

УДК 539.3

DOI 10.33113/mkmc.ras.2020.26.02.269\_281.09

## КОНТИНУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ СЕТЧАТОЙ КОМПОЗИТНОЙ СТРУКТУРЫ

Азаров А.В.<sup>1,2</sup>, Разин А.Ф.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия*

<sup>2</sup>*АО «Центральный НИИ специального машиностроения», г. Хотьково, Россия*

### АННОТАЦИЯ

Предложена континуальная модель сетчатой композитной структуры цилиндрической оболочки, состоящей из системы спиральных и кольцевых ребер, изготовленных методом непрерывной намотки на станках с программным управлением. Такие оболочки используются в несущих конструкциях ракет-носителей и космических аппаратов. Модель основана на анализе напряженно-деформированного состояния элементарной ячейки сетчатой структуры, образованной ребрами, и последующем осреднении результатов для регулярной системы ребер. Рассмотрена симметричная ячейка, состоящая из пары спиральных ребер и кольцевого ребра, проходящего через середину отрезков спиральных ребер между узлами их пересечения. Ячейка нагружается нормальными и касательными напряжениями, действующими в плоскости структуры. Определены силы и моменты, действующие в сечениях ребер, перемещения ребер, и получены коэффициенты жесткости для структуры, учитывающие осевую деформацию и изгиб ребер в плоскости структуры. Полученные результаты позволяют записать соотношения упругости прикладной теории сетчатых композитных оболочек, включающие мембранные и изгибные коэффициенты жесткости. Статические и геометрические соотношения при этом имеют традиционную форму и учет изгибной жесткости ребер не приводит к повышению порядка уравнений. Также определены изгибные напряжения в ребрах, которые могут вносить существенный вклад в общие напряжения, действующие в ребрах сетчатой структуры. Полученные результаты сопоставлены с результатами расчета жесткостных характеристик сетчатой структуры методом конечных элементов и результатами испытаний элемента сетчатой структуры на сжатие. Полученные выражения для жесткостных характеристик сетчатой структуры и напряжений в ребрах могут быть использованы при проектных расчетах композитных сетчатых конструкций.

**Ключевые слова:** композитные материалы; сетчатые композитные конструкции; коэффициенты жесткости сетчатой структуры

## CONTINUUM MODEL OF THE LATTICE COMPOSITE STRUCTURE

Azarov A.V.<sup>1,2</sup>, Razin A.F.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*

<sup>2</sup>*Central Research Institute for Special Machinery, Khot'kovo, Russia*

### ABSTRACT

The continuum model of the lattice composite structure of a cylindrical shell consisting of a system of helical and hoop ribs made by automated filament winding is proposed and

discussed. Such lattice shells are used as load-bearing elements in rocket and spacecraft structures. The model is based on the analysis of the stress-strain state of the elementary lattice cell formed by the ribs and the averaging of the obtained results for a regular system of ribs. The symmetric cell consisting of a pair of helical ribs and a hoop rib passing through the middle of the segments of helical ribs between the nodes of their intersection is considered. The cell is loaded with normal and tangential stresses acting in the plane of the structure. The forces and moments acting in the ribs and the displacements of the ribs are determined and stiffness coefficients of the lattice structure allowing for axial strains and bending of the ribs in the plane of the structure are obtained. The obtained results allow us to write down the constitutive equations of the applied theory of lattice composite shells, including membrane and bending stiffness coefficients. The equilibrium and kinematic equations retain the traditional shape and taking into account the bending stiffness of the ribs does not lead to an increase in the order of equations. Bending stresses in the ribs are also determined. Bending stresses can make a significant contribution to the total stresses acting in the ribs of the lattice structure. The obtained analytical results are compared with the results of the finite element analysis of the lattice structure stiffness and the compression test results of the lattice element. The obtained expressions for the stiffness coefficients of the lattice structure and the stresses in the ribs can be used for the design and analysis of composite lattice structures.

**Keywords:** composite materials; composite lattice structures; stiffness coefficients of lattice structures

## ВВЕДЕНИЕ

Композитные сетчатые конструкции, образованные из систем ребер, изготавливаемых методом непрерывной намотки на станках с программным управлением, обладают высокой степенью весового совершенства и широко применяются в отечественной ракетно-космической технике [1]. Композитная сетчатая конструкция имеет форму цилиндрической или конической оболочки и состоит из системы спиральных ребер и кольцевых ребер, проходящих по серединам участков между узлами пересечения спиральных ребер (рис.1).

При этом сетчатая структура состоит из системы треугольных и шестиугольных ячеек, образованных ребрами, высота сечения которых, как правило, значительно больше ширины. При осевом сжатии и изгибе сетчатой конструкции спиральные ребра, образующие шестиугольные ячейки, изгибаются в плоскости структуры, что влияет на эффективную жесткость конструкции. Проблема учета изгиба ребер в рамках континуальной модели структуры рассматривалась в работах [2-5] в которых для описания сетчатых оболочек использовались различные варианты неклассической (моментной) теории упругости. Такой подход приводит к повышению порядка уравнений по отношению к уравнениям классической теории оболочек. При этом более высокий порядок уравнений связан с появлением краевых эффектов, локализованных в окрестности края оболочки и не влияющих на ее напряженно-деформированное состояние вдали от края.

