УДК 539.3
DOI 10.33113/MKMK.RAS.2020.26.02.200_211.04

ИЗГИБ БАЛКИ, ВЫПОЛНЕННОЙ ИЗ МАТЕРИАЛА С НЕИЗМЕНЯЕМЫМ ОБЪЕМОМ

Фирсанов Вик.В.

ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Материалы, не изменяющие свой первоначальный объем при действии силовой нагрузки, называют несжимаемыми. Это, как правило, низкомодульные резиноподобные материалы, особенностью которых является бесконечно большой объемный модуль, характеризующий сопротивление среды изменению объема материала. Поэтому из двух независимых физических характеристик (модулей) для несжимаемых материалов остаётся лишь один модуль, характеризующий сопротивление среды изменению формы. Коэффициент Пуассона, равный 0,5 в определяющих соотношениях задачи отсутствует. Произведение бесконечно большого модуля на деформацию изменения объема, равную нулю, представляет собой неопределенность, которая заменяется некоторой силовой функцией, являющейся дополнительной неизвестной. Термин «низкомодульный материал» не противоречит свойству бесконечно большого сопротивления изменению объема, так как в определяющих соотношениях механики несжимаемых сред объемный модуль отсутствует. Во всех этих соотношениях фигурирует модуль сдвига, который намного меньше аналогичных модулей широко распространенных конструкционных материалов.

Дополнительное соотношение, представляющее собой отсутствие изменения объема, ставит под сомнение некоторые классические гипотезы, такие как гипотезы Кирхгофа в теории пластин и гипотезы Бернулли в теории изгиба балок. Гипотеза о ненадавливаемости волокон в поперечном направлении большого значения для построения определяющих соотношений не имеет, а две других гипотезы об отсутствии линейной деформации в поперечном направлении и сдвиговой в плоскости xy, могут привести к неприемлемому решению. Здесь и далее x продольная координата, совпадающая с нейтральной линией балки, а y поперечная к нейтральной линии координата. Начало координат для симметричных нагрузки и граничных условий на торцах располагается в средине нейтральной линии, а в случае отсутствия симметрии на одном из торцов балки.

Задача изгиба несжимаемой балки строится в перемещениях, хотя для такой балки термин «в перемещениях» условен, поскольку физические соотношения несжимаемого материала, известные в научной литературе как «неогуковские» соотношения содержат силовую функцию, которая не может быть выражена через деформацию или перемещение. Для определения дополнительного неизвестного в определяющие соотношения задачи добавляется условие несжимаемости.

Ключевые слова: деформации; перемещения; напряжения; гипотезы; модели; уравнения; нагрузка; граничные условия; несжимаемость; упругость

BENDING BEAMS MADE OF A MATERIAL WITH AN UNCHANGEABLE VOLUME

Firsanov Vic.V.

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

ABSTRACT

Materials that do not change their initial volume under the action of a force load are called incompressible. These are usually low-modulus rubber-like materials, the feature of which is an infinitely large volume module that characterizes the resistance of the medium to changes in the volume of the material. Therefore, of the two undependable physical characteristics (modules) for incompressible materials, only one module remains, which characterizes the resistance of the medium to shape change. There is no Poisson's ratio equal to 0.5 in the defining relations of the problem. The product of an infinitely large modulus on the deformation of the volume change, equal to zero, is an uncertainty that is replaced by some force function, which is an additional unknown. The term “low-modulus material” does not contradict the property of infinitely large resistance to volume change, since there is no volume module in the defining relations of the mechanics of incompressible media. In all these relationships, the shear modulus appears, which is much smaller than similar modules of widely used construction materials.

The additional ratio, which is the absence of volume change, calls into question some classical hypotheses, such as the Kirchhoff hypotheses in plate theory and the Bernoulli hypotheses in beam bending theory. The hypothesis of non-compressibility of fibers in the transverse direction is not of great importance for the construction of determining relations, and the other two hypotheses about the absence of linear deformation in the transverse direction and shear in the xy, plane may lead to an unacceptable solution. Here and further x is the longitudinal coordinate that coincides with the neutral line of the beam, and y is the transverse coordinate to the neutral line. The origin of coordinates for symmetrical loads and boundary conditions at the ends is located in the middle of the neutral line, and if there is no symmetry at one of the ends of the beam.

