторых марок резиновых смесей на основе различных каучуков экспериментально определено, что $\varepsilon = 1$ и $\bar{\lambda} \approx 0,05$ с [9].

В данной работе рассматривается течение высоковязкой полимерной композиции в плоском канале (рис.1). Температура среды T_0 и температура стенок канала T_w не совпадают. При этом считается, что T_w больше, чем T_0 . Это означает, что композиция по мере течения в канале будет прогреваться как от горячих стенок канала, так и за счет диссипации энергии.

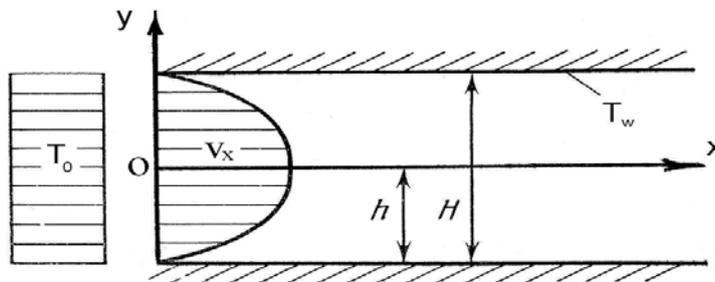


Рис.1. Схема течения в канале.

Рассматриваемые полимерные композиции обладают высокой вязкостью, поэтому их течение осуществляется при низких значениях критерия Рейнольдса. Это позволяет, во-первых, не рассматривать гидродинамический начальный участок и на входе в канал профиль скорости считать развитым. Во-вторых, можно пренебречь инерционными членами в уравнении движения. Принимается также, что поперечные (вторичные) потоки в канале отсутствуют, т.е. можно ограничиться только одной продольной компонентой скорости v_x . В этом случае реологические уравнения записываются в виде следующей системы [7]

$$f(\tau_{xx})\tau_{xx} = 2\bar{\lambda}\tau_{xy}\frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad (3)$$

$$f(\tau_{xx})\tau_{xy} = \mu\frac{\partial v_x}{\partial y}. \quad (4)$$

Уравнения (3) и (4) записаны в предположении $\tau_{yy} = 0$. Если поделить (3) на (4), то получим

$$\tau_{xx} = \frac{2\bar{\lambda}}{\mu}\tau_{xy}^2. \quad (5)$$

Таким образом, система реологических уравнений, записанных в безразмерном виде, запишется следующим образом

$$\sigma_{xx} = \frac{2Wi}{\bar{\mu}}\sigma_{xy}^2, \quad (6)$$

$$f(\sigma_{xx})\sigma_{xy} = \bar{\mu} \frac{\partial V_x}{\partial Y}, \quad (7)$$

где

$$f(\sigma_{xx}) = 1 + \frac{\varepsilon Wi}{\bar{\mu}} \sigma_{xx}, \quad (8)$$

$$Y = y/h, \quad V_x = v_x/\bar{v}_x, \quad \bar{\mu} = \mu/\mu_w, \quad \sigma_{xy} = \frac{\tau_{xy} h}{\mu_w \bar{v}_x}, \quad Wi = \frac{\bar{\lambda} \bar{v}_x}{h},$$

Wi – число Вайсенберга, \bar{v}_x – средняя скорость потока, μ_w – вязкость при температуре стенки T_w , h – полуввысота канала, τ_{xy} – напряжение сдвига, v_x – продольная компонента скорости потока, $Y, V_x, \bar{\mu}$ – безразмерные поперечная координата, осевая скорость и вязкость соответственно.

Реологические уравнения (6) и (7) дополняются уравнением движения в безразмерном виде

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial Y} = \frac{dP}{dX}. \quad (9)$$

Для неизотермического случая решение гидродинамической задачи проводится одновременно с нахождением поля температуры. Высоковязкие полимерные композиции обладают низкой теплопроводностью. В результате течение таких сред осуществляется, как правило, при высоких значениях критерия Пекле ($Pe > 100$). Это позволяет пренебречь в уравнении энергии осевой теплопроводностью по сравнению с конвективным теплопереносом. Уравнение энергии с учетом диссипации энергии имеет вид

$$V_x \frac{\partial \theta}{\partial X} = \frac{1}{Pe} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} + \frac{Br}{Pe} \sigma_{xy} \frac{\partial V_x}{\partial Y}. \quad (10)$$