В настоящей работе предлагается дискретно-континуальная модель, основанная на анализе напряженно-деформированного состояния ячейки сетчатой структуры, образованной спиральными и кольцевыми ребрами и последующем осреднении, не повышающая порядка уравнений, описывающих поведение сетчатых конструкций. Для расчета структуры, образованной спиральными ребрами, рассматриваемая модель использована в [6].

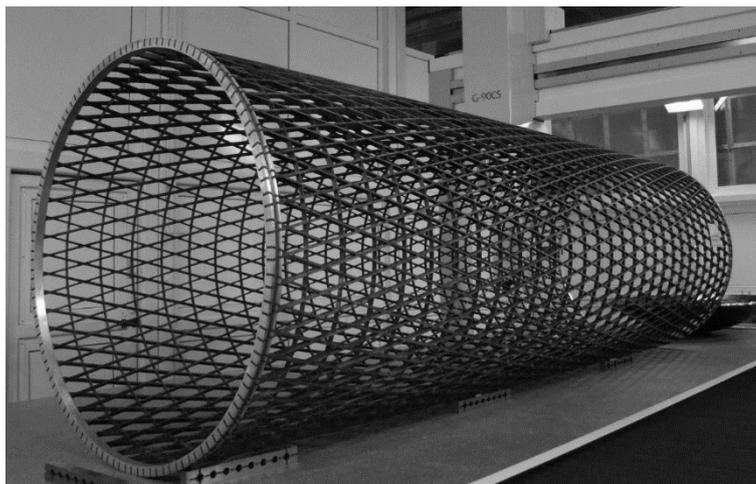


Рис.1. Цилиндрическая сетчатая композитная оболочка.

### 1. ЭФФЕКТИВНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ЖЕСТКОСТИ СЕТЧАТОЙ СТРУКТУРЫ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

Рассмотрим элементарную ячейку сетчатой структуры, показанную на рис.2, и выделим из нее фрагмент, включающий элемент спирального ребра  $OK$  (рис.3) и являющийся элементом симметричной структуры, представленной на рис.2. Структура имеет единичную толщину и нагружена нормальными напряжениями  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  (рис.3).

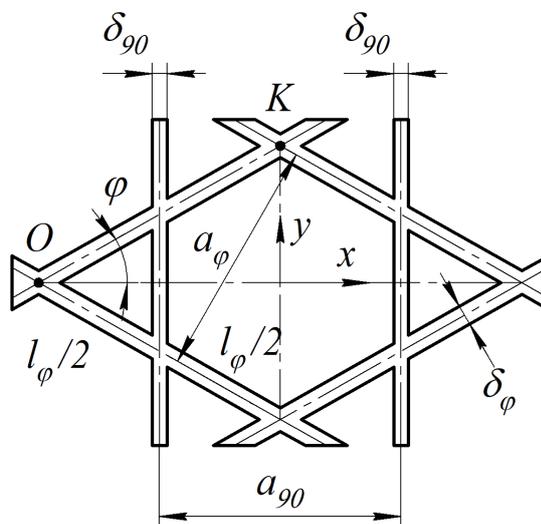


Рис.2. Геометрия сетчатой структуры.

Закрепим фрагмент ячейки в точке  $O$ , полагая, что перемещения и угол поворота в этой точке равны нулю. Статические соотношения, связывающие напряжения  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  с силами, действующими в точках  $K$  и  $R$  ребер имеют вид (рис.3)

$$\sigma_x l_\phi s = p_\phi^K c - q_\phi^K s, \quad \sigma_y l_\phi c = p_\phi^K s + q_\phi^K c + p_{90}, \tag{1}$$

где  $s = \sin \varphi$ ,  $c = \cos \varphi$  и  $l_\varphi$  – длина элемента спирального ребра. Введем средние деформации ячейки  $\varepsilon_x$  и  $\varepsilon_y$ . Тогда для перемещений точки  $K$  в направлении осей  $x, y$

$$u_x^K = \varepsilon_x l_\varphi c, \quad u_y^K = \varepsilon_y l_\varphi s.$$

Отнесем спиральное ребро к координатам  $t, n$  (рис.3). В этой системе координат перемещение точки  $K$  спирального ребра

$$\begin{aligned} u_t^K &= u_x^K c + u_y^K s = (\varepsilon_x c^2 + \varepsilon_y s^2) l_\varphi, \\ u_n^K &= u_y^K c - u_x^K s = (\varepsilon_y - \varepsilon_x) l_\varphi s c. \end{aligned} \quad (2)$$

