

УДК 539.3

DOI 10.33113/mkmk.ras.2020.26.02.247_258.07

К ОЦЕНКЕ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ АДГЕЗИОННОГО СЛОЯ В СЛОИСТОМ КОМПОЗИТЕ*

Абдурахманов А.А., Богачева В.Э., Глаголев В.В.

Тульский государственный университет, г. Тула, Россия

АННОТАЦИЯ

Исследуется модель деформирования слоистого композита в виде двухконсольной пластины на основе концепции слоя взаимодействия в линейно упругой постановке. Предполагается, что адгезионный слой имеет конечную толщину и связывает консоли не по всей их длине. Толщина слоя рассматривается в виде линейного параметра. Напряженно-деформированное состояние слоя рассматривается на основе средних по толщине и граничных напряжений, связанных условиями равновесия. Использование средних по толщине напряжений позволяет не рассматривать форму окончания слоя и оставаться в рамках регулярного распределения поля напряжений в концевой области слоя. Используя вариационную постановку задачи, содержащей линейный параметр, построено конечно-элементное решение на основе квадратичного распределения поля перемещений на элементе. Проведено сравнение численного решения с его аналитическим приближением при нормальном отрыве. Аналитическое решение строилось на гипотезах типа Тимошенко с учетом сдвиговых деформаций в консолях и при отсутствии деформаций сжатия. В рассмотрение вводится энергетическое произведение в виде произведения приращения удельной свободной энергии на толщину слоя. Исследовано энергетическое произведение адгезионного слоя в зависимости от линейного параметра для нагружения типа нормального отрыва и смешанной моды нагружения. Показано, что при уменьшении линейного параметра имеет место сходимость энергетического произведения. Показано влияние упрощающих гипотез распределения поля перемещений в консолях на предельное значение энергетического произведения. Предельное значение энергетического произведения при критической внешней нагрузке предлагается рассматривать в качестве критериальной величины. При этом возможно выделение диапазона значений линейного параметра, при котором значение внешней критической нагрузки практически будет постоянным.

Ключевые слова: слой взаимодействия; линейный параметр; слоистый композит; энергетическое произведение

TO EVALUATING THE LIMIT STATE OF THE ADHESION LAYER IN A LAYERED COMPOSITE

Abdurakhmanov A.A., Bogacheva V.E., Glagolev V.V.

Tula State University, Tula, Russia

ABSTRACT

The model of deformation of a layered composite in the form of a double-console plate is studied on the basis of the concept of an interaction layer in a linearly elastic formulation.

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и правительства Тульской области в рамках научного проекта № 19-41-710001 p_a.

It is assumed that the adhesive layer has a finite thickness and does not bind the cantilevers along their entire length. Layer thickness is considered as a linear parameter. The stress-strain state of a layer is considered on the basis of average thicknesses and boundary stresses related by equilibrium conditions. The use of stresses average in thickness allows us not to consider the shape of the end of the layer and to remain within the framework of the regular distribution of the stress field in the end region of the layer. Using the variational formulation of the problem containing a linear parameter, a finite element solution is constructed based on the quadratic distribution of the displacement field on the element. The numerical solution is compared with its analytical approximation with normal separation. The analytical solution was based on hypotheses of the Tymoshenko type taking into account shear deformations in consoles and in the absence of compression deformations. The energy product is introduced into consideration in the form of the product of the increment of the specific free energy by the layer thickness. The energy product of the adhesive layer was investigated as a function of the linear parameter for loading, such as normal detachment and mixed loading mode. It is shown that with a decrease in the linear parameter, the convergence of the energy product takes place. The effect of simplifying hypotheses on the distribution of the displacement field in consoles on the limiting value of the energy product is shown. The limiting value of the energy product at a critical external load is proposed to be considered as a critical value. In this case, it is possible to isolate the range of values of the linear parameter at which the value of the external critical load will be practically constant.

Keywords: interaction layer; linear parameter; layered composite; energy product

ВВЕДЕНИЕ

Основным подходом при моделировании прочности адгезионных соединений в слоистых композитах является представление адгезионного слоя (АС) слоем нулевой толщины [1-3]. В этом случае для оценки прочности соединений используют критериальную базу механики квазихрупкого разрушения. Аналитические решения в этом случае получаются, как правило, в рамках упрощающих гипотез [4-6], а свойства адгезива сводятся к силам взаимодействия склеенных материалов, которые могут иметь разные механические свойства [7-9].

В слоистых композитах толщина АС является естественным линейным параметром. В зависимости от толщины АС (ядра), относительной жесткости между ядром и сопрягаемыми телами, граничных условий применяют различные модели. Постановка и решение задач, учитывающих изгибную жесткость ядра слоистого композита, предложена в работах [10-12]. В работах [10,11] деформация обжатия ядра полагается постоянной по толщине, а в работе [12] – линейной.

В этом случае линейный параметр модели соизмерим с толщинами сопрягаемых АС тел.