Используется также уравнение постоянства расхода

$$\int_0^1 V_x dY = 1, \quad (11)$$

где $P = \frac{ph}{\mu_w \bar{v}_x}$, $X = x/h$, $\theta = \frac{T - T_w}{T_0 - T_w}$, $Pe = \frac{\bar{v}_x h}{a}$, $Br = \frac{\mu_w \bar{v}_x^2}{\lambda(T_0 - T_w)}$, Pe – число

Пекле, Br – число Бринкмана, p – давление, T_w – температура стенок канала, T_0 – температура среды на входе в канал, λ – коэффициент теплопроводности, a – коэффициент температуропроводности.

Систему (6)-(11) необходимо дополнить также граничными условиями, которые в данной постановке задачи будут выглядеть следующим образом

$$Y = 0 \quad \frac{\partial V_x}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0, \quad (12)$$

$$Y = 1 \quad V_x = 0, \quad \theta = 1, \quad (13)$$

$$X = 0 \quad \theta = 0. \quad (14)$$

Принимается во внимание, что в процессе течения может происходить химическая реакция, которая может сильно влиять на реологические свойства композиции. Учет зависимости вязкости от степени превращения может кардинально изменить всю гидродинамическую и тепловую ситуацию в канале.

Поэтому поставленная задача решается для случая, когда вязкость полимера зависит от температуры и степени превращения

$$\bar{\mu} = \exp \left[\psi \theta + \frac{b_2 \beta}{\beta_* - \beta} \right], \quad (15)$$

где $\psi = b_1 (T_0 - T_w)$, b_1 , b_2 – эмпирические константы, β – безразмерная степень химического превращения, β_* – степень превращения, при которой композиция теряет текучесть.

В [10] приведен краткий обзор работ, посвященных изучению зависимости вязкости от температуры и степени превращения. В том числе указывается на широкое применение эмпирической зависимости $\bar{\mu} = \exp(b_1(T - T_w))$. Автор данной работы для различных литьевых марок резиновых смесей экспериментально установил, что $b_1 \approx 1$. В [10] также приведены работы, посвященные изучению функции $\mu = f(\beta)$ с указанием возможных численных значений константы b_2 . В данной работе для демонстрационных целей выбрано значение $b_2 = 1$, хотя на практике оно может быть заметно больше.

Из (15) видно, что вязкость полимерной композиции монотонно возрастает и стремится к бесконечности при $\beta \rightarrow \beta_*$. Таким образом, не существует четкой границы раздела между твердой и текучей фазами.

Учет зависимости (15) требует введения в математическую модель кинетического уравнения химической реакции. Считается, что химическая реакция проходит в одну стадию и может быть описана с помощью одного параметра – степени превращения

$$V_x \frac{\partial \beta}{\partial X} = Da(1 - \beta)^r \exp \left(-\frac{\bar{U}}{\theta + \gamma} \right), \quad (16)$$

где $Da = \frac{k_0 h}{v_x}$ – критерий Дамкеллера; k_0 – константа скорости химической

реакции; r – порядок химической реакции; $\bar{U} = \frac{U}{R(T_0 - T_w)}$; U – энергия

активации химической реакции; R – универсальная газовая постоянная;

$$\gamma = \frac{T_w}{(T_0 - T_w)}.$$

Уравнение (16) во многих случаях отражает реальную картину процесса и позволяет отказаться от сложных многопараметрических систем кинетических уравнений. Так экспериментально установлено [11], что многие реакции отверждения реактопластов или вулканизации резиновых смесей проходят в одну стадию. При этом большинство марок резиновых смесей имеют порядок реакции r от 1,0 до 1,6. Уравнение (16) также описывает реакцию отверждения фенолоформальдегидных смол с порядком реакции, равным 1,42. А в реакциях образования полиуретанов как правило $r = 2$ [12]. Также в различных работах уравнение (16) применялось для описания кинетики отверждения эпоксидных смол.

