

УДК 539.4

DOI 10.33113/mkmk.ras.2020.26.03.287\_312.01

## ВЛИЯНИЕ ВЯЗКОУПРУГИХ СВОЙСТВ СВЯЗУЮЩЕГО НА ПОВЕДЕНИЕ ОДНОНАПРАВЛЕННОГО КОМПОЗИТА С ВОЛОКНАМИ ИЗ СПЛАВА С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ\*

Мовчан А.А.<sup>1</sup>, Чернов М.И.<sup>2</sup><sup>1</sup>ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия<sup>2</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,  
г. Москва, Россия

### АННОТАЦИЯ

Композиты с волокнами или слоями из сплавов с памятью формы (СПФ) и упругой или вязкоупругой матрицей являются перспективными материалами для создания актуаторов и силовозбудителей многократного действия, «искусственных мышц», разворачивающихся систем, поверхностей изменяемой геометрии и т.д. За счет упругих свойств связующего такие композиты могут обладать свойством многократно обратимой памяти формы, т.е. в них может осуществляться двухпутевой эффект памяти формы, что не характерно ни для связующего, ни для наполнителя из СПФ без специальной термомеханической обработки. При правильном проектировании такого композита можно добиться свойства замкнутости двухпутевого эффекта памяти формы, то есть управляемости его формой в определенном диапазоне изменений только за счет изменения температуры наполнителя.

Моделирование термомеханического поведения композитов с элементами из СПФ затруднено сложностью определяющих соотношений для СПФ, которые имеют дифференциальный характер, должны рассматриваться в связанной постановке, с учетом переменности упругих модулей СПФ. Эти определяющие соотношения должны учитывать как фазовый, так и структурный механизм неупругого деформирования СПФ, принципиальное различие этих механизмов и их взаимное влияние. В данной работе используется вариант модели нелинейного деформирования СПФ, учитывающий все перечисленные эффекты.

Полимерные связующие композитов обладают не только упругими, но и вязкоупругими свойствами. Это обстоятельство не учитывается в большинстве работ, посвященных описанию поведения композитов с элементами из СПФ. В данной работе для оценки влияния вязкоупругих свойств связующего на поведение однонаправленного композита с волокнами из СПФ использована простейшая модель линейной наследственной вязкоупругости (тело Кельвина). Установлено существенное влияние учета вязкоупругих свойств на поведение композита при небольших скоростях изменения температуры волокон из СПФ.

**Ключевые слова:** композит; вязкоупругое связующее; сплав с памятью формы; волокна; скорость нагрева; скорость охлаждения; релаксация

### INFLUENCE OF VISCOELASTIC PROPERTIES OF THE MATRIX ON THE BEHAVIOR OF A UNIDIRECTIONAL COMPOSITE WITH SHAPE MEMORY ALLOY FIBERS

\* Работа выполнена в рамках госбюджетной темы (номер государственной регистрации АААА-А19-119012290118-3) при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект №20-01-00240).

Movchan A.A.<sup>1</sup>, Chernov M.I.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Institute of Applied Mechanics Russian Academy of Science, Moscow, Russia*

<sup>2</sup>*Moscow State University, Moscow, Russia*

### ABSTRACT

Composites with fibers or layers of shape memory alloys (SMA) and elastic or viscoelastic matrix are promising materials for creating multiple-action actuators and power excitors, "artificial muscles", deployable systems, surfaces of variable geometry, etc. Due to the elastic properties of the matrices, such composites can have the property of repeatedly reversible shape memory, i.e. they can have a two-way shape memory effect, which is not typical for either the binder or the SMA filler without a special thermomechanical processing. With proper design of such a composite, it is possible to achieve the closed property of the two-way shape memory effect, that is, its shape can be controlled in a certain range of changes only by changing the temperature of the filler.