The problem of bending an incompressible beam is constructed in displacements, although for such a beam the term “in displacements” is conditional, since the physical relations of the incompressible material, known in the scientific literature as “neo-hook” relations, contain a force function that cannot be expressed in terms of deformation or displacement. To define an additional unknown, an incompressibility condition is added to the defining relations of the problem.

Keywords: deformations; displacements; stresses; hypotheses; models; equations; load; boundary conditions; incompressibility; elasticity

В настоящее время опубликовано достаточно много работ, посвящённых уточнению классических теорий изгиба балок и пластин, гипотезы которых, по сути, идентичны. Одной из первых была работа известного ученого Тимошенко С.П., который в своих работах отказался от гипотезы отсутствия сдвига в поперечных к основанию пластинки плоскостях, и привел решение с постоянным по толщине пластинки сдвигом и постоянными касательными напряжениями, которые в силу парности действуют на основаниях пластинки, что приводит к искажению исходной задачи [1]. Но влияние, действующей на основаниях касательной нагрузки на прогиб, видимо, не является значительным, поэтому эту модель, называемою моделью Тимошенко, используют для уточнения классической теории.

Дальнейшие уточнения связаны с аппроксимацией перемещений по толщине с использованием полиномиальных функций различного порядка, от которых зависит точность результатов. Эти уточнения проводились для тонких пластин и балок достаточной длины, выполненных из традиционных конструкционных материалов [2-4]. В работах [5-7] исследуются специфические свойства эластичных и резиноподобных материалов. Для балок и пластин из несжимаемых материалов уточняющие расчётные модели практически отсутствуют.

Здесь для упрощения рассматриваются симметричные относительно середины балки условия, а нагрузка постоянна по длине балки. Предложены две модели, позволяющие с той или иной степенью точности оценить искомые функции перемещений и, в особенности, функцию прогиба. Считается, что внешняя силовая нагрузка не вызывает больших перемещений, а напряжения зависят линейно от деформаций.

Покажем сначала, что гипотезы Бернулли противоречивы по отношению к условию несжимаемости.

Примем $\frac{\partial v}{\partial y}=0$, тогда $v=v(x)$, $\gamma_{xy}=0$, отсюда $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ и $u=-v'(x)y$.

Подставим это в условие несжимаемости $\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}=0$, получим $u=\varphi(y)$, следовательно, $v'=\text{const}$, и прогиб является линейной функцией от x, чего быть не может. Здесь и далее u – продольное перемещение, v – поперечное перемещение или прогиб.

Рассмотрим две модели расчета балки, представленные в порядке усложнения.

Модель №1.

Зададим продольное упругое перемещение в балке в виде линейной функции по координате y

$$u=u_0(x)y. \tag{1}$$

Из условия несжимаемости $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$ определим прогиб, после подстановки в него (1) получим

$$v=v_0(x)-u_0'(x)\frac{y^2}{2}, \tag{2}$$

где $v_0(x)$ – произвольная функция интегрирования или прогиб нейтральной линии балки.

Используя (1) и (2), определим деформации

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}=u_0'y, \qquad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}=-u_0'y,$$

$$\gamma_{xy}=u_0+v_0'-u_0''\frac{y^2}{2}$$

и напряжения

$$\begin{aligned}
&\sigma_x = 2G\varepsilon_x + \lambda\theta = 2G\varepsilon_x + S(x,y) = 2Gu_0'y + S,\\
&\sigma_y = 2G\varepsilon_y + \lambda\theta = 2G\varepsilon_y + S(x,y) = -2Gu_0'y + S,\\
&\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = G\left(u_0 + v_0' - u_0''\frac{y^2}{2}\right),
\end{aligned} \tag{3}$$

где $S(x,y)$ – неизвестная силовая функция, заменяющая неопределенность $\lambda\theta$.