После первого интегрирования уравнения движения (9) с учетом граничного условия (12) получим

$$\sigma_{xy} = \frac{dP}{dX} Y. \quad (17)$$

Подставив (6) и (17) в (8), имеем

$$f(\sigma_{xx}) = 1 + \frac{2\varepsilon Wi^2}{\bar{\mu}^2} \left(\frac{dP}{dX} \right)^2 Y^2. \quad (18)$$

Тогда подстановка (18) в (7) дает следующее

$$\bar{\mu} \frac{\partial V_x}{\partial Y} = \frac{dP}{dX} Y + \frac{2\varepsilon Wi^2}{\bar{\mu}^2} \left(\frac{dP}{dX} \right)^3 Y^3. \quad (19)$$

После повторного интегрирования с учетом граничного условия (13) получим выражение для профиля скорости

$$V_x = \frac{dP}{dX} \int_1^Y \frac{Y}{\bar{\mu}} dY + 2\varepsilon Wi^2 \left(\frac{dP}{dX} \right)^3 \int_1^Y \frac{Y^3}{\bar{\mu}^3} dY. \quad (20)$$

Неизвестный градиент давления можно найти, используя условие постоянства расхода (11)

$$\frac{dP}{dX} \int_0^1 F_1(X, Y) dY + 2\varepsilon Wi^2 \left(\frac{dP}{dX} \right)^3 \int_0^1 F_2(X, Y) dY = 1, \quad (21)$$

где $F_1(X, Y) = \int_1^Y \frac{Y}{\bar{\mu}} dY$, $F_2(X, Y) = \int_1^Y \frac{Y^3}{\bar{\mu}^3} dY$.

В частности, для изотермического случая при постоянной вязкости $\bar{\mu} = 1$ профиль скорости находится следующим образом

$$V_x = \left(\frac{dP}{dX} \right) \frac{Y^2 - 1}{2} + \varepsilon Wi^2 \left(\frac{dP}{dX} \right)^3 \frac{Y^4 - 1}{2}. \quad (22)$$

При этом изотермический градиент давления определяется из решения кубического уравнения

$$\frac{1}{3} \left(\frac{dP}{dX} \right) + \frac{2}{5} \varepsilon Wi^2 \left(\frac{dP}{dX} \right)^3 + 1 = 0. \quad (23)$$

Среднемассовая температура в размерном и безразмерном виде определяется следующим образом

$$T_m = \frac{\int_0^h T v_x dy}{\int_0^h v_x dy}; \quad \theta_m = \frac{\int_0^1 \theta V_x dY}{\int_0^1 V_x dY}. \quad (24)$$

Число Нуссельта, характеризующее локальную теплоотдачу на стенке канала, в размерном и безразмерном виде определяется таким образом

$$Nu = \frac{\alpha h}{\lambda} = \frac{h}{|T_m - T_w|} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=h}, \quad Nu = \frac{1}{\theta_m} \left(\frac{\partial \theta}{\partial Y} \right)_{Y=1}, \quad (25)$$

где α – коэффициент теплоотдачи на стенке канала, T_m – среднемассовая температура среды в данном сечении канала.

Решение задачи проводилось численно методом конечных разностей по итерационной схеме. В качестве нулевого приближения использовался изотермический случай, основанный на (22) и (23). После этого найденные таким образом значения скорости подставлялись в уравнение энергии (10) для расчета

температуры. Далее, полученные распределения температуры и скорости использовались в уравнении (16) при нахождении степени превращения. И наконец, после этого приступали к вычислению распределения вязкости на основе (15). После нахождения функции $\bar{\mu}(\theta, \beta)$ переходили к следующему шагу итерации на основе (20) и (21).

Расчеты проводились с использованием физических свойств, характерных для многих литьевых марок резиновых смесей. Предполагалось, что тепловые и гидродинамические условия соответствуют течению полимеров в каналах перерабатывающего оборудования при различных процессах формования. В частности, вследствие этого и получались конкретные числовые значения для критериев Пекле, Бринкмана и Вайсенберга.

На рис.2 показано распределение безразмерного давления по безразмерной длине канала $\bar{X} = \frac{x}{l}$ (где l – длина канала) при различных значениях числа Пекле.