Наряду с моделями [10-12] имеют место модели, в которых размер АС существенно меньше сопрягаемых им тел. Так учет размера АС при незначительной его изгибной жесткости, присутствует в модели с введением «мягкого слоя» [1,13,14], слоя взаимодействия [15,16], модели контактного слоя [17,18].

Отметим применение градиентной теории упругости для описания деформирования слоистых композитов [19-21].

Для нахождения напряженно-деформированного состояния (НДС) и связанного с ним критического состояния в рамках известных локальных

критериев необходимо знать точное значение толщины АС, что проблематично, так как толщина АС не является постоянной величиной в готовой продукции. В этом случае речь может идти об определенном допуске или диапазоне значений, в рамки которого укладывается толщина АС в образцах. Таким образом, необходим критерий разрушения, обеспечивающий независимость критериальной величины от точных значений линейного параметра при выполнении расчета при любом значении линейного параметра из заданного диапазона с определенной степенью точности.

В работе [22] было введено понятие энергетического произведения (ЭП) для материального слоя в виде произведения приращения удельной свободной энергии и толщины слоя. В данной работе в АС рассматривается зависимость ЭП от толщины слоя в зоне обрыва связей АС с сопрягаемыми телами при упругом деформировании при наличии всех компонент тензора напряжений для плоской деформации. Показано, что, рассматривая ЭП в качестве критерия разрушения, можно проводить расчеты на прочность тонкого, по сравнению с толщинами сопрягаемых тел АС, используя в качестве его толщины фиксированное значение из некоторого диапазона.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На рис.1 показан слоистый композит длиной $\ell + a$, состоящий из трех тел. Пластины 1 и 2 с толщинами h_1 , где $i=1,2$ здесь и далее, в общем случае с различными механическими свойствами связаны по длине ℓ АС 3 толщиной δ_0 . Правый торец образца жестко закреплен от перемещений, на левых торцах консолей действует вертикальная антисимметричная нагрузка интенсивностью P^i . Вся остальная поверхность образца свободна от внешней нагрузки.

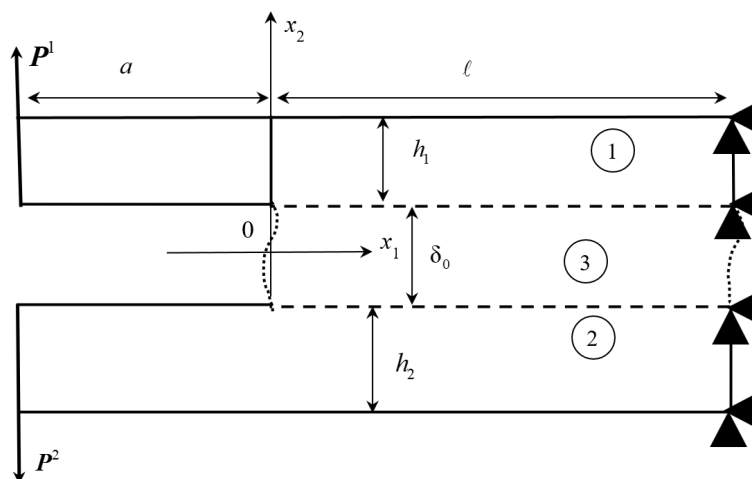


Рис.1. Схема нагружения слоистого композита.

Для описания взаимодействия слоя 3 с телами 1 и 2 применим концепцию «слоя взаимодействия». В этом случае напряженное состояние слоя будем описывать на основе средних по толщине напряжений и деформаций

$$\bar{\sigma}_{21} = \bar{\sigma}_{12} = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{21}(x_1, x_2) dx_2, \quad \bar{\sigma}_{22} = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{22}(x_1, x_2) dx_2,$$

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{11} &= \frac{1}{\delta_0} \int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{11}(x_1, x_2) dx_2, \quad \bar{\varepsilon}_{22} = \left(\frac{u_2^+(x_1) - u_2^-(x_1)}{\delta_0} \right), \\ \bar{\varepsilon}_{11} &= 0.5 \left(\frac{\partial u_1^+(x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1^-(x_1)}{\partial x_1} \right), \\ \bar{\varepsilon}_{21} = \bar{\varepsilon}_{12} &= 0.5 \left(\frac{u_1^+(x_1) - u_1^-(x_1)}{\delta_0} + 0.5 \left(\frac{\partial u_2^+(x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^-(x_1)}{\partial x_1} \right) \right),\end{aligned}$$

где u_i^\pm – проекции векторов перемещений соответственно верхней и нижней границы слоя на координатные оси. Напряжения по границам АС связаны со средними по толщине напряжениями условиями равновесия.