Запишем уравнение равновесия плоской задачи в отсутствие объемной нагрузки

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} = 0$$

в перемещениях используя (3)

$$\begin{aligned}
&Gu_0''y + \frac{\partial S}{\partial x} = 0,\\
&-G\left(u_0' - v_0'' + u_0'''\frac{y^2}{2}\right) + \frac{\partial S}{\partial y} = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Интегрируя по координате y второе уравнение этой системы, определим функцию S

$$S = G\left[\left(u_0' - v_0''\right)y + u_0'''\frac{y^3}{6}\right] + \varphi(x), \tag{5}$$

где $\varphi(x)$ – произвольная функция интегрирования.

Подставив найденное S во второе уравнение системы физических соотношений (3), получим σ_y

$$\sigma_y = -G\left[\left(u_0' + v_0''\right)y - u_0'''\frac{y^3}{6}\right] + \varphi(x).$$

Для определения произвольной функции интегрирования $\varphi(x)$ выполним граничные условия на протяженных границах балки

При $y = \frac{h}{2}$ $\sigma_y = -q,$ при $y = -\frac{h}{2}$ $\sigma_y = 0.$

В результате получим $\varphi(x) = \text{const} = -\frac{q}{2}$ и дифференциальное уравнение

$$u_0' + v_0'' - u_0'''\frac{h^2}{24} = \frac{q}{Gh}.$$

Подставляя (5) в первое уравнение системы (4) и добавляя к полученному уравнению приведенное выше, получим разрешающую систему уравнений относительно двух искомых функций

$$\begin{aligned}
&2u_0'' - v_0''' + u_0^{IV}\frac{y^2}{6} = 0,\\
&u_0''' - \frac{24}{h^2}\left(u_0' + v_0''\right) = -\frac{24q}{Gh^3}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Наличие y^2 в первом уравнении системы (6) обуславливает два пути получения решения: удовлетворить это уравнение, приравняв нулю члены при нулевой и второй степени y или удовлетворить этому уравнению интегрально.

Рассмотрим первый вариант.

$$2u_0'' - v_0''' = 0, \qquad u_0^{IV} = 0.$$

Интегрируя, получим

$$\begin{aligned} u_0 &= c_1\frac{x^3}{6} + c_2\frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4, \\ v_0 &= c_1\frac{x^4}{12} + c_2\frac{x^3}{3} + c_3 x^2 + 2c_4 x + a_1\frac{x^2}{2} + a_2 x + a_3, \end{aligned} \tag{7}$$

где c_i и a_j – произвольные константы интегрирования.

Рассмотрим балку, на торцах которой реализуются условия жёсткого защемления, что означает отсутствие на торцах продольных перемещений и прогиба. Для симметричных относительно середины балки граничных условий и при постоянной по длине балки нагрузке ряд констант обнуляется, а именно

$$c_2 = c_4 = a_2 = 0. \tag{8}$$

Полученное решение для перемещений (7) с учётом (8) подставим во второе уравнение системы (6) и распорядимся произвольными константами для его удовлетворения.

В результате получим

$$c_1 - \frac{24}{h^2}\left(\frac{3}{2}c_1 x^2 + 3c_3 + a_1\right) = -\frac{24q}{Gh^3}.$$

Отсюда следует $c_1 = 0$; $3c_3 + a_1 = \dfrac{q}{Gh}$.