Modeling the thermomechanical behavior of composites with elements from SMA is complicated by the complexity of the constitutive relations for SMA, which are of a differential nature, should be considered in the coupled formulation, taking into account the variability of elastic modules of SMA. These constitutive relationships should take into account both the phase and structural mechanism of inelastic deformation of SMA, the fundamental difference between these mechanisms and their mutual influence. This paper uses a variant of the SMA nonlinear deformation model that takes into account all these effects.

Polymer binders of composites have not only elastic, but also viscoelastic properties. This circumstance is not taken into account in most works devoted to describing the behavior of composites with elements from SMA. In this paper, the simplest model of linear hereditary viscoelasticity (Kelvin body) is used to evaluate the effect of viscoelastic properties of the matrix on the behavior of a unidirectional composite with SMA fibers. A significant influence of viscoelastic properties on the behavior of the composite at low rates of temperature change of SMA fibers has been established.

**Keywords:** composite; viscoelastic matrix; shape memory alloy; fibers; heating speed; cooling speed; relaxation

### ВВЕДЕНИЕ

Общие вопросы проектирования, создания и применения композитов с наполнителем (волокнами, слоями) из сплавов с памятью формы (СПФ) рассмотрены в работах [1-3]. Теоретическая модель поведения таких композитов, основанная на простейших определяющих соотношениях для СПФ [4] изложена в [5]. Возможность осуществления эффекта обратимой памяти формы обсуждалась в [6]. Вопросы устойчивости таких композитов обсуждались в [7-8]. Композиты с металлической матрицей и волокнами из никелида титана рассматривались в [9]. В [10] рассматривались композиты, несимметрично армированные волокнами из СПФ. Поведение композитов с волокнами из СПФ, которым перед совмещением задавалась фазовая или структурная деформация, моделировалось в работах [11-13], соответствующие двумерные системы рассматривались в [14]. Необходимо отметить, что в большинстве работ, связанных с моделированием таких композитов, связующее считалось упругим, в то время, как полимерное связующее, должно обладать вязкоупругими свойствами [15].

Данная работа посвящена оценке влияния учета вязкоупругих свойств связующего на поведение однонаправленного композита с волокнами из СПФ. Исследовано влияние скоростей нагрева и охлаждения волокон через интервалы температур, соответственно, прямого и обратного термоупругого мартенситного фазового превращения на изменение напряженно – деформированного состояния композита и его составляющих.

## 1. КАЧЕСТВЕННОЕ ОПИСАНИЕ РАССМАТРИВАЕМЫХ ПРОЦЕССОВ

Рассматриваемый объект [11,12] представляет собой однонаправленный композит, равномерно армированный волокнами из СПФ. Перед совмещением со связующим материал всех волокон из СПФ переводится в мартенситное фазовое состояние. Всем волокнам задается одинаковая фазово-структурная деформация

$$\varepsilon^0 = \varepsilon_0 + \varepsilon_0' \quad (1.1)$$

полностью возвращаемая при обратном термоупругом мартенситном превращении. В (1.1)  $\varepsilon^0$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_0'$  – заданная деформация одноосного растяжения, отсчитываемая от полностью аустенитного фазового состояния и складываемая из линейной деформации объемного эффекта реакции прямого превращения  $\varepsilon_0$  и девиаторной составляющей заданной деформации  $\varepsilon_0'$ . Деформированные волокна совмещаются со связующим. После совмещения напряжения, как в волокнах, так и в матрице равны нулю. Предполагается, что после совмещения деформации волокон и продольные деформация связующего одинаковы.

На первом этапе происходит нагрев волокон композита через интервал температур обратного мартенситного превращения  $A_s^0$ ,  $A_f^{\sigma_1}$ . Здесь температура начала обратного превращения  $A_s^0$  определяется для нулевого напряжения, поскольку в момент начала нагрева напряжения отсутствуют. В то же время температура окончания обратного превращения  $A_f^{\sigma_1}$  должна определяться для заранее неизвестного значения напряжения  $\sigma_1$  в волокнах в момент окончания обратного превращения. В процессе нагрева волокон в них за счет явления памяти формы генерируются деформации одноосного сжатия. В силу условия совместного деформирования волокон и связующего в последнем генерируются продольные деформации сжатия и сжимающие напряжения. В силу условий равновесия в волокнах генерируются растягивающие напряжения. В момент окончания обратного превращения заданная волокнам перед совмещением фазово-структурная деформация полностью снимается, однако в волокнах сохраняются упругие деформации и соответствующие растягивающие напряжения.