В предположении непрерывности поля перемещений в композите по границе слоя, а также равенства модулей и противоположности знаков соответствующих компонент векторов напряжений, действующих по границе адгезионного слоя, равновесие тел 1 и 2 согласно работе [15] запишем в вариационной форме для тела 1

$$\begin{aligned}\int_{S_1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} ds + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^+ dx_1 + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{12} \delta u_1^+ dx_1 + \\ + 0.5 \delta_0 \left(\int_{\ell} \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^+}{\partial x_1} dx_1 + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{12} \frac{\partial \delta u_2^+}{\partial x_1} dx_1 \right) = \int_{L_1} \mathbf{P}^1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} u dl\end{aligned} \quad (1)$$

и тела 2

$$\begin{aligned}\int_{S_2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} ds - \int_{\ell} \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^- dx_1 - \int_{\ell} \bar{\sigma}_{12} \delta u_1^- dx_1 + \\ + 0.5 \delta_0 \left(\int_{\ell} \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^-}{\partial x_1} dx_1 + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{12} \frac{\partial \delta u_2^-}{\partial x_1} dx_1 \right) = \int_{L_2} \mathbf{P}^2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} u dl,\end{aligned} \quad (2)$$

где S_i – площади сечений в плане $x_3 = const$ консолей; $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}$ – тензоры напряжений и деформаций; $\sigma_{ii}, \sigma_{12}, \varepsilon_{ii}, \varepsilon_{12}$ – компоненты тензоров напряжений и деформаций; $\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ – тензоры средних напряжений и деформаций слоя с соответствующими компонентами $\bar{\sigma}_{ii}, \bar{\sigma}_{12}, \bar{\varepsilon}_{ii}, \bar{\varepsilon}_{12}$; L_i – граница приложения внешней нагрузки консолей; \cdot – скалярное умножение; $\cdot\cdot$ – двойное скалярное умножение.

Для материалов консолей рассмотрим определяющие соотношения в форме закона Гука

$$\sigma_{kj} = \frac{E_i}{1 + \nu_i} \left(\varepsilon_{kj} + \frac{\nu_i}{1 - 2\nu_i} \varepsilon \delta_{kj} \right), \quad (3)$$

где E_i, ν_i – модуль упругости и коэффициент Пуассона консолей; $\varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ – объемная деформация; δ_{kj} – символ Кронекера; $k, j = 1, 2, 3$.

Для материала АС определяющие соотношения считаем справедливыми для средних компонент тензоров напряжений и деформаций

$$\bar{\sigma}_{kj} = \frac{E_3}{1 + \nu_3} \left(\bar{\varepsilon}_{kj} + \frac{\nu_3}{1 - 2\nu_3} \bar{\varepsilon} \delta_{kj} \right). \quad (4)$$

Таким образом, решение задачи о нагружении слоистого композита (1)-(4) сводится к определению поля перемещений $\mathbf{u}(x_1, x_2)$ в консолях (см. рис.1) с учетом граничных условий на его торцах

$$u_1|_{x_1=\ell} = 0, \quad (5)$$

$$\sigma_{11}|_{x_1=-a} = 0, \quad (6)$$

$$\sigma_{12}|_{x_1=-a; x_2>0} = -P^1, \quad \sigma_{12}|_{x_1=-a; x_2<0} = P^2 \quad (7)$$

и свободных поверхностях

$$\sigma_{22} = \sigma_{12} = 0. \quad (8)$$

Для нахождения численного решения постановки (1)-(8) в состоянии плоской деформации используем метод конечных элементов с квадратичным распределением поля перемещений на элементе.

2. НАГРУЖЕНИЕ АДГЕЗИОННОГО СЛОЯ НОРМАЛЬНЫМ ОТРЫВОМ

Рассмотрим композит с одинаковыми пластинами по геометрическим и механическим свойствам при симметричном нагружении: $P^1 = P^2 = P$. В силу симметрии задачи проекции поля перемещений удовлетворяют условиям: $u_1^1 = u_1^2 = u_1$, $u_2^1 = -u_2^2 = u_2$, где верхний индекс определяет номер консоли. Таким образом достаточно ограничиться рассмотрением консоли 1. С учетом, что в АС для данного нагружения имеет место $u_1^+ = u_1^-$, $u_2^+ = -u_2^-$, из (4) находим $\bar{\sigma}_{12} = 0$. В этом случае, полагаем распределение поля перемещений в консоли 1 в следующем виде

$$u_1(x_1, x_2) = u_1^+(x_1) - \varphi(x_1)(x_2 - \delta_0/2), \quad (9)$$

$$u_2(x_1, x_2) = u_2^+(x_1), \quad (10)$$

где параметр φ имеет геометрический смысл малого угла поворота материальной нормали к плоскости.

Подход на основе аппроксимации (9), (10), как и теория Тимошенко, учитывает сдвиговые деформации.

В работе [16] было получено аналитическое решение задачи с учетом принятых допущений (9), (10). Используем данное решение для сравнения с полученным численным решением.

В качестве материала для расчета рассмотрим композит со следующими характеристиками консолей: $E_1 = E_2 = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ и адгезионного слоя: $E_3 = 9 \cdot 10^9$ Па, $\nu_3 = 0.3$. Геометрические характеристики слоистого композита выбираем следующими: $\ell = 0.3$ м, $a = 0.05$ м, $h_1 = h_2 = h = 0.05$ м, $\delta_0 = 10^{-4}$ м.