Подставив эти константы в решение для перемещений (7) с учетом (8), получим

$$u_0 = \frac{1}{3}\left(\frac{q}{Gh} - a_1\right)x,$$

$$v_0 = \left(\frac{q}{Gh} - a_1\right)\frac{x^2}{3} + a_1\frac{x^2}{2} + a_3.$$

Оставшиеся константы определим из граничных условий отсутствия продольных перемещений и прогиба в случае жёсткой заделки на торах. Согласно (1 и (2) указанное требование при $x = \pm l$ выполняется, когда $u_0 = u_0' = v_0 = 0$. В результате получим, что перемещение $u = u_0 y = 0$ всюду, включая границы, а прогиб

$$v = v_0 = \frac{q}{2Gh}\left(x^2 - l^2\right). \tag{9}$$

Если сравнить максимальное перемещение из формулы (9) при $x = 0$ с прогибом металлической балки, то оно, на первый взгляд, значительно меньше максимального перемещения для металлических балок, пропорционального l^4. Но учитывая, что модуль G значительно меньше сдвигового модуля для металлов, то значения перемещений для металлических балок и рассматриваемой несжимаемой балки, могут оказаться соизмеримыми при одинаковой нагрузке и геометрических параметрах.

Рассмотрим другой вариант решения системы (6) и проинтегрируем первое уравнение по координате y в пределах $\pm\dfrac{h}{2}$ и получим следующую разрешающую систему уравнений

$$u_0^{IV}+\frac{72}{h^2}\left(2u_0''-v_0'''\right)=0,$$

$$u_0'''-\frac{24}{h^2}\left(u_0'+v_0''\right)=-\frac{24q}{Gh^3}.$$

Определив из 2-го уравнения приведённой системы уравнений v_0''

$$v_0''=-u_0+u_0'''\frac{h^2}{24}+\frac{q}{Gh} \qquad (10)$$

и подставив в первое уравнение этой же системы, получим дифференциальное уравнение для определения функции u_0

$$u_0^{IV}-\frac{108}{h^2}u_0''=0.$$

Решение этого уравнения

$$u_0=\frac{1}{k^2}\left(c_1\operatorname{sh}kx+c_2\operatorname{ch}kx\right)+a_1x+a_2.$$

Для симметричных относительно середины граничных условий $c_2=a_2=0.$

Согласно (1 и (2) граничные условия жёсткого защемления при $x=\pm l$ выполняются, если $u_0'=u_0=v_0=0.$ Выполняя первые два из трёх представленных условий, получим $c_1=\dfrac{a_1 l}{k^2\operatorname{sh}kl}=0,$ поскольку $\operatorname{sh}kl,$ где $k=\dfrac{\sqrt{108}}{h},$ бесконечно большое число. Если $c_1=0$, то $a_1=0$ и $u_0=u=0$ всюду, включая границы.

Далее из уравнения (10) получим решение для функции прогиба, которое после удовлетворения граничных условий жёсткого защемления $v_0=0$ при $x=\pm l,$ полностью совпадает с решением (9).

Отметим, что рассмотренная модель не позволяет удовлетворить граничные условия отсутствия касательных напряжений на протяжённых границах балки. Очевидно, что для выполнения этих условий требуется усложнение модели.

Модель №2.

Зададим продольное перемещение в виде

$$u=u_0(x)y+u_1(x)y^3,$$

где u_0 и u_1 произвольные функции продольной координаты.

Прогиб определим из условия несжимаемости

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad v=-u_0'\frac{y^2}{2}-u_1'\frac{y^4}{4}+v_0(x),$$

где $v_0(x)$ – произвольная функция интегрирования или прогиб нейтральной линии балки.

Деформации:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = u_0' y + u_1' y^3,$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -u_0' y - u_1' y^3,$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = G\left(u_0 + v_0' + 3u_1 y^2 - u_0'' \frac{y^2}{2} - u_1'' \frac{y^4}{2} \right).$$

Напряжения:

$$\sigma_x = 2G\varepsilon_x + S = 2G\left(u_0' y + u_1' y^3\right) + S,$$

$$\sigma_y = 2G\varepsilon_y + S = -2G\left(u_0' y + u_1' y^3\right) + S,$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = G\left[u_0 + v_0' + \left(6u_1 - u_0''\right)\frac{y^2}{2} - u_1'' \frac{y^4}{4} \right].$$

Разрешающая система дифференциальных уравнений задачи для определения трёх искомых функций u_0, u_1, v_0 формируется из уравнений равновесия в перемещениях и граничных условий на протяжённых сторонах балки.