Изменение реологических свойств приводит к появлению нелинейного профиля давления. При течении химически инертной жидкости в условиях нагревания от горячих стенок канала профиль давления будет вогнутый. В рассматриваемом случае течения реагирующей жидкости профиль выпуклый, так как на некотором расстоянии от входа в канал вязкость жидкости начинает заметно возрастать вследствие протекания химической реакции. В результате это ведет к росту напряжений сдвига и градиента давления по мере продвижения к выходу из канала.

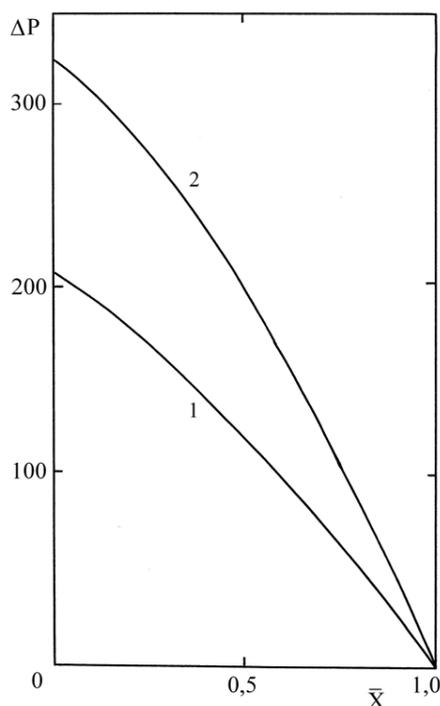


Рис.2. Распределение безразмерного давления по безразмерной длине канала. $Br = -3$, $\varepsilon Wi^2 = 0,001$. 1 – $Pe = 2 \cdot 10^4$; 2 – $Pe = 3 \cdot 10^4$.

На рис.3 показана трансформация профиля скорости по безразмерной длине канала. В пристеночных слоях композиции происходит наиболее быстрый разогрев материала от горячих стенок канала и вследствие диссипации, поэтому

именно здесь быстрее растет степень превращения β , и, как результат, усиливается рост вязкости. Сильная зависимость вязкости от степени превращения приводит к торможению пристеночных слоев, что приводит к ускорению течения в осевой зоне. Профиль скорости становится вытянутым и с перегибами.

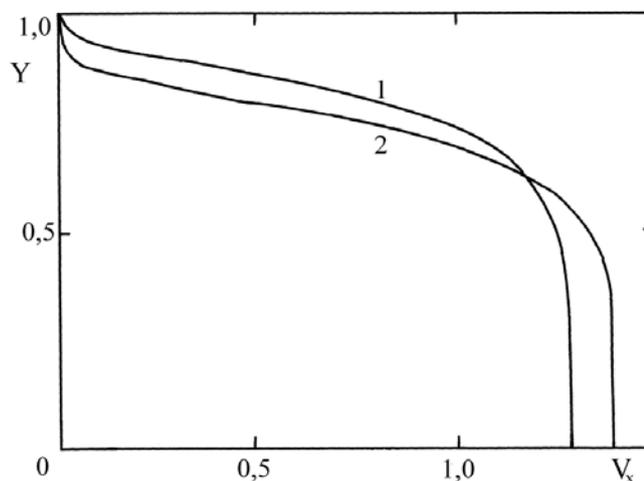


Рис.3. Трансформация профиля скорости по длине канала. $Pe = 10^3$, $Br = -3$, $\varepsilon Wi^2 = 0,001$. 1 – $\bar{X} = 0,5$; 2 – $\bar{X} = 0,9$.

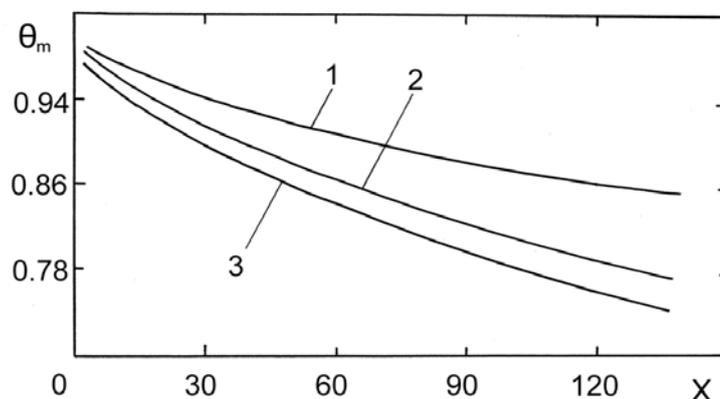


Рис.4. Влияние различных параметров на среднемассовую температуру в канале. $Pe = 10^3$, $\varepsilon Wi^2 = 0,001$. 1 – $Br = 0$, $\psi = 1$, $b_2 = 0$; 2 – $Br = -3$, $\psi = 1$, $b_2 = 1$; 3 – $Br = -3$, $\psi = 0$, $b_2 = 1$.