На рис.2 и рис.3 построены зависимости горизонтальных и вертикальных перемещений верхней границы адгезионного слоя при единичной внешней нагрузке. График 1 соответствует аналитическому решению, а график 2 – решению, найденному методом конечных элементов. Значения компонент вектора перемещения отнесены к величине рассматриваемой компоненты перемещения на левом торце слоя, полученной в аналитическом решении $u_i^{+(a)}$. При этом значение горизонтальной компоненты в вершине слоя отрицательное, а

вертикальной – положительное. Координата по оси абсцисс отнесена к толщине слоя. Использовалась неравномерная сетка конечных элементов при сгущении к вершине слоя с координатой $x_1 = 0$. При этом минимальный размер стороны конечного элемента соответствовал толщине слоя.

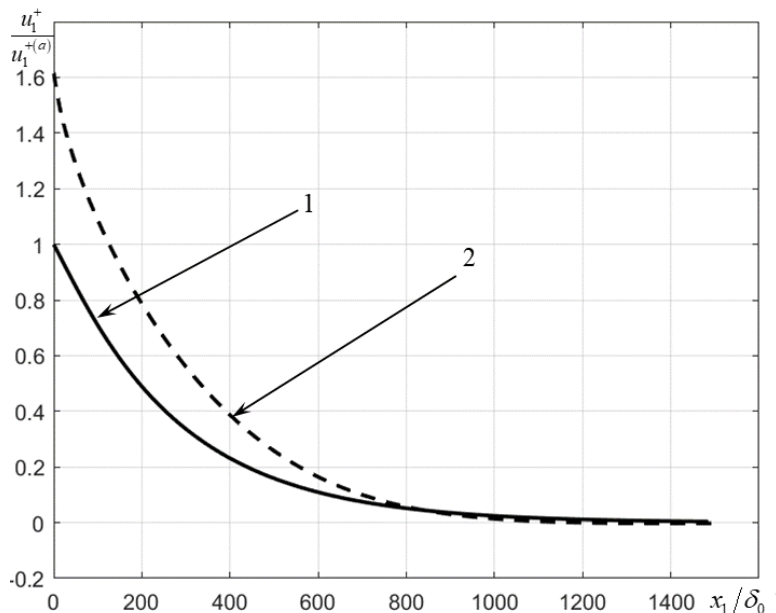


Рис.2. Относительное горизонтальное перемещение границы адгезионного слоя.

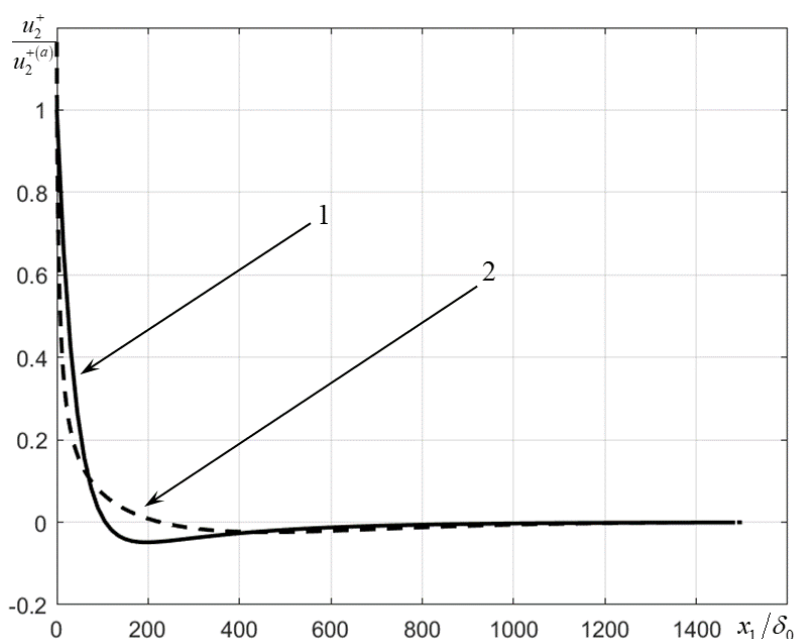


Рис.3. Относительное вертикальное перемещение границы адгезионного слоя.

Из рис.2 и рис.3 видим неплохое качественное соответствие упрощенного аналитического и прямого численного решений нахождения поля перемещений границы АС.

На рис.4 и рис.5 показаны относительные средние напряжения слоя. Значения компонент напряжений отнесены к величине компоненты напряжения

отрыва на левом торце слоя, полученного в аналитическом решении $\bar{\sigma}_{22}^{(a)}$. Значение компонент средних напряжений в вершине слоя положительные.