Уравнения равновесия плоской задачи в отсутствие объёмных сил

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$

запишем в перемещениях

$$\begin{gathered} G\left(u_0'' + 6u_1\right) y + G u_1'' y^3 + \frac{\partial S}{\partial x}, \\ G\left[\left(v_0'' - u_0'\right) - \left(6u_1' + u_0'''\right)\frac{y^2}{2} - u_1''' \frac{y^4}{4} \right] + \frac{\partial S}{\partial y} = 0. \end{gathered} \tag{11}$$

Из второго уравнения этой системы путём интегрирования по координате y определяем функцию S

$$S = -G\left[\left(v_0'' - u_0'\right) y - \left(6u_1' + u_0'''\right)\frac{y^3}{6} - u_1''' \frac{y^5}{20} \right] + S_0(x),$$

где $S_0(x)$ – произвольная функция интегрирования, которая определяется из граничных условий на протяжённых сторонах балки $\sigma_y = -q$ при $y = \frac{h}{2}$ и $\sigma_y = 0$ при $y = -\frac{h}{2}$, откуда получим $S_0(x) = \mathrm{const} = -\frac{q}{2}$ и дифференциальное уравнение

$$u_1''' \frac{h^4}{320} + \left(u_0''' + 6u_1'\right)\frac{h^2}{24} - \left(u_0' + v_0''\right) = -\frac{q}{Gh}. \tag{12}$$

Преобразуем первое уравнение системы (11) с учётом найденной функции S

$$\left(2u_0'' - v_0''' + 6u_1\right) y + \left(12u_1'' + u_0^{IV}\right)\frac{y^3}{6} + u_1^{IV} \frac{y^5}{20} = 0, \tag{13}$$

Необходимое третье уравнение получим из условия отсутствия касательных напряжений на протяженных сторонах балки при $y = \pm\dfrac{h}{2}$

$$u_0 + v_0' + \left(6u_1 - u_0''\right)\frac{h^2}{8} - u_1''\frac{h^4}{64} = 0. \quad (14)$$

Дифференциальные уравнения (12-14) являются разрешающими для определения трёх искомых функций продольной координаты u_0, v_0 и u_1. Эти функции и их производные определяют суммарные продольное перемещение и прогиб. Уравнение (13), содержащее координату y разной степени можно удовлетворить, приравнивая нулю выражения, стоящие при y, y^3 и y^5, или удовлетворить это уравнение интегрально.

Точное удовлетворение уравнения (13) даёт три дифференциальных уравнения

$$2u_0'' - v_0''' + 6u_1 = 0,$$
$$\left(12u_1'' + u_0^{IV}\right) = 0,$$
$$u_1^{IV} = 0.$$

Из этих уравнений определим с точностью до произвольных констант все искомые функции

$$u_1 = a_1\frac{x^3}{6} + a_2\frac{x^2}{2} + a_3x + a_4,$$
$$u_0 = a_1\frac{x^5}{80} + a_2\frac{x^4}{2} + c_1\frac{x^3}{6} + c_2\frac{x^2}{2} + c_3x + c_4,$$
$$v_0 = a_1\frac{x^6}{24} + a_2\frac{x^5}{4} + \left(3a_3 + c_1\right)\frac{x^4}{12} + \left(3a_4 + c_2\right)\frac{x^3}{3} + d_1\frac{x^2}{2} + d_2x + d_3,$$