После этапа нагрева возможен этап выдержки композита при фиксированной температуре, в процессе которого материал волокон находится в неизменном аустенитном фазовом состоянии. В процессе выдержки напряженно-деформированное состояние связующего и волокон может меняться за счет вязкоупругих свойств связующего.

На следующем этапе происходит охлаждение волокон через интервал температур прямого термоупругого мартенситного фазового превращения

$M_s^{\sigma_2}, M_f^{\sigma_3}$ . Здесь  $M_s^{\sigma_2}$  – температура начала прямого фазового при напряжении  $\sigma_2$ , действующем в волокнах в момент начала охлаждения,  $M_f^{\sigma_3}$  – температура окончания прямого превращения при соответствующем напряжении  $\sigma_3$ , которое, вообще говоря, может отличаться от нуля. В процессе охлаждения, происходящем под действием растягивающих напряжений, в волокнах будут накапливаться растягивающие деформации прямого фазового превращения.

При определенном сочетании значений коэффициента наполнения, параметров материала волокон и связующего в случае упругого поведения последнего, возможна ситуация, при которой в момент окончания прямого превращения в материале волокон их фазовая деформация будет в точности равна величине  $\varepsilon^0$  (1.1). Напряжения в волокнах и матрице будут равны нулю, т.е. весь композит возвратится в исходное состояние [11,12]. В случае многократного повторения такого цикла нагрева и охлаждения описанный выше процесс деформирования будет многократно повторяться. При таком поведении композита в волокнах из СПФ осуществляется эффект многократно обратимой памяти формы (two way shape memory effect).

В работе [11] аналитическое описание поведения такого композита получено в рамках модели линейного деформирования СПФ при фазовых превращениях [16]. Получено аналитическое выражение коэффициента наполнения через параметры материала для СПФ и связующего, выполнение которого обеспечивает осуществление замкнутого эффекта обратимой памяти формы. При решении задачи в такой постановке требуемое значение коэффициента наполнения не зависит от величины задаваемой начальной деформации  $\varepsilon^0$ . В [12] аналогичная задача решена в рамках модели нелинейного поведения СПФ при фазовых и структурных превращениях [17]. Установлено, что в такой уточненной постановке может быть найдено значение коэффициента наполнения, обеспечивающее осуществление замкнутого эффекта обратимой памяти формы, однако теперь это значение зависит от величины заданной начальной деформации, убывая с ростом последней.

В работах [11,12] предполагалось, что связующее ведет себя упруго. В данной работе та же задача решалась с использованием модели нелинейного деформирования СПФ [17], но с учетом вязкоупругих свойств связующего в рамках простейшей модели Кельвина [18-20].

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для описания поведения связующего использовалась простейшая модель вязкоупругости (тело Кельвина), определяющее уравнения которой имеют вид [18-20]

$$E_m \left( \dot{\varepsilon}_m + k \varepsilon_m \right) = \dot{\sigma}_m + (k + A) \sigma_m. \quad (2.1)$$

Здесь  $E_m$ ,  $\varepsilon_m$ ,  $\sigma_m$  – мгновенный модуль упругости связующего, продольные деформация и напряжение в связующем, точкой обозначены производные по времени,  $k$ ,  $A$  – параметры материала.