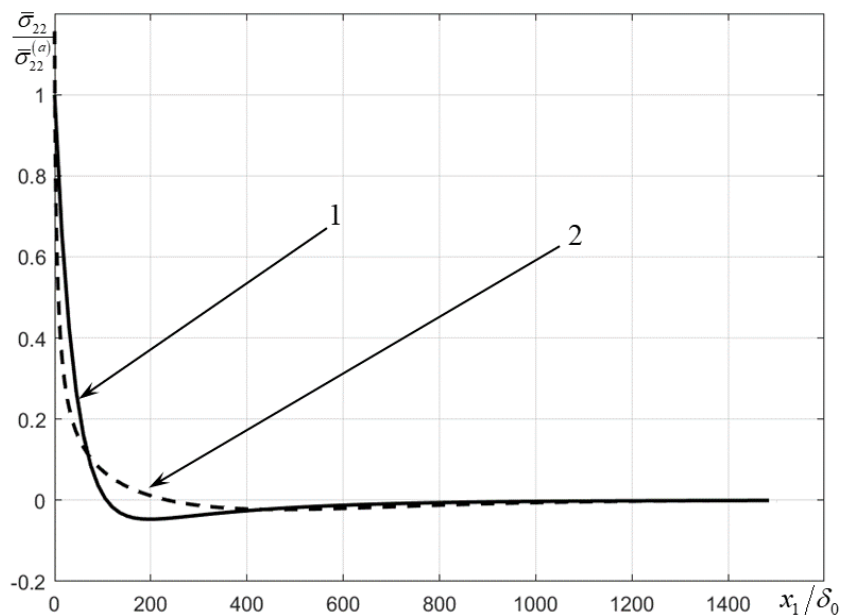


Рис.4. Относительное среднее напряжение отрыва в адгезионном слое.

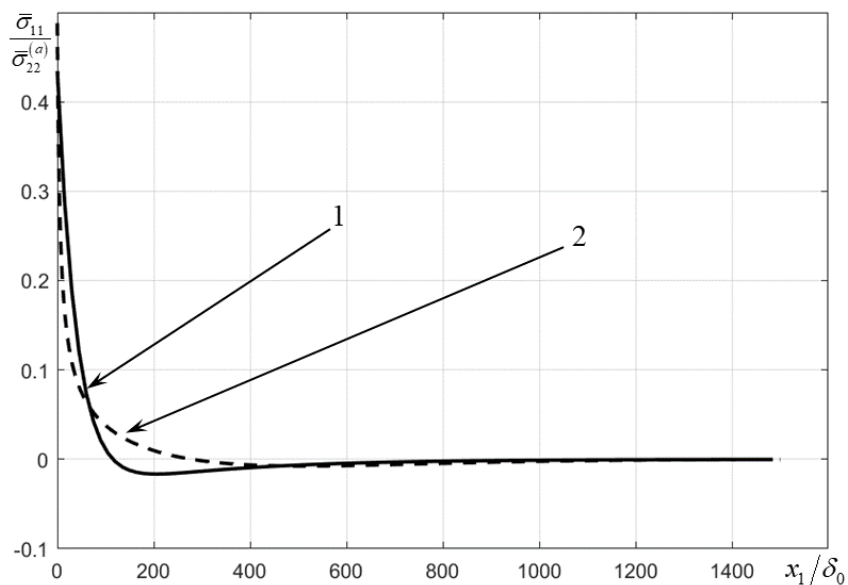


Рис.5. Относительное среднее напряжение, ортогональное отрыву, в адгезионном слое.

Таким образом учет деформации обжатия и неоднородности по толщине сдвиговой деформации консоли приводит к увеличению расчетного значения напряженного состояния в концевой области АС по сравнению с решением на основе гипотез (9), (10) на 18%.

3. НАХОЖДЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ

Рассмотрим приращение удельной свободной энергии в АС в состоянии плоской деформации

$$\varphi = \frac{(1+\nu_3)}{E_3} \left(0.5 \left(((1-\nu_3)\bar{\sigma}_{11} - \nu_3\bar{\sigma}_{22})\bar{\sigma}_{11} + ((1-\nu_3)\bar{\sigma}_{22} - \nu_3\bar{\sigma}_{11})\bar{\sigma}_{22} \right) + \bar{\sigma}_{12}^2 \right).$$

Следуя работе [22] введем в рассмотрение ЭП

$$2\gamma = \delta_0 \varphi. \quad (11)$$

На рис.6 приведена зависимость ЭП в вершине АС от относительной толщины слоя, построенная на аналитическом решении [16], для образца слоистого композита, рассмотренного в разделе 2. График 1 соответствует $\nu_3 = 0.3$, а график 2 – $\nu_3 = 0$.