где a_i, c_j, $d_к$ – произвольные константы интегрирования, которыми, в первую очередь, распорядимся так, чтобы дифференциальные уравнения (12) и (14) были также удовлетворены. Для упрощения рассмотрим симметричные относительно середины балки $x = 0$ граничные условия. Константы, противоречащие симметрии приравниваем нулю

$$a_2 = a_4 = c_2 = c_4 = d_2 = 0.$$

В этом случае решение для искомых функций выглядит так

$$u_1 = \frac{a_1x^3}{6} + a_3x,$$
$$u_0 = a_1\frac{x^5}{10} + \frac{c_1x^3}{6} + c_3x,$$
$$v_0 = a_1\frac{x^6}{24} + \frac{\left(3a_3 + c_1\right)x^4}{12} + \frac{d_1x^2}{2} + d_3.$$

Подставляя эти функции в дифференциальное уравнение (12), получим

$$-\frac{7}{4}a_1x^4 + \left(3a_1 - 3a_3 - \frac{3}{2}c_1\right)x^2 + \frac{h^2}{24}\left(c_1 - 6a_3\right) - c_3 - d_1 + \frac{h^4}{320}a_1 = -\frac{q}{Gh},$$

откуда следует $a_1 = 0,\ c_1 = -2a_3,\ \dfrac{h^2}{3}a_3 + c_3 + d_1 = \dfrac{q}{Gh}.$

Подставляя эти же функции в (14), получим еще одну связь между произвольными константами

$$c_3 + d_1 + a_3 h^2 = 0.$$

Из приведенных уравнений связи произвольных постоянных следует

$$a_3 = -\frac{3q}{2Gh^3}, \quad c_1 = \frac{3q}{Gh^3}, \quad c_3 + d_1 = \frac{3q}{2Gh}.$$

Константы c_3 и d_3 определим из граничных условий жёсткого защемления на торцах балки при $x = \pm l$, но не для суммарного прогиба, а для двух его составляющих. Потребуем, чтобы $u_0' = v_0 = 0.$

Окончательное решение для продольных перемещений и прогиба принимает вид

$$\begin{aligned} u &= \frac{q}{2Gh^3}x\left(x^2 - 3l^2\right)y - \frac{3q}{2Gh^3}xy^3, \\ v &= -\frac{q}{8Gh^3}\left(x^4 - 6x^2l^2 + 5l^4\right) + \frac{3q}{4Gh}\left(x^2 - l^2\right) - \frac{3q}{4Gh^3}\left(x^2 - l^2\right)y^2 + \\ &\quad + \frac{3q}{8Gh^3}y^4. \end{aligned} \tag{15}$$

Как видно из формул (15), граничные условия жёсткого защемления балки при $x = \pm l$ для продольных перемещений выполняются интегрально, а для прогиба первые три слагаемых обращаются на границах в ноль, а последнее слагаемое при $y = 0$. Так как для прогиба важно точное выполнение граничных условий, оценим влияние последнего слагаемого в (15) на прогиб в целом. Определим максимальный прогиб, который имеет место в середине балки при $x = 0$

$$v_{\max} = -\frac{5ql^4}{86h^3} - \frac{3ql^2}{46h} + \frac{3ql^2}{46h^3}y^2 + \frac{3q}{86h^3}y^4.$$

Примем $\dfrac{l}{h} = 5,\ l = 1$ м и определим максимальный прогиб нейтральной линии балки при $y = 0$

$$v_{\max_1} = -78\frac{q}{G} - 3,75\frac{q}{G} \approx -81,8\frac{q}{G}$$

и максимальный прогиб на поверхности балки $y = \pm\dfrac{h}{2}$

$$v_{\max_2} = -81,8\frac{q}{G} + 0,9\frac{q}{G} + 0,005\frac{q}{G}.$$

Влияние последнего слагаемого на прогиб пренебрежимо мало, поэтому можно считать, что граничные условия жёсткого защемления для прогиба выполнятся точно. Несмотря на то, что прогиб зависит от поперечной координаты y, максимальный прогиб нейтральной линии и прогиб на протяженных поверхностях отличаются на величину немного более 1%. Это означает, что прогиб почти не зависит или слабо зависит от поперечной координаты. Основное влияние на величину прогиба оказывает первое слагаемое во втором соотношении (15), которое не связано с поперечной координатой. Но если заранее принять $\dfrac{\partial v}{\partial y}=0,$ то получим решение (9) при отсутствии продольных перемещений и невозможности удовлетворить условие отсутствия касательных напряжений на протяженных сторонах балки. Если уменьшить отношение длины балки к её ширине до минимально возможного значения, влияние последнего слагаемого во втором уравнении (15) возрастёт, но по сравнению с другими слагаемыми останется пренебрежимо малым.