Помимо определяющего соотношения (2.1) в разрешающую систему уравнений для однонаправленного композита с волокнами из СПФ входит ряд

соотношений [11,12]. Это уравнение равновесия в продольном направлении (предполагается, что внешние силы на композит не действуют)

$$\mu\sigma_f + (1-\mu)\sigma_m = 0. \quad (2.2)$$

Здесь  $\sigma_f$  – продольные напряжения в волокнах,  $\mu$  – коэффициент наполнения композита.

Условие совместности (равенство деформаций волокон и связующего в продольном направлении) имеют вид

$$\frac{\sigma_f}{E_f} + \varepsilon_1^{phst} = \varepsilon_m. \quad (2.3)$$

Здесь и далее температурные деформации ввиду их малости не учитываются,  $E_f$  – модуль упругости материала волокон, меняющийся при фазовом переходе (изменении величины объемной мартенситной фазы СПФ  $q$ ) в соответствии с зависимостью

$$\frac{1}{E_f(q)} = \frac{q}{E_M} + \frac{1-q}{E_A} \quad (2.4)$$

следующей из предположения об адитивности потенциала Гиббса СПФ [21]. В (2.4)  $E_M$ ,  $E_A$  – значения модуля Юнга СПФ в мартенситном и аустенитном состоянии соответственно. В (2.3)  $\varepsilon_1^{phst}$  – значение фазово-структурной деформации волокон, отсчитываемой не от аустенитного, как для величины  $\varepsilon^{phst}$  состояния, а от начального деформированного состояния в момент совмещения волокон и связующего

$$\varepsilon_1^{phst} = \varepsilon^{phst} - \varepsilon^0 = \varepsilon^{phst'} + \varepsilon_0 q - \varepsilon^0. \quad (2.5)$$

В (2.5)  $\varepsilon^{phst'}$  – девиаторная составляющая осевой фазово-структурной деформации волокон. Подстановка (2.5) в (2.3) дает

$$\frac{\sigma_f}{E_f} + \varepsilon^{phst'} + \varepsilon_0 q - \varepsilon^0 = \varepsilon_m. \quad (2.6)$$

Для описания фазово-структурного деформирования материала волокон используется система определяющих соотношений модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях [17]. Одномерный вариант этой модели, выраженный в скоростях изменения напряжений, деформаций и параметра фазового состава имеет вид

$$\dot{\varepsilon}^{phst} = \dot{\varepsilon}^{phst'} + \dot{\varepsilon}_0 q, \quad (2.7)$$

$$\dot{\varepsilon}^{phst'} = \dot{\varepsilon}^{ph} + \dot{\varepsilon}^{st}, \quad (2.8)$$

$$\dot{\varepsilon}_f^{ph} = \omega^\pm q, \quad (2.9)$$

$$\omega^+ = \rho_D (1 - qf(q)) \varphi_1(|\sigma_f|) + f(q) \varepsilon^{phst'}, \quad (2.10)$$

$$\omega^- = \varepsilon^{phst'} / q, \quad (2.11)$$

$$\dot{\varepsilon}_f^{st} = \rho_D q_{st} \varphi_2'(|\sigma_f|) \dot{\sigma}_f. \quad (2.12)$$

Из (2.8), (2.9) и (2.12) получается

$$\dot{\varepsilon}^{phst'} = \omega^\pm q + \rho_D q_{st} \varphi_2'(|\sigma_f|) \dot{\sigma}_f. \quad (2.13)$$

Согласно (2.7) скорость изменения фазово-структурной деформации складывается из скоростей изменения девиаторной и шаровой части деформации. Следуя (2.8), скорость изменения девиатора фазово-структурной деформации является суммой скоростей изменения этой величины за счет фазового и за счет структурного переходов. Скорость изменения деформаций за счет фазового перехода определяется формулой (2.9), причем верхний индекс + у множителя  $\omega^\pm$  соответствует прямому, формула (2.10), а индекс минус – обратному, формула (2.11) превращению. Скорость изменения неупругой деформации за счет структурного превращения определяется формулой (2.12). В ней величина  $q_{st}$  [22] определяет собой часть мартенситной составляющей представительного объема СПФ, которая претерпевает в рассматриваемый момент времени мартенситное структурное превращение. В рассматриваемой задаче  $q_{st} = q$  в случае если  $\left| \dot{\sigma}_f \right| > 0$  и значение  $|\sigma_f|$  в рассматриваемый момент равно максимальной величине модуля напряжения в волокнах за всю историю существования мартенситной части рассматриваемого представительного объема. Если хотя бы одно из двух этих условий не выполняется, то  $q_{st} = 0$ , структурный переход не имеет места.