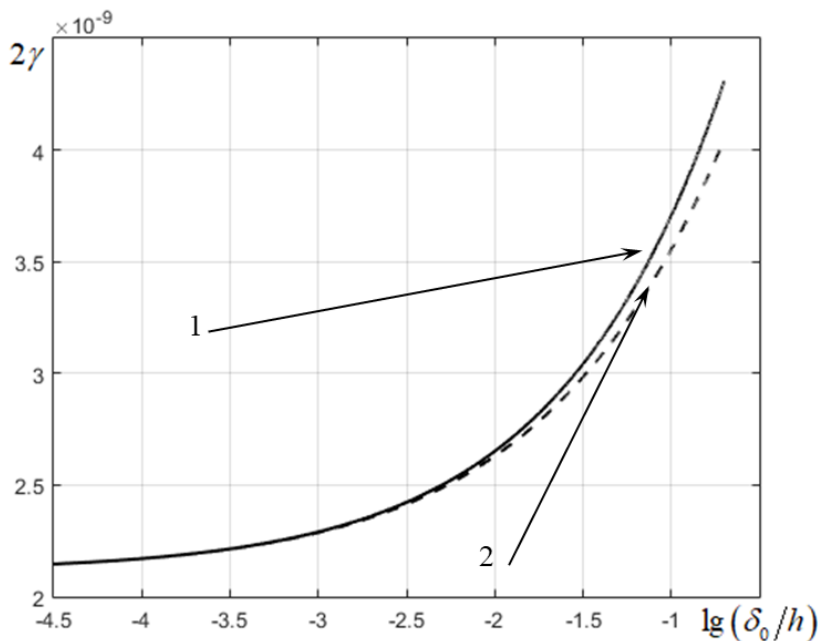


Рис.6. Сходимость энергетического произведения в адгезионном слое.

Из приведенных зависимостей видим, что значение коэффициента Пуассона несущественно для нахождения ЭП в рассматриваемой схеме нагружения при относительно малых толщинах слоя. Кроме того, можно определить диапазон малых относительных толщин АС, расчет по значениям которого будет приводить к нахождению ЭП с наперед заданной точностью.

Отметим, что расчет методом конечных элементов для относительно малых толщин АС требует больших вычислительных ресурсов при соблюдении соответствия толщины слоя и размера стороны сопрягаемых со слоем элементов. В этом случае применение упрощенных аналитических решений для качественной оценки оправдано.

Расчетные значения напряженного состояния АС, показанные на рис.4 и рис.5, в упрощенном аналитическом и конечно-элементном решениях дают различия в ЭП в вершине слоя на 35%. Данное обстоятельство требует решений соответствующей задачи без упрощающих гипотез.

Для сдвигового характера нагружения в работе [23] показана вычислительная сходимость конечно-элементного и упрощенного аналитического

решений. В таблице 1 приведем результаты конечно-элементного решения значения ЭП на торце АС для следующих толщин консолей: $h_1 = h$; $h_2 = 0.5h_1$ при единичной распределенной внешней нагрузке по торцам, согласно схеме рис.1. В этом случае в АС реализуется напряженное состояние смешанной моды нагружения. Расчет проводился при соблюдении соответствия толщины слоя и размера стороны сопрягаемых со слоем элементов.

Таблица 1.

δ_0 (м)	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}
$2\gamma \cdot 10^{-9}$ (Дж/м ²)	10.38	9.61	9.32	9.43	9.52

Из результатов таблицы 1 видим, что в рамках заданной геометрии и механических характеристик слоистого композита значения ЭП при $\delta_0 \leq 10^{-4}$ м меняется в пределах 3%. В этом случае следует отметить и возможную вычислительную погрешность решения при сгущении сетки конечных элементов. Таким образом, расчет ЭП при толщинах меньших $\delta_0^* = 10^{-4}$ будет приводить практически к одним и тем же значениям.

При разрушении слоя выражение (11) ассоциируется с удельной поверхностной энергией [22]. Таким образом, полагая, что «разрушение» происходит по массиву АС, будем считать предельное значение ЭП $2\gamma = 2\gamma^*$ критериальной величиной.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассматривая критическое значение ЭП в качестве критерия разрушения тонкого АС, можно в определенном диапазоне проводить расчеты без фиксации значения толщины АС. Расчет критического состояния АС в этом случае может быть осуществлен по следующей процедуре. В образце с заданными геометрическими и механическими характеристиками, с толщиной АС образца меньшей δ_0^* , найденной по анализу сходимости ЭП, из эксперимента определяется внешняя критическая нагрузка. По критической нагрузке посредством решения задачи определения напряженного состояния в АС находится критическое значение ЭП $2\gamma^*$. Для образцов, выбирая любой относительный параметр из диапазона $\delta_0 \in (0; \delta_0^*]$, при данном виде нагружения можно определить критическую внешнюю нагрузку, сопоставляя значение ЭП на торце слоя с критическим.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. *Механика многослойных конструкций*. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
2. Черепанов Г.П. *Механика разрушения композиционных материалов*. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
3. Allen H.G., Feng Z. *Classification of structural sandwich panel behaviour / Mechanics of Sandwich Structures*. Springer, Dordrecht. – 1998. – Pp.1-12.

4. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. *Пластины и оболочки*. – М.: Физматгиз, 1963. – 636 с.
5. Fang X., Charalambides P.G. *The fracture mechanics of cantilever beams with an embedded sharp crack under end force loading* // Engineering Fracture Mechanics. – 2015. – Vol.149. – Pp.1-17.
6. Mattei O., Bardella L. *A structural model for plane sandwich beams including transverse core deformability and arbitrary boundary conditions* // Eur. J. Mech. A-Solid. – 2016. – Vol.58. – Pp.172-186.
7. Устинов К.Б. *Об отслоении слоя от полуплоскости; условия упругой заделки для пластины эквивалентной слою* // Изв. РАН. МТТ. – 2015. – Т.50. – №1. – С.75-95.
8. Фудзии Т., Дзако М. *Механика разрушения композиционных материалов*. – М.: Мир, 1982. – 232 с.
9. Evams A.G., Hutchinson J.W. *On the mechanics of delamination and spelling on compressed films* // International Journal of Solids and Structures. – 1984. – Vol.20. – No.5. – Pp.455-466.
10. Mattei O., Bardella L. *A structural model for plane sandwich beams including transverse core deformability and arbitrary boundary conditions* // Eur. J. Mech. A-Solid. – 2016. – Vol.58. – Pp.172-186.
11. Panettieri E., Fanteria D., Danzi F. *Delaminations growth in compression after impact test simulations: Influence of cohesive elements parameters on numerical results* // Composite Structures. – 2016. – Vol.137. – Pp.140-147.
12. Panteghini A., Bardella L. *Structural theory and finite element modelling of linear elastic sandwich beams* // Eur. J. Mech. A-Solid. – 2017. – Vol.61. – Pp.393-407.
13. Морозов Н.Ф., Товстик П.Е. *Изгиб двуслойной балки с нежестким контактом между слоями* // Прикладная математика и механика. – 2011. – Т.75. – №1. – С.112-121.
14. Морозов Н.Ф., Товстик П.Е., Товстик Т.П. *Обобщенная модель Тимошенко-Рейсснера для многослойной пластины* // Изв. РАН. МТТ. – 2016. – №5. – С.22-35.
15. Глаголев В.В., Маркин А.А., Фурсаев А.А. *Моделирование процесса разделения композита с адгезионным слоем* // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2016. – №2. – С.34-44.
16. Абдурахманов А.А., Глаголев В.В. *Модель нахождения напряженно-деформированного состояния адгезионного слоя при нормальном отрыве* // Вестник Чувашского государственного педагогического университета. Серия: Механика предельного состояния. – 2019. – №3(41). – С.30-43.
17. Андреев В.И., Цыбин Н.Ю., Турусов Р.А. *Анализ краевого эффекта касательных напряжений при сдвиге двухконсольной балки* // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2018. – №3(14). – С.180-186.
18. Андреев В.И., Цыбин Н.Ю., Турусов Р.А. *Определение напряженно-деформированного состояния трехслойной балки с применением контактного слоя* // Вестник МГСУ. – 2016. – №4. – С.17-26.
19. Joseph R.P., Wang B.L., Samali B. *Size effects on double cantilever beam fracture mechanics specimen based on strain gradient theory* // Engineering Fracture Mechanics. – 2017. – Vol.169. – Pp.309-320.

20. Лурье С.А., Фам Тьюнг, Соляев Ю.О. *Градиентная модель термоупругости и ее приложения к моделированию тонкослойных композитных структур // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2012. – Т.18. – №3. – С.440-449.*
21. Lurie S., Belov P., Volkov-Bogorodsky D., Tuchkova N. *Nanomechanical modeling of the nanostructures and dispersed composites // Int. J. Comp. Master. Scs. – 2003. – Vol.28(3-4). – Pp.529-539.*
22. Glagolev V.V., Markin A.A. *Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter // International Journal of Solids and Structures. – 2019. – Vol.158. – Pp.141-149.*
23. Berto F., Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A. *Modelling shear loading of a cantilever with a crack-like defect explicitly including linear parameters // International Journal of Solids and Structures. – 2020. – Vol.193-194. – Pp.447-454.*