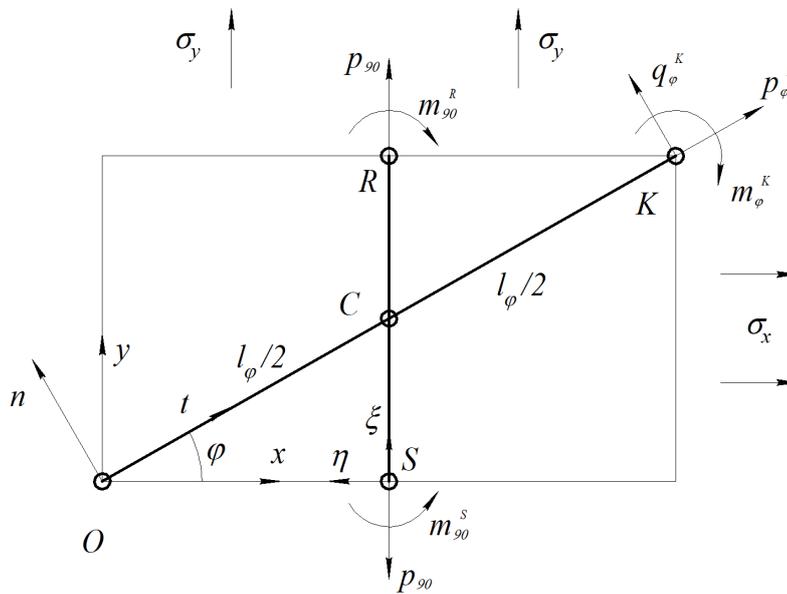


Рис.3. Элементарная ячейка сетчатой структуры, нагруженная нормальными напряжениями.

Запишем осредненные в интегральном смысле соотношения упругости в координатах  $x, y$ . Так как структура является симметричной (рис.2), эти соотношения соответствуют ортотропному материалу, т.е.

$$\sigma_x = A_{11}\varepsilon_x + A_{12}\varepsilon_y, \quad \sigma_y = A_{21}\varepsilon_x + A_{22}\varepsilon_y. \quad (3)$$

Задачей последующего анализа является определение коэффициентов жесткости  $A_{mn}$ , входящих в соотношение (3).

Рассмотрим элемент кольцевого ребра  $SR$  (рис.3). Поскольку в точках  $S$  и  $R$  должны выполняться условия симметрии, поперечные силы в этих ребрах и, следовательно, во всем ребре, равны нулю. Таким образом, ребро  $SR$  находится в условиях одноосного растяжения и чистого изгиба. Ввиду того, что участки  $SC$  и  $CR$  ребра идентичны, осевая сила постоянна по длине ребра и связана с деформацией равенством

$$p_{90} = B_{90}\varepsilon_y, \quad (4)$$

где  $B_{90}$  – коэффициент осевой жесткости кольцевого ребра. В точке  $C$  кольцевое ребро передает на спиральное ребро сосредоточенный изгибающий момент  $m_C = m_{90}^R - m_{90}^S$ . Рассмотрим спиральное ребро  $OK$ . Поскольку в точке  $C$  на это

ребро действует только момент  $m_C$ , осевая сила в этом ребре постоянна по его длине и имеет вид

$$p_\varphi^K = B_\varphi (\varepsilon_x c^2 + \varepsilon_y s^2), \quad (5)$$

где  $B_\varphi$  – коэффициент осевой жесткости спирального ребра. Рассмотрим участок  $OC$  спирального ребра. Изгибающий момент на этом участке выражается через поперечную силу  $q_\varphi^K$  и момент  $m_\varphi^K$ , действующие в точке  $K$ , и момент  $m_C$  следующим образом

$$m_\varphi^{OC}(t) = m_\varphi^K - q_\varphi^K (l_\varphi - t) + m_C.$$

Интегрируя, найдем угол поворота и прогиб ребра

$$\theta_\varphi^{OC}(t) = \frac{1}{D_\varphi} \int_0^t m_\varphi^{OC}(t) dt = \frac{1}{D_\varphi} \left[ m_\varphi^K t - q_\varphi^K \left( l_\varphi t - \frac{t^2}{2} \right) + m_C t \right],$$

$$u_n^{OC}(t) = - \int_0^t \theta_\varphi^{OC}(t) dt = - \frac{1}{D_\varphi} \left[ m_\varphi^K \frac{t^2}{2} - q_\varphi^K \left( l_\varphi \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} \right) + m_C \frac{t^2}{2} \right].$$

Здесь учтено, что в точке  $O$  (рис.2)  $\theta_\varphi^{OC}(t=0) = 0$  и  $u_n^{OC}(t=0) = 0$ . Через  $D_\varphi$  обозначен коэффициент изгибной жесткости спирального ребра. В точке  $C$  ( $t = l_\varphi/2$ ) имеем

$$\theta_\varphi^C = \frac{l_\varphi}{2D_\varphi} \left( m_\varphi^K - \frac{3}{4} q_\varphi^K l_\varphi + m_C \right), \quad u_n^C(t) = - \frac{l_\varphi^2}{8D_\varphi} \left( m_\varphi^K - \frac{5}{6} q_\varphi^K l_\varphi + m_C \right). \quad (6)$$

Рассмотрим участок  $CK$  спирального ребра (рис.3). Изгибающий момент и угол поворота на этом участке

$$m_\varphi^{CK}(t) = m_\varphi^K - q_\varphi^K (l_\varphi - t), \quad \theta_\varphi^{CK}(t) = \frac{1}{D_\varphi} \left[ m_\varphi^K t - q_\varphi^K \left( l_\varphi t - \frac{t^2}{2} \right) \right] + C_1.$$

Постоянная  $C_1$  определяется из условия непрерывности угла поворота сечения ребра в точке  $C$  ( $t = l_\varphi/2$ ), т.е.  $\theta_\varphi^{CK}(l_\varphi/2) = \theta_\varphi^C$ . Учитывая первое равенство (6) получим

$$\theta_\varphi^{CK}(t) = \frac{1}{D_\varphi} \left[ m_\varphi^K t - q_\varphi^K \left( l_\varphi t - \frac{t^2}{2} \right) + m_C \frac{l_\varphi}{2} \right]. \quad (7)$$