На рис. 4 показано влияние зависимости вязкости от температуры и степени превращения, а также диссипации энергии на распределение среднемассовой температуры по длине канала. Видно, что игнорирование диссипации и зависимости вязкости от степени превращения приводит к значительной ошибке, возрастающей при этом по мере увеличения приведенной длины.

ВЫВОДЫ

Поставлена и решена задача о теплообмене при диссипативном течении вязкоупругой жидкости Фан-Тьен-Таннера в плоском канале при условии протекания химической реакции. Математическая модель учитывает зависимость

вязкости от температуры и степени превращения. Из приведенных результатов видно, что зависимость вязкости от температуры и степени превращения может значительно менять всю гидродинамическую и тепловую ситуацию в канале. Результаты расчетов показали значительное влияние чисел Пекле, Бринкмана и переменной вязкости на трансформацию профилей скорости и давления, а также распределение среднemasсовой температуры по длине канала. При этом отмечено, что игнорирование диссипации и зависимости вязкости от степени превращения приводит к значительной ошибке, возрастающей по мере увеличения приведенной длины. Также очевидно, что при учете температурной зависимости вязкости вклад диссипативного разогрева будет меньше, и это может привести к некоторому снижению скорости химической реакции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баранов А.В. *Неизотермическое течение реологически сложных сред в условиях химических превращений* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2010. – Т.16. – №3. – С.384-399.
2. Mahdavi Khatibi A., Mirzazadeh M., Rashidi F. *Forced convection heat transfer of Giesekus viscoelastic fluid in pipes and channels* // Heat Mass Transfer. – 2010. – Vol.46. – Pp.405-412.
3. Hadi Mokarizadeh, Maedeh Asgharian, Ahmadreza Raisi. *Heat transfer in Couette-Poiseuille flow between parallel plates of the Giesekus viscoelastic fluid* // J. Non-Newton. Fluid Mech. – 2013. – Vol.196. – Pp.95-101.
4. Mohseni Mehdi M., Tissot Gilles, Badawi M. *Forced convection heat transfer of Giesekus fluid with wall slip above the critical shear stress in pipes* // Int. J. Heat and Fluid Flow. – 2018. – Vol.71. – Pp.442-450.
5. Chinyoka T. *Poiseuille flow of reactive Phan-Thien-Tanner liquids in 1D channel flow* // Trans. ASME. J. Heat Transfer. – 2010. – Vol.132. – No.11. – Pp.111701/1-111701/7.
6. Yarpici K., Karasozen B., Uludag Yu. *Numerical analysis of viscoelastic fluids in steady pressure-driven channel flow* // Trans. ASME. J. Fluids Eng. – 2012. – Vol.134. – No.5. – Pp.051206/1-051206/9.
7. Ferras Luis L., Nobrega Joao M., Pinho Fernando T. *Analytical solutions for channels flows of Phan-Thien-Tanner and Giesekus fluids slip* // J. Non-Newton. Fluid Mech. – 2012. – Vol.171-172. – Pp.97-105.
8. Ананьев Д.В., Кайнова А.А. *Теплоперенос и гидродинамика при ламинарном течении вязкоупругой жидкости Фан-Тъен-Таннера в конвергентном канале* // Изв. РАН. Энергетика. – 2014. – №5. – С.51-64.
9. Вачагина Е.К., Кайдыров А.И., Кайнова А.А., Халитова Г.Р. *Течение вязкоупругой жидкости в призматическом канале квадратного поперечного сечения на примере резиновых смесей* // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2016. – №1. – С.9-17.
10. Баранов А.В., Анисимова Н.А. *Реологические особенности полимерных композиций в процессах переработки* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2008. – Т.14. – №2. – С.188-206.
11. Леонов А.И., Басов Н.И., Казанков Ю.В. *Основы переработки реактопластов и резин методом литья под давлением*. – М.: Химия, 1977. – 216 с.
12. Малкин А.Я., Куличихин С.Г. *Реология в процессах образования и превращения полимеров*. – М.: Химия, 1985. – 240 с.