Дифференциальное уравнение (13) может быть удовлетворено интегрально, и тогда получим другую систему дифференциальных уравнений относительно трёх искомых функций. Уравнения (12) и (14) остаются без изменений, но к ним следует добавить уравнение

$$2u_0''-v_0'''+6u_1+\left(12u_1''+u_0^{IV}\right)\frac{h^2}{72}+u_1^{IV}\frac{h^4}{1600}=0. \tag{16}$$

Выразив u_0 и v_0 через u_1 из (12) и (14) и исключив их из (16), получим уравнение четвёртого порядка относительно функции u_1

$$u_1^{IV}\frac{h^4}{600}-u_1''\frac{h^2}{5}+24u_1=-\frac{36}{6h^3}x-3A, \tag{17}$$

где A – произвольная константа интегрирования.

Решение этого уравнения есть сумма решений однородного уравнения и частного интеграла $u_{10}+\overline{u}_1$. Частное решение легко определить, т.к. правая часть уравнения есть линейная функция x

$$\overline{u}_1=-\frac{3q}{2Gh^3}x-\frac{1}{8}A.$$

Решение однородного уравнения зависит от вида корней характеристического уравнения

Приведем (17) к виду $u_{10}^{IV}-m^2u_{10}''+m^4u_{10}=0,$ где $m^2=\dfrac{120}{h^2}.$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^4-m^2k^2+m^4=0.$$

Имеем 4 попарно сопряженных комплексных корня

$$m_{1-4}=\pm\frac{7{,}5}{h}\pm\frac{13{,}4}{h}i.$$

Введем обозначения $\lambda=\dfrac{7{,}5}{h},\quad \beta=\dfrac{13{,}4}{h}.$

Тогда

$$u_{10}=c_1\,\mathrm{sh}\,\lambda x\cos\beta x+c_2\,\mathrm{ch}\,\lambda x\sin\beta x+c_3\,\mathrm{sh}\,\lambda x\sin\beta x+c_4\,\mathrm{ch}\,\lambda x\cos\beta x.$$

Для рассматриваемых симметричных относительно середины балки граничных условий для продольных перемещений мы оставляем обратно симметричные функции, принимая

$$c_3=c_4=A=0,$$

$$u_1=u_{10}+\overline{u}_1=c_1\mathrm{sh}\lambda x\cos\beta x+c_2\mathrm{ch}\lambda x\sin\beta x-\frac{3q}{2Gh^3}x.$$

До определения функций u_0 и v_0 определим произвольные константы интегрирования выполняя условия жёсткого защемления для функции u_1 и её первой производной. Потребуем, чтобы при $x = \pm l$ $u_1 = u_1' = 0$.

Из первого условия получим

$$c_2 = -c_1 \operatorname{th} \lambda l \operatorname{ctg} \beta l + \frac{1}{\operatorname{ch} \lambda l \sin \beta l}\left(\frac{3q}{2Gh^3} l\right),$$

где λl – очень большое число, например, при $\frac{l}{h} = 5$ $\lambda l = \frac{7,5}{h} l = 37,5,$ поэтому $\operatorname{th} \lambda l = 1,$ а $\operatorname{ch} \lambda l = \infty,$ поэтому $c_2 = -c_1 \operatorname{ctg} \beta l.$

Подставляя константу c_2 во второе условие, получим

$$c_1 = -\frac{3q}{2Gh^3 \beta \operatorname{ch} \lambda l \sin \beta l \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \beta l\right)}.$$

Отсюда следует, что $c_1 = 0,$ так как $\operatorname{ch} \lambda l = \infty,$ а все другие составляющие этой формулы имеют конечные значения. Тогда решение для u_1 имеет вид $u_1 = -\frac{3q}{2Gh^3} x.$ Это решение, а также решения для функций u и v полностью совпадают с полученным ранее решением (15). Очевидно, что в рассматриваемой задаче точное или интегральное удовлетворение уравнения (13) не влияет на окончательный результат.