Так как структура является симметричной, угол поворота спирального ребра в точке  $K$  ( $t = l_\varphi/2$ ) равен углу поворота в точке  $O$  (рис.3), т.е.  $\theta_\varphi^O = \theta_\varphi^K = 0$ . Тогда из равенства (7) имеем

$$m_\varphi^K - q_\varphi^K \frac{l_\varphi}{2} + \frac{1}{2} m_C = 0. \quad (8)$$

Для определения момента  $m_\varphi^K$  найдем прогиб спирального ребра на участке  $CK$  (рис.3). Интегрируя равенство (7), получим

$$u_n^{CK}(t) = - \frac{1}{D_\varphi} \left[ m_\varphi^K \frac{t^2}{2} - q_\varphi^K \left( l_\varphi \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} \right) + \frac{1}{2} m_C l_\varphi t \right] + C_2.$$

Постоянная  $C_2$  определяется из условия непрерывности прогиба в точке  $C$  ( $t = l_\varphi/2$ , рис.3), т.е.  $u_n^{CK}(l_\varphi/2) = u_n^C$ . Учитывая второе равенство (6), окончательно найдем

$$u_\varphi^{CK}(t) = -\frac{1}{D_\varphi} \left[ m_\varphi^K \frac{t^2}{2} - q_\varphi^K \left( l_\varphi \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} \right) + \frac{l_\varphi}{2} m_C \left( t - \frac{l_\varphi}{4} \right) \right].$$

В точке  $K$  ( $t = l_\varphi$ ) имеем

$$u_\varphi^K(t) = -\frac{l_\varphi^2}{D_\varphi} \left( \frac{1}{2} m_\varphi^K - \frac{1}{3} q_\varphi^K l_\varphi + \frac{3}{8} m_C \right).$$

Подставляя сюда  $u_n^K$  из второго равенства (2), получим

$$m_\varphi^K = \frac{1}{4} m_C + \frac{6D_\varphi}{l_\varphi} (\varepsilon_y - \varepsilon_x) sc. \quad (9)$$

Тогда равенство (8) дает

$$q_\varphi^K = \frac{3}{2l_\varphi} m_C + \frac{12D_\varphi}{l_\varphi^2} (\varepsilon_y - \varepsilon_x) sc. \quad (10)$$

Для определения реактивного момента  $m_C$  рассмотрим кольцевое ребро  $SR$ , находящееся в условиях осевого нагружения силой  $P_{90}$  (4) и чистого изгиба моментами  $m_{90}^S$  и  $m_{90}^R$  (рис.3). Отнесем ребро к координатам  $\xi, \eta$  и рассмотрим участок  $SC$  (рис.3). Учитывая, что угол поворота сечения ребра в точке  $s$  равен нулю в силу условия симметрии, получим

$$\theta_{90}^{SC}(\xi) = \frac{m_{90}^S}{D_{90}} \xi,$$

где  $D_{90}$  – коэффициент изгибной жесткости кольцевого ребра. В точке  $C$  ( $\xi = l_\varphi/2$ ) имеем

$$\theta_{90}^C(\xi) = \frac{m_{90}^S l_\varphi s}{2D_{90}}. \quad (11)$$

Рассмотрим участок  $CR$ , для которого

$$\theta_{90}^{CR}(\xi) = \frac{m_{90}^R}{D_{90}} \xi + C_3.$$

Постоянная  $C_3$  определяется из условия непрерывности угла поворота в точке  $C$ , т.е.  $\theta_{90}^{CR}(\xi = l_\varphi s/2) = \theta_{90}^C$ . Учитывая равенство (11), окончательно найдем

$$\theta_{90}^{CR} = \frac{1}{D_{90}} \left[ m_{90}^R \xi - \frac{1}{2} l_\varphi s (m_{90}^R - m_{90}^S) \right].$$

Из условия симметрии в точке  $R$  ( $\xi = l_\varphi s$ , рис.2) имеем  $\theta_{90}^{CR} = 0$ . Отсюда следует  $m_{90}^R + m_{90}^S = 0$ , т.е.  $m_{90}^S = -m_{90}^R$ . Остается удовлетворить условия совместного поворота сечений спирального и кольцевого ребер в точке их пересечения  $C$  (рис.3). Используя равенства (6) и (11), получим

$$\frac{l_\varphi}{2D_\varphi} \left( m_\varphi^K - \frac{3}{4} q_\varphi^K l_\varphi + m_C \right) = \frac{m_{90}^S l_\varphi s}{2D_{90}}.$$

Подставляя сюда выражения (9) и (10) и учитывая, что в силу симметрии кольцевого ребра относительно точки  $C$  (рис.3)  $m_{90}^S = -m_{90}^R$ , и следовательно  $m_C = m_{90}^R - m_{90}^S = -2m_{90}^S$ , окончательно найдем

$$m_{90}^S = -m_{90}^R = \frac{12kD_\varphi (\varepsilon_y - \varepsilon_x) cs}{(2+k)l_\varphi}, \quad k = \frac{D_{90}}{2D_\varphi s}. \quad (12)$$