В (2.10), (2.12)  $\varphi_1(|\sigma|) = \Phi_1(|\sigma|/\sigma_{10})$ ,  $\varphi_2(|\sigma|) = \Phi_2(|\sigma|/\sigma_{20})$  – материальные функции СПФ, трактуемые как интегральные функции распределения микронапряжений в представительном объеме СПФ для аустенитного и мартенситного фазового состояния соответственно. Проблема определения вида этих функций рассмотрена в [23]. В данной работе предполагается, что  $\Phi_1$  представляет собой функцию отраженного нормального распределения

$$\Phi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2/2) dt,$$

а функция  $\Phi_2$  является функцией распределения Вейбулла-Гнеденко

$$\Phi_2(x) = 1 - \exp(-x^\alpha).$$

Для определения скорости изменения параметра фазового состава  $\dot{q}$  используется предложенная в [24] дифференциальная форма определяющих соотношений для параметра фазового состава

$$dq = \frac{F^\pm}{\Delta S} (f^\pm(q) \varepsilon_{ij}^{phst} d\sigma_{ij}' + A^\pm d\sigma_i + Bd\sigma_{kk} - \Delta SdT). \quad (2.14)$$

В (2.14) верхний индекс плюс соответствует прямому, а минус – обратному термоупругому мартенситному фазовому превращению

$$F^+ = \frac{\pi(1-q)}{M_s^0 - M_f^0} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi(M_s^\sigma - T)}{2(M_s^0 - M_f^0)} \right), \quad (2.15)$$

$$A^+ = \frac{P_D}{q+C} [C(\varphi_1(\sigma_i) + \sigma_i \varphi_1'(\sigma_i)) + \sigma_i q_{st} \varphi_2'(\sigma_i)] + (G_A - G_M)/(3G_A G_M) \sigma_i,$$

$$f^+(q) = \frac{1}{q+C}, \quad (2.16)$$

$$F^- = \frac{\pi q}{(A_f^0 - A_s^0)} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} \frac{T - A_s^\sigma}{A_f^0 - A_s^0} \right), \quad (2.17)$$

$$A^- = [\rho_D q_{st} \varphi_2'(\sigma_i) + (G_A - G_M)/(3G_A G_M)] \sigma_i,$$

$$f^-(q) = \frac{1}{q}, \quad (2.18)$$

$$B = \sigma_{kk} (K_A - K_M)/(3K_A K_M) + \varepsilon_0,$$

$$M_s^\sigma = M_s^0 + \omega_{ij}^+ \sigma_{ij}' / \Delta S_0 + Z(\sigma_{ij}) / \Delta S_0 + \sigma_{kk} \varepsilon_0 / \Delta S_0,$$

$$\omega_{ij}^+ = \frac{3}{2} \rho \frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i} (1 - qf(q)) F_1(\sigma_i) + f(q) \varepsilon_{ij}^{phst},$$

$$A_s^\sigma = A_s^0 + \omega_{ij}^- \sigma_{ij}' / \Delta S_0 + Z(\sigma_{ij}) / \Delta S_0 + \sigma_{kk} \varepsilon_0 / \Delta S_0,$$

$$\omega_{ij}^- = \frac{\varepsilon_{ij}^{phst}}{q},$$

$\sigma_{ij}'$ ,  $\sigma_i$ ,  $\sigma_{kk}$  – девиатор, интенсивность и первый инвариант тензора напряжений;  $T$  – температура,  $\Delta S$  – скачек объемной плотности энтропии при переходе от мартенситного состояния к аустениному;  $G_A$ ,  $G_M$  – значения модуля сдвига СПФ в аустенитном и мартенситном состояниях;  $K_A$ ,  $K_M$  – соответствующие значения утроенного объемного модуля.