REFERENCES

1. Baranov A.V. *Neizotermicheskoe techenie reologicheskikh slozhnykh sred v usloviyakh khimicheskikh prevrashhenij [Nonisothermal flow of rheologically complex media under conditions of chemical conversions]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2010, Vol.16, No.3, Pp.384-399.
2. Mahdavi Khatibi A., Mirzazadeh M., Rashidi F. *Forced convection heat transfer of Giesekus viscoelastic fluid in pipes and channels*. Heat Mass Transfer, 2010, Vol.46, Pp.405-412.
3. Hadi Mokarizadeh, Maedeh Asgharian, Ahmadreza Raisi. *Heat transfer in Couette-Poiseuille flow between parallel plates of the Giesekus viscoelastic fluid*. J. Non-Newton. Fluid Mech., 2013, Vol.196, Pp.95-101.
4. Mohseni Mehdi M., Tissot Gilles, Badawi M. *Forced convection heat transfer of Giesekus fluid with wall slip above the critical shear stress in pipes*. Int. J. Heat and Fluid Flow, 2018, Vol.71, Pp.442-450.
5. Chinyoka T. *Poiseuille flow of reactive Phan-Thien-Tanner liquids in 1D channel flow*. Trans. ASME. J. Heat Transfer, 2010, Vol.132, No.11, Pp.111701/1-111701/7.
6. Yapici K., Karasozen B., Uludag Yu. *Numerical analysis of viscoelastic fluids in steady pressure-driven channel flow*. Trans. ASME. J. Fluids Eng., 2012, Vol.134, No.5, Pp.051206/1-051206/9.
7. Ferras Luis L., Nobrega Joao M., Pinho Fernando T. *Analytical solutions for channels flows of Phan-Thien-Tanner and Giesekus fluids slip*. J. Non-Newton. Fluid Mech., 2012, Vol.171-172, Pp.97-105.
8. Ananov D.V., Kainova A.A. *Teploperenos i gidrodinamika pri laminarnom techenii vyazkouprugoj zhidkosti Fan-T'en-Tannera v konvergentnom kanale // [Heat transfer and hydrodynamics during laminar flow of elastomeric Phan-Thien-Tanner liquid in convergent channel]*. Izvestiya RAN. Energetika, 2014, No.5, Pp.51-64.
9. Vachagina E.K., Kaidirov A.I., Kainova A.A., Khalitova G.R. *Techenie vyazkouprugoj zhidkosti v prizmaticheskom kanale kvadratnogo poperechnogo secheniya na primere rezinovykh smesey [Flow of viscoelastic fluid in a prismatic square cross-section channel on the example of rubber mixtures]*. Izvestiya RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza, 2016, No.1, Pp.9-17.
10. Baranov A.V., Anisimova N.A. *Reologicheskie osobennosti polimernykh kompozitsij v protsessakh pererabotki [Rheological features of polymer compositions in processing processes]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2008, Vol.14, No.2, Pp.188-206.
11. Leonov A.I., Basov N.I., Kazankov Yu.V. *Osnovy pererabotki reaktoplastov i rezin metodom lit'ya pod davleniem [Fundamentals of processing of resins and rubbers by injection molding]*. Moskva, Khimiya, 1977, 216 p.
12. Malkin A.Ya., Kulichikhin S.G. *Reologiya v protsessakh obrazovaniya i prevrashheniya polimerov [Rheology in the formation and conversion of polymers]*. Moskva, Khimiya, 1985, 240 p.

Поступила в редакцию 16 мая 2020 года.

Сведения об авторе:

Баранов Александр Викторович – д.ф.-м.н., проф., Кафедра Высшей математики, ФГАОУ ВО Российский государственный университет нефти и газа (национальный исследовательский университет) им. И.М. Губкина, г. Москва, Россия; e-mail: alexvbaranov@yahoo.co.uk