В результате, равенства (9) и (10) дают

$$m_\varphi^K = -m_{90}^R = \frac{12(1+k)D_\varphi (\varepsilon_y - \varepsilon_x) cs}{(2+k)l_\varphi}, \quad q_\varphi^K = \frac{24(1+2k)D_\varphi (\varepsilon_y - \varepsilon_x) cs}{(2+k)l_\varphi^2}. \quad (13)$$

Подставляя выражения (4), (5) и (12) для  $p_{90}$ ,  $p_\varphi^K$  и  $q_\varphi^K$  в статические соотношения (1), получим соотношения упругости (3), в которых

$$A_{11} = \frac{B_\varphi c}{l_\varphi s} (c^2 + \lambda s^2), \quad A_{11} = A_{21} = \frac{B_\varphi cs}{l_\varphi} (1 - \lambda), \quad (14)$$

$$A_{22} = \frac{B_\varphi s}{l_\varphi c} (s^2 + \lambda c^2 + B_{90}), \quad \lambda = \frac{24(1+2k)D_\varphi}{(2+k)B_\varphi l_\varphi^2}, \quad k = \frac{D_{90}}{2D_\varphi s}.$$

Для ребра прямоугольного сечения с высотой  $h$  (толщиной структуры) и шириной  $\delta$  (рис.2) коэффициенты жесткости имеют вид

$$B_\varphi = E_\varphi \delta_\varphi, \quad B_{90} = E_{90} \delta_{90}, \quad D_\varphi = \frac{1}{12} E_\varphi \delta_\varphi^3, \quad D_{90} = \frac{1}{12} E_{90} \delta_{90}^3,$$

где  $E$  – модуль упругости ребер, а индексы « $\varphi$ » и «90» соответствуют спиральным и кольцевым ребрам. Введем относительные толщины ребер  $\bar{\delta}_\varphi = \delta_\varphi / a_\varphi$  и  $\bar{\delta}_{90} = \delta_{90} / a_{90}$ , где  $a_\varphi = 2l_\varphi cs$  и  $a_{90} = l_\varphi c$ . Преобразуя равенства (14), получим

$$A_{11} = 2E_\varphi \bar{\delta}_\varphi c^2 (c^2 + \lambda s^2), \quad A_{11} = A_{21} = 2E_\varphi \bar{\delta}_\varphi (1 - \lambda) c^2 s^2,$$

$$A_{22} = 2E_\varphi \bar{\delta}_\varphi s^2 (s^2 + \lambda c^2) + E_{90} \bar{\delta}_{90}, \quad \lambda = \frac{8(1+2k)\bar{\delta}_\varphi^2}{2+k}, \quad k = \frac{E_{90}}{2E_\varphi s} \left( \frac{\delta_{90}}{\delta_\varphi} \right)^3.$$

Эффективные упругие постоянные структуры имеют вид

$$E_x = A_{11} - \frac{A_{12}^2}{A_{22}} = \frac{2E_\varphi \bar{\delta}_\varphi c^2 [2E_\varphi \bar{\delta}_\varphi \lambda s^2 + E_{90} \bar{\delta}_{90} (c^2 + \lambda s^2)]}{2E_\varphi \bar{\delta}_\varphi s^2 (s^2 + \lambda c^2) + E_{90} \bar{\delta}_{90}},$$

$$E_y = A_{22} - \frac{A_{12}^2}{A_{11}} = E_{90} \bar{\delta}_{90} + \frac{2E_\varphi \bar{\delta}_\varphi \lambda s}{c^2 + \lambda s^2}, \quad (15)$$

$$\nu_{xy} = \frac{A_{12}}{A_{11}} = \frac{(1-\lambda)s^2}{c^2 + \lambda s^2}, \quad \nu_{yx} = \nu_{xy} \frac{E_x}{E_y}.$$

В качестве примера рассмотрим структуру с параметрами

$$E_\varphi = E_{90} = 151 \text{ МПа}, \quad \delta_\varphi = 2,55 \text{ мм}, \quad \delta_{90} = 1,7 \text{ мм},$$

$$\varphi = 19,2^\circ, \quad l_\varphi = 49,6 \text{ мм}, \quad a_\varphi = 30,65 \text{ мм}, \quad a_{90} = 52,5 \text{ мм}. \quad (16)$$

Предположим, что структура состоит только из симметричных спиральных ребер, т.е.  $\delta_{90} = 0$ . Тогда  $k = 0$  и равенства (15) упрощаются следующим образом

$$E_x = \frac{2E_\varphi \bar{\delta}_\varphi c^2}{s^2 + \lambda c^2}, \quad E_y = \frac{2E_\varphi \bar{\delta}_\varphi \lambda s}{c^2 + \lambda s^2},$$

$$\nu_{yx} = \frac{(1 - \lambda)c^2}{s^2 + \lambda c^2}, \quad \lambda = 4\bar{\delta}_\varphi^2 c^2 s^2.$$

Если не учитывать изгибную жесткость ребер, то следует принять  $\lambda = 0$ . Тогда  $E_x = E_y = 0$ , т.е. структура, состоящая из спиральных ребер, не имеющих изгибной жесткости, является геометрически изменяемой. При учете изгибной жесткости получим  $\lambda = 0,00264$  и  $E_x = 536 \text{ МПа}$ . Расчет с помощью метода конечных элементов дает  $E_x = 526 \text{ МПа}$ , а эксперимент (рис.4) –  $E_x = 524 \text{ МПа}$ .