Переход к случаю одноосного растяжения и замена знака дифференциала на знак производной по времени приводит к следующим соотношениям

$$\dot{q} = \frac{F^\pm}{\Delta S} \left( f^\pm(q) \varepsilon^{phst} \dot{\sigma}_f + A^\pm \dot{\sigma}_f - \Delta S \dot{T} \right) = M^\pm \dot{\sigma}_f - F^\pm \dot{T}, \quad (2.19)$$

$$A^+ = \frac{\rho_D}{q + C} \left[ C(\varphi_1(\sigma_f) + \sigma_f \varphi_1'(\sigma_f)) + \sigma_f q_{st} \varphi_2'(\sigma_f) \right] + Z \sigma_f + \varepsilon_0,$$

$$A^- = [\rho_D q_{st} \varphi_2'(\sigma_f) + Z] \sigma_f + \varepsilon_0,$$

$$M_s^\sigma = M_s^0 + \frac{\sigma_f \rho_D (1 - qf(q)) \varphi_1(\sigma_f) + f(q) \varepsilon^{phst} \sigma_f + 0.5Z \sigma_f^2 + \sigma_f \varepsilon_0}{\Delta S},$$

$$A_s^\sigma = A_s^0 + \frac{\varepsilon^{phst} \sigma_f / q + 0.5Z \sigma_f^2 + \sigma_f \varepsilon_0}{\Delta S}, \quad Z = \frac{E_A - E_M}{E_A E_M},$$

$$M^\pm = \frac{F^\pm}{\Delta S} (f^\pm(q) \varepsilon^{phst} + A^\pm).$$

Зависимости (2.15)-(2.18) сохраняются для одномерного случая.

Соотношения (2.19) соответствуют связанной постановке задачи термомеханики для СПФ [25], в рамках которой учитывается влияние действующих напряжений на характерные температуры фазовых переходов и сам процесс таких превращений. В случае упрощенной несвязанной постановки в уравнении (2.19) следует положить  $M^\pm = 0$ , что приводит к существенному упрощению этого соотношения:  $\dot{q} = -F^\pm \dot{T}$ . Более того, когда речь идет о процессах прямого превращения, начинающихся из полностью аустенитного фазового состояния, или процессов обратного превращения, начинающихся

из полностью мартенситного фазового состояния (для краткости такие циклы далее обозначаются как «полные»), то данное упрощенное уравнение можно проинтегрировать, в результате чего получается выражение для  $q$  вида

$$q = 0.5(1 - \cos(\pi\delta)), \quad (2.20)$$

где  $\delta = \frac{M_s^0 - T}{M_s^0 - M_f^0}$  для прямого и  $\delta = \frac{A_f^0 - T}{A_f^0 - A_s^0}$  для обратного превращения.

### 3. РАЗРЕШАЮЩАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ

5 неизвестных функций времени  $\sigma_m, \varepsilon_m, \sigma_f, \varepsilon^{phst}, q$  удовлетворяют пяти уравнениям (2.1), (2.2), (2.6), (2.13), (2.19). В рамках однократно связанной постановки краевой задачи для СПФ [26] величина  $\dot{T}$  должна быть задана. В этой системе с помощью двух нелинейных уравнений (2.2) и (2.6) можно избавиться от двух неизвестных  $\sigma_m$  и  $\varepsilon_m$

$$\sigma_m = -\frac{\mu}{1-\mu}\sigma_f, \quad \dot{\sigma}_m = -\frac{\mu}{1-\mu}\dot{\sigma}_f, \quad (3.1)$$

$$\varepsilon_m = \sigma_f \left( \frac{q}{E_M} + \frac{1-q}{E_A} \right) + \varepsilon_1^{phst}, \quad \varepsilon_1^{phst} = \varepsilon^{phst'} + \varepsilon_0 q - \varepsilon^0. \quad (3.2)$$