ВЫВОДЫ

1. Задача изгиба несжимаемой балки не может быть решена с использованием классических гипотез.
2. В предложенной первой модели условия отсутствия касательной нагрузки на протяженных границах балки не выполняются, а граничные условия жесткого защемления на торцах выполняются точно.
3. Во второй, более сложной, модели удаётся удовлетворить условия отсутствия касательной нагрузки на протяженных границах балки, условия для продольного перемещения на торцах выполняются интегрально, для прогиба практически точно.
4. Сравнивая решения для прогиба первой и второй модели, можно констатировать их значительно различие: прогиб второй модели при одинаковых жесткостных и геометрических параметрах значительно больше, но вряд ли удовлетворение граничных условий для касательных напряжений может так существенно повлиять на окончательный результат. Какая из моделей более предпочтительна, мог бы, ответить хорошо поставленный эксперимент.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. *Пластины и оболочки.* – М.: Наука, 1966. – 636 с.
2. Васильев В.В., Лурье С.А. *К проблеме построения неклассических теорий пластин* // Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела. – 1990. – С.158-167.

3. Васильев В.В., Лурье С.А. *Вариант уточненной теории изгиба балок из слоистых пластмасс* // Механика полимеров. – 1972. – №4. – С.577-768.
4. Carrera E., Giunta G., Petrolo M. *Beam Structures: Classical and Advanced Theories.* – Wiley, 2011. – 204 p.
5. Pobedrya B.E. *Equations of state of viscoelastic isotropic media* // Mechanics of Composite Materials. – 1967. – Vol.3. – Iss.4. – Pp.429-432.
6. Treloar L.R.G. *The Physics of Rubber Elasticity.* – OUP Oxford, 2005. – 324 p.
7. Herakovich C.T. *A Concise Introduction to Elastic Solids: An Overview of the Mechanics of Elastic Materials and Structures.* – Springer, 2017. – 136 p.

REFERENCES

1. Vojnovskij-Kriger S. *Plastiny i obolochki [Plates and Shells]*. Moskva, Nauka, 1966, 636 p.
2. Vasil'ev V.V., Lur’e S.A. *K probleme postroeniya neklassicheskikh teorij plastin [On the problem of constructing non-classical plate theories]*. Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tvyordogo tela, 1990, Pp.158-167.
3. Vasil’ev V.V., Lur’e S.A. *Variant utochnennoj teorii izgiba balok iz sloistykh plastmass [A variant of the refined theory of bending beams made of laminated plastics]*. Mekhanika polimerov, 1972, No.4, Pp.577-768.
4. Carrera E., Giunta G., Petrolo M. *Beam Structures: Classical and Advanced Theories*. Wiley, 2011, 204 p.
5. Pobedrya B.E. *Equations of state of viscoelastic isotropic media*. Mechanics of Composite Materials, 1967, Vol.3, Iss.4, Pp.429-432.
6. Treloar L.R.G. *The Physics of Rubber Elasticity*. OUP Oxford, 2005, 324 p.
7. Herakovich C.T. *A Concise Introduction to Elastic Solids: An Overview of the Mechanics of Elastic Materials and Structures*. Springer, 2017, 136 p.

Поступила в редакцию 27 апреля 2020 года.

Сведения об авторе:

Фирсанов Виктор Васильевич – к.т.н., доц., Кафедра «Проектирование и прочность авиационно-ракетных и космических изделий», ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт» (национальный исследовательский университет) г. Москва, Россия; e-mail: kaf603@mai.ru