Рис.4. Испытание элемента сетчатой структуры на сжатие.

Рассмотрим структуру с параметрами (16), состоящую из спиральных и кольцевых ребер. Расчет по формулам (15) дает  $E_x = 19,1 \text{ ГПа}$ ,  $E_y = 4,9 \text{ ГПа}$ ,  $\nu_{xy} = 0,12$ ,  $\nu_{yx} = 0,467$ . Если не учитывать изгибную жесткость ребер, приняв  $\lambda = 0$ , получим  $E_x = 19,4 \text{ ГПа}$ . Согласно расчету методом конечных элементов,  $E_x = 18 \text{ ГПа}$ , что на 6% отличается от полученного решения (15).

Найдем напряжения в ребрах. Осевые и максимальные изгибные напряжения в спиральных ребрах определяются равенствами (5) и (13), согласно которым

$$\sigma_{\varphi}^a = E_{\varphi} (\varepsilon_x c^2 + \varepsilon_y s^2),$$

$$\sigma_{\varphi}^b = \frac{6m_{\varphi}^K}{\delta_{\varphi}^2} = \frac{6(1+k)E_{\varphi}\delta_{\varphi}cs}{(2+k)l_{\varphi}} (\varepsilon_y - \varepsilon_x).$$

Принимая в соотношениях (3)  $\sigma_x = \sigma$  и  $\sigma_y = 0$  и определяя из этих соотношений деформации  $\varepsilon_x$  и  $\varepsilon_y$ , окончательно получим  $\sigma_{\varphi}^a = 6,76\sigma$ ,  $\sigma_{\varphi}^b = 0,61\sigma$ . Таким образом, изгибные напряжения составляют 9% от осевых. Расчет методом конечных элементов дает  $\sigma_{\varphi}^a = 7,1\sigma$ ,  $\sigma_{\varphi}^b = 0,66\sigma$ . Напряжения в кольцевых ребрах определяются равенствами (4) и (12), т.е.

$$\sigma_{90}^a = E_{90}\varepsilon_y, \quad \sigma_{90}^b = \frac{6m_{90}^R}{\delta_{90}^2} = \frac{16E_{\varphi}\delta_{\varphi}^3cs}{(2+k)l_{\varphi}\delta_{90}^2} (\varepsilon_y - \varepsilon_x).$$

Для рассматриваемой структуры найдем  $\sigma_{90}^a = -3,68\sigma$  и  $\sigma_{90}^b = 0,25\sigma$ . Расчет методом конечных элементов дает  $\sigma_{90}^a = -3,48\sigma$  и  $\sigma_{90}^b = 0,23\sigma$ . Таким образом, изгибные напряжения в кольцевых ребрах составляют около 7% от осевых.

## 2. ЭФФЕКТИВНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ ЖЕСТКОСТИ СЕТЧАТОЙ СТРУКТУРЫ ПРИ СДВИГЕ

Рассмотрим сдвиг сетчатой структуры, элемент которой показан на рис.5. Условия статической эквивалентности напряжения  $\tau_{xy}$  и сил в ребрах, аналогичные равенствам (1) имеют вид

$$\tau_{xy}l_{\varphi}c = p_{\varphi}^Kc - q_{\varphi}^Ks - q_{90}, \quad \tau_{xy}l_{\varphi}s = p_{\varphi}^Ks + q_{\varphi}^Kc.$$

Отсюда получаем

$$p_{\varphi}^K = \tau_{xy}l_{\varphi} + q_{90}c, \quad q_{\varphi}^K = -q_{90}s. \quad (17)$$

Деформация сдвига имеет вид

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{l_{\varphi}} \left( \frac{u_x^K}{s} + \frac{u_y^K}{c} \right), \quad (18)$$

где согласно равенствам (2)

$$u_x^K = u_t^Kc - u_n^Ks, \quad u_y^K = u_t^Ks + u_n^Kc.$$

Подстановка в соотношение (18) дает

$$\varepsilon_{xy} = \frac{u_t^K}{l_{\varphi}cs}. \quad (19)$$

Как и ранее, закрепим точку  $O$  (рис.5) и рассмотрим спиральное ребро  $OK$ . Из условий обратной симметрии следует, что в точках  $S$  и  $R$  кольцевого ребра действуют только поперечные силы  $q_{90}$ . Аналогично в точках  $O$  и  $K$  спирального ребра действуют поперечные силы  $q_{\varphi}$  и продольные силы  $p_{\varphi}$ . Взаимодействие спирального и кольцевого ребер в точке пересечения  $C$  (рис.5) осуществляется через реактивный момент  $m_C$ . При действии осевой силы  $p_{\varphi}$  осевое перемещение точки  $K$  спирального ребра  $u_t^K = p_{\varphi}l_{\varphi}/B_{\varphi}$ . Тогда из уравнения (19) имеем

$$\varepsilon_{xy} = \frac{p_\varphi}{B_\varphi c s}. \quad (20)$$

Задачей расчета является определение коэффициента жесткости в соотношении упругости

$$\tau_{xy} = A_{33} \varepsilon_{xy}. \quad (21)$$

Рассмотрим кольцевое ребро  $SR$  (рис.5). Из условия равновесия получим

$$m_C = l_\varphi s q_{90}. \quad (22)$$

Отнесем ребро к координатам  $\xi, \eta$  (рис.5). Поскольку в точке  $S$  момент равен нулю, имеем  $m_{90}(\xi) = q_{90} \xi$ . Тогда угол поворота сечения

$$\theta_{90}(\xi) = \frac{q_{90}}{2D_{90}} \xi^2 + \theta_{90}^S, \quad (23)$$

где  $\theta_{90}^S$  – угол поворота в точке  $S$ .