REFERENCES

1. Bolotin V.V., Novichkov Iu.N. *Mekhanika mnogoslojnykh konstruksij [Mechanics of laminated constructions].* Moskva, Mashinostroenie, 1980, 375 p.
2. Cherepanov G.P. *Mekhanika razrusheniya kompozitsionnykh materialov [Fracture mechanics of composite materials].* Moskva, Nauka, 1974, 640 p.
3. Allen H.G., Feng Z. *Classification of structural sandwich panel behavior.* Mechanics of Sandwich Structures. Springer, Dordrecht, 1998, Pp.1-12.
4. Timoshenko S.P., Vojnovskij-Kriger S. *Plastiny i obolochki [Plates and shells].* Moskva, Fizmatgiz, 1963, 636 p.
5. Fang X., Charalambides P.G. *The fracture mechanics of cantilever beams with an embedded sharp crack under end force loading.* Engineering Fracture Mechanics, 2015, Vol.149, Pp.1-17.
6. Mattei O., Bardella L. *A structural model for plane sandwich beams including transverse core deformability and arbitrary boundary conditions.* Eur. J. Mech. A-Solid, 2016, Vol.58, Pp.172-186.
7. Ustinov K.B. *On separation of a layer from the half-plane: Elastic fixation conditions for a plate equivalent to the layer.* Mechanics of Solids, 2015, Vol.50, Pp.62-80.
8. Fudzii T., Dzako M. *Mekhanika razrusheniya kompozitsionnykh materialov [Fracture Mechanics of Composite Materials].* Moskva, Mir, 1982, 232 p.
9. Evams A.G., Hutchinson J.W. *On the mechanics of delamination and spalling on compressed films.* International Journal of Solids and Structures, 1984, Vol.20, No.5, Pp.455-466.
10. Mattei O., Bardella L. *A structural model for plane sandwich beams including transverse core deformability and arbitrary boundary conditions.* Eur. J. Mech. A-Solid, 2016, Vol.58, Pp.172-186.
11. Panettieri E., Fanteria D., Danzi F. *Delaminations growth in compression after impact test simulations: Influence of cohesive elements parameters on numerical results.* Composite Structures, 2016, Vol.137, Pp.140-147.
12. Panteghini A., Bardella L. *Structural theory and finite element modelling of linear elastic sandwich beams.* Eur. J. Mech. A-Solid, 2017, Vol.61, Pp.393-407.

13. Morozov N.F., Tovstik P.Ye. *Bending of a two-layer beam with non-rigid contact between the layers*. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2011, Vol.75, No.1, Pp.77-84.
14. Morozov N.F., Tovstik P.E., Tovstik T.P. *Generalized Timoshenko–Reissner model for a multilayer plate*. Mechanics of Solids, 2016, Vol.51, Pp.527-537.
15. Glagolev V.V., Markin A.A., Fursaev A.A. *Separation process modeling of composite with adhesive layer*. PNRPU Mechanics Bulletin, 2016, No.2, Pp.34-44.
16. Abdurahmanov A.A., Glagolev V.V. *Model' nakhozhdeniya napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya adgezionnogo sloya pri normal'nom otryve [Model for finding the stress-strain state of the adhesive layer with normal separation]*. Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya, 2019, No.3(41), Pp.30-43.
17. Andreev V.I., Cybin N.Yu., Turusov R.A. *Analiz kraevogo ehffekta kasatel'nykh napryazhenij pri sdvige dvukhkonsol'noj balki [Analysis of the edge effect of shear stresses when shifting a two-console beam]*. Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksij i sooruzhenij, 2018, No.3(14), Pp.180-186.
18. Andreev V.I., Cybin N.Yu., Turusov R.A. *Opredelenie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya trekhslojnoj balki s primeneniem kontaktnogo sloya [Determination of the stress-strain state of a three-layer beam using a contact layer]*. Vestnik MGSU, 2016, No.4, Pp.17-26.
19. Joseph R.P., Wang B.L., Samali B. *Size effects on double cantilever beam fracture mechanics specimen based on strain gradient theory*. Engineering Fracture Mechanics, 2017, Vol.169, Pp.309-320.
20. Lur'e S.A., Fam T'young., Solyaev Yu.O. *Gradientnaya model' termouprugosti i ee prilozheniya k modelirovaniyu tonkoslojnykh kompozitnykh struktur [Gradient model of thermoelasticity and its applications to modeling thin-layer composite structures]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2012, Vol.18, No.3, Pp.440-449.
21. Lurie S., Belov P., Volkov-Bogorodsky D., Tuchkova N. *Nanomechanical modeling of the nanostructures and dispersed composites*. Int. J. Comp. Master. Scs., 2003, Vol.28(3-4), Pp.529-539.
22. Glagolev V.V., Markin A.A. *Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter*. International Journal of Solids and Structures, 2019, Vol.158, Pp.141-149.
23. Berto F., Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A. *Modelling shear loading of a cantilever with a crack-like defect explicitly including linear parameters*. International Journal of Solids and Structures, 2020, Vol.193-194, Pp.447-454.

Поступила в редакцию 06 апреля 2020 года.

Сведения об авторах:

Абдурахманов Амир Абдурауфович – асп., Кафедра «Вычислительная механика и математика», Тульский государственный университет, г. Тула, Россия; e-mail: dragon.1993@inbox.ru

Богачева Виктория Эдуардовна – студ., Кафедра «Вычислительная механика и математика», Тульский государственный университет, г. Тула, Россия; e-mail: v.boga4eva2014@yandex.ru

Глаголев Вадим Вадимович – д.ф.-м.н., проф., зав. каф. «Вычислительная механика и математика», Тульский государственный университет, г. Тула, Россия; e-mail: vadim@tsu.tula.ru