После дифференцирования (3.2) получаем

$$\dot{\varepsilon}_m = D\dot{\sigma}_f + G\dot{q}, \quad (3.3)$$

$$D = \left( \frac{1}{E(q)} + \rho_D q_{st} \varphi_2'(\sigma_f) \right), \quad G = \left( \sigma_f \frac{\Delta E}{E_A E_M} + \varepsilon_0 + \omega^\pm \right).$$

Подставляя (3.1)-(3.3) в (2.1) получаем

$$H\dot{\sigma}_f - N\dot{T} = - \left[ \frac{\mu(k+A)}{1-\mu} + \frac{E_m k}{E(q)} \right] \sigma_f - E_m k \varepsilon_1^{phst}, \quad (3.4)$$

$$H = \frac{\mu}{1-\mu} + E_m D + E_m G M^\pm, \quad N = E_m G F^\pm.$$

Исходя из (2.13) и (2.19) получаем

$$\dot{\varepsilon}^{phst'} = C^\pm \dot{\sigma}_f - D^\pm \dot{T}, \quad (3.5)$$

$$C^\pm = \omega^\pm M^\pm + \rho_D q \varphi_2'(\sigma_f), \quad D^\pm = F^\pm \omega^\pm.$$

Подставляя в (3.5) и (2.19) выражение для  $\dot{\sigma}_f$  через  $\dot{T}$  из (3.4) получаем систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производных  $\dot{\sigma}_f, \dot{\varepsilon}^{phst'}, \dot{q}$  в правых частях которой присутствует функция  $\dot{T}$ , которая должна задаваться (например, как константа скорости изменения температуры)

$$\dot{\sigma}_f = \frac{N}{H} \dot{T} - R, \quad (3.6)$$



$$\dot{\varepsilon}^{phst'} = \frac{NC^{\pm} - HD^{\pm}}{H} \dot{T} - C^{\pm} R, \quad (3.7)$$

$$\dot{q} = \left( \frac{M^{\pm}N - F^{\pm}H}{H} \right) \dot{T} - M^{\pm} R. \quad (3.8)$$

Здесь введено обозначение

$$R = \frac{\left[ \frac{\mu(k+A)}{1-\mu} + \frac{E_m k}{E(q)} \right] \sigma_f + E_m k \varepsilon_1^{phst}}{H}.$$

Система разрешающих соотношений (3.6)-(3.8) соответствуют связанной постановке задачи. В случае несвязанной постановки для полных циклов фазовых переходов разрешающая система содержит только 2 дифференциальных уравнения (3.6) и (3.7) относительно двух неизвестных функций  $\sigma_f$  и  $\varepsilon^{phst'}$ , причем в выражениях коэффициентах этих уравнений следует положить  $M^{\pm} = 0$ , а величина  $q$ , входящая в выражения для этих коэффициентов, определяется по формуле (2.20).

Начальные условия для системы дифференциальных уравнений для первого этапа (нагрев волокон, знаки минус в верхнем индексе) имеют вид

$$\sigma_f(A_s^0) = 0, \quad \varepsilon^{phst'}(A_s^0) = \varepsilon_0 - \varepsilon^0, \quad q(A_s^0) = 1.$$

Задание волокнам начальной растягивающей деформации  $\varepsilon^0$  может производиться при нагружении в режиме мартенситной неупругости или деформировании в режиме прямого превращения под действием постоянной растягивающей нагрузки. В обоих этих случаях произойдет упрочнение материала волокон в отношении последующего структурного превращения (перекрестное [27,28] в случае использования прямого превращения), с радиусом поверхности нагружения [29,30], обозначаемом как  $\sigma_s$ . При нагреве волокон и соответствующем обратном фазовом превращении в СПФ, в них растут растягивающие напряжения. Процесс нагрева волокон делится на два этапа. На первом выполняется неравенство  $\sigma_f < \sigma_s$  и процесс обратного фазового превращения структурным переходом не сопровождается,  $d\varepsilon^{st} = 0$ ,  $q_{st} = 0$ . На втором этапе  $\sigma_f > \sigma_s$ , и неупругая деформация развивается, как за счет фазового, так и за счет структурного переходов,  $q_{st} = q$ .