Найдем угол поворота в точке  $C$  ( $\xi = l_\varphi s/2$ )

$$\theta_{90}^C = \frac{q_{90} l_\varphi^2 s^2}{8D_{90}} + \theta_{90}^S. \quad (24)$$

Интегрируя равенство (23), получим прогиб кольцевого ребра в виде

$$u_\eta(\xi) = -\frac{q_{90}}{6D_{90}} \xi^3 - \theta_{90}^S \xi.$$

При этом учтено, что в силу симметрии сетчатой структуры прогиб в точке  $S$  ( $\xi = 0$ ) равен нулю. В точке  $C$  получим

$$u_\eta^C = -\frac{l_\varphi s}{2} \left( \frac{q_{90} l_\varphi^2 s^2}{24D_{90}} + \theta_{90}^S \right). \quad (25)$$

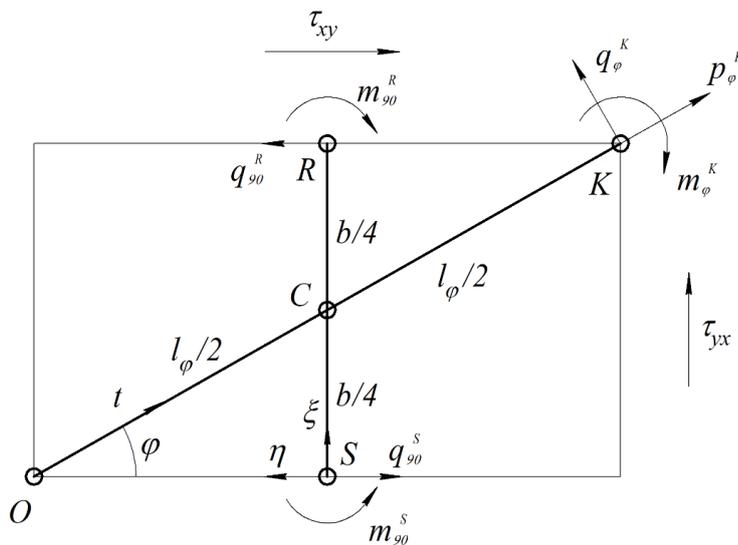


Рис.5. Элементарная ячейка сетчатой структуры, нагруженная касательными напряжениями.

Рассмотрим спиральное ребро, отнесенное к координатам  $t, n$  (рис.5). Для участка  $OC$  имеем

$$\begin{aligned} p_{\varphi}^{OC}(t) &= p_{\varphi}^K, \quad q_{\varphi}^{OC}(t) = q_{\varphi}^K, \\ m_{\varphi}^{OC}(t) &= -q_{\varphi}^K(l_{\varphi} - t) - m_C. \end{aligned} \quad (26)$$

С учетом второго равенства (17) и формулы (22) последнее уравнение (26) принимает вид

$$m_{\varphi}^{OC}(t) = -q_{90}ts. \quad (27)$$

Интегрируя равенства (26) и (27), запишем выражения для перемещений и угла поворота участка спирального ребра  $OC$

$$u_t^{OC}(t) = \frac{p_{\varphi}^K}{B_{\varphi}}t, \quad \theta_t^{OC}(t) = -\frac{q_{90}s}{2D_{\varphi}}t^2, \quad u_n^{OC}(t) = \frac{q_{90}s}{6D_{\varphi}}t^3.$$

В точке  $C$  ( $t = l_{\varphi}/2$ ) имеем

$$u_t^C = \frac{p_{\varphi}^K l_{\varphi}}{2B_{\varphi}}, \quad \theta_t^C = -\frac{q_{90}l_{\varphi}^2 s}{8D_{\varphi}}, \quad u_n^C = \frac{q_{90}l_{\varphi}^3 s}{48D_{\varphi}}. \quad (28)$$

Воспользуемся условиями совместности деформаций спирального и кольцевого ребер в точке  $C$ . Из условия равенства углов поворота  $\theta_{90}^C = \theta_{\varphi}^C$  с учетом соотношений (24) и (28) найдем

$$\theta_{90}^S = -\frac{q_{90}l_{\varphi}s}{8} \left( \frac{1}{D_{\varphi}} + \frac{s}{D_{90}} \right).$$

Тогда выражение (25) принимает вид

$$u_n^C = -\frac{1}{8}q_{90}l_{\varphi}^3 s^2 \left( \frac{1}{2D_{\varphi}} + \frac{s}{3D_{90}} \right). \quad (29)$$

Условие совместности перемещений спирального и кольцевого ребер в точке  $C$  можно записать следующим образом

$$u_t^C c - u_n^C s = u_n^C.$$

Используя равенства (28) и (29), получим следующее уравнение, связывающее  $q_{90}$  и  $p_{\varphi}$

$$p_{\varphi}k_1 + q_{90}(1 + k_2) = 0,$$

где

$$k_1 = \frac{12D_{90}c}{B_{\varphi}l_{\varphi}^2 s^3}, \quad k_2 = \frac{D_{90}}{D_{\varphi}s}.$$

Воспользовавшись первым уравнением (17) и равенством (20), получим соотношения упругости (21), в котором коэффициент жесткости

$$A_{33} = \frac{B_{\varphi}cs}{l_{\varphi}} \left( 1 + \frac{k_1 c}{1 + k_2} \right)$$

или

$$A_{33} = G_{xy} = 2E_{\varphi}\bar{\delta}_{\varphi}c^2 s^2 \left( 1 + \frac{k_1 c}{1 + k_2} \right), \quad (30)$$

где  $G_{xy}$  – эффективный модуль сдвига структуры и

$$k_1 = \frac{E_{90} \delta_{90}^3 c}{E_{\varphi} l_{\varphi}^2 \delta_{\varphi} s^3}, \quad k_2 = \frac{E_{90}}{E_{\varphi} s} \left( \frac{\delta_{90}}{\delta_{\varphi}} \right)^3.$$

Для структуры с параметрами (16) равенство (30) дает  $G_{xy} = 2,44$  ГПа. Если не учитывать изгибные жесткости ребер приняв  $k_1 = k_2 = 0$ , получим

$$G_{xy} = 2E_{\varphi} \bar{\delta}_{\varphi} c^2 s^2.$$

Для структуры с параметрами (16) найдем  $G_{xy} = 2,42$  ГПа. Таким образом, учет изгибной жесткости практически не влияет на эффективную жесткость структуры при сдвиге.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты позволяют записать соотношения упругости прикладной теории сетчатых композитных оболочек, включающие мембранные и изгибные коэффициенты жесткости

$$B_{mn} = A_{mn} h, \quad D_{mn} = A_{mn} \frac{h^3}{12},$$

где  $h$  – толщина сетчатой оболочки. Статические и геометрические соотношения при этом имеют традиционную форму и учет изгибной жесткости ребер не приводит к повышению порядка уравнений.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев В.В., Барынин В.А., Разин А.Ф., Петроковский С.А., Халиманович В.И. *Анизогридные композитные сетчатые конструкции – разработка и приложение к космической технике* // Композиты и наноструктуры. – 2009. – №3. – С.38-50.
2. Пшеничных Г.И. Теория тонких упругих сетчатых оболочек и пластинок. – М.: Наука, 1982. – 352 с.
3. Бунаков В.А., Протасов В.Д. *Сетчатые композитные конструкции* // Механика и научно-технический прогресс. – 1988. – Т.4. – С.273-287.
4. Бунаков В.А., Федоров Л.В. *Применение микрополярной теории упругости к описанию сетчатых структур* // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1994. – №4. – С.148-154.
5. Азаров А.В. *К теории сетчатых композитных оболочек* // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2013. – №1. – С.71-83.
6. Азаров А.В. *Континуальная модель композитных сетчатых оболочек, образованных системой спиральных ребер* // Композиты и наноструктуры. – 2015. – Т.7. – №3(27). – С.151-161.

### REFERENCES

1. Vasiliev V.V., Barynin V.A., Razin A.F., Petrokovskij S.A., Khalimanovich V.I. *Anizogridnye kompozitnye setchatye konstruksii – razrabotka i prilozhenie k kosmicheskoy tekhnike [Anisogrid composite lattice structures – development and applications for spacecrafts]*. Kompozity i nanostruktury, 2009, No.3, Pp.38-50.

2. Pshenichnov G.I. *Teoriya tonkikh uprugikh setchatykh obolochek i plastinok [Theory of thin lattice shells and plates]*. Moskva, Nauka, 1982, 352 p.
3. Bunakov V.A., Protasov V.D. *Setchatye kompozitnye konstruksii [Composite lattice structures]*. Mekhanika i nauchno-tehnicheskij progress, 1988, Vol.4, Pp.273-287.
4. Bunakov V.A., Fedorov L.V. *Primenenie mikropolyarnoj teorii uprugosti k opisaniyu setchatykh struktur [Application of the micropolar theory of elasticity to the lattice structures]*. Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela, 1994, No.4, Pp.148-154.
5. Azarov A.V. *Theory of composite grid shells*. Mechanics of Solids, 2013, Vol.48, No.1, Pp.57-67.
6. Azarov A.V. *Kontinual'naya model' kompozitnykh setchatykh obolochek, obrazovannykh sistemoy spiral'nykh reber [Continuum model of composite lattice shells formed by helical ribs]*. Kompozity i nanostruktury, 2015, Vol.7, No.3(27), Pp.151-161.

Поступила в редакцию 07 мая 2020 года.

---

Сведения об авторах:

Азаров Андрей Валерьевич – к.т.н., доц., Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия; e-mail: [azarov@anisoprint.com](mailto:azarov@anisoprint.com)

Разин Александр Федорович – д.т.н., ген. дир., гл. конструктор, АО «Центральный научно-исследовательский институт специального машиностроения», г. Хотьково, Россия; e-mail: [razin@crism-cat.ru](mailto:razin@crism-cat.ru)