Счет для этапа нагрева производится до тех пор, пока величина  $q$  не достигнет значения 0. В этой точке  $\varepsilon^{phst'} = 0$ ,  $\sigma_f$  достигает некоторого заранее не известного значения  $\sigma_1 = \sigma_f(t_0)$ , где  $t_0$  – время завершения обратного превращения.

В [12], в предположении об упругом поведении связующего, получены следующие выражения для напряжений в волокнах и в связующем, а также для продольной деформации всего композита

$$\sigma_f = \frac{\varepsilon^0 - \varepsilon^{phst}}{\frac{1}{E_f} + \frac{\mu}{1-\mu} \frac{1}{E_m}}, \quad \sigma_m = \frac{\varepsilon^{phst} - \varepsilon^0}{\frac{1-\mu}{\mu} \frac{1}{E_f} + \frac{1}{E_m}}, \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon^{phst} - \varepsilon^0}{1 + \frac{1-\mu}{\mu} \frac{E_m}{E_f}}. \quad (3.9)$$

Решение задачи для вязкоупругого связующего будет приближаться к даваемому этими формулами для очень быстрого нагрева волокон, который можно осуществить путем пропускания через волокна тока большой величины. В момент окончания обратного превращения  $\varepsilon^{phst} = 0$  и первая формула (3.9) имеет вид

$$\sigma_f = \frac{\varepsilon_0}{\frac{1}{E_A} + \frac{\mu}{1-\mu} \frac{1}{E_m}}. \quad (3.10)$$

В случае если после завершения обратного превращения происходит выдержка во времени без фазового перехода, то за счет реономных свойств связующего изменение напряженно-деформированного состояния будет продолжаться. Если в этом процессе напряжения  $\sigma_f$  будут убывать, то не будет ни фазового, ни структурного превращения в волокнах, т.е. они будут вести себя упруго с аустенитным значением модуля. Из уравнений (2.2), (2.3) при  $q = 0$  получается

$$\varepsilon_m = \frac{\sigma_f}{E_A} - \varepsilon_0, \quad \dot{\varepsilon}_m = \frac{\dot{\sigma}_f}{E_A}, \quad \sigma_m = -\frac{\mu}{1-\mu} \sigma_f, \quad \dot{\sigma}_m = -\frac{\mu}{1-\mu} \dot{\sigma}_f. \quad (3.11)$$

Подстановка (3.11) в (2.1) дает

$$\dot{\sigma}_f + \lambda \sigma_f = \beta, \quad (3.12)$$

$$\lambda = \frac{(1-\mu)E_m k + E_A \mu (k + A)}{E_m (1-\mu) + \mu E_A}, \quad \beta = \frac{E_m k \varepsilon_0 (1-\mu) E_A}{(1-\mu) E_m + \mu E_A}.$$

Решение (3.12) при начальном условии  $\sigma_f(t_0) = \sigma_1$  ( $\sigma_1$  – напряжение в волокнах в момент окончания обратного превращения) имеет вид

$$\sigma_f = \sigma_A^\infty + (\sigma_1 - \sigma_A^\infty) \exp(-(t - t_0)), \quad (3.13)$$

где введены обозначения

$$\sigma_A^\infty = \frac{\varepsilon_0}{\frac{1}{E_A} + \frac{\mu}{1-\mu} \frac{1}{E_m^\infty}}, \quad E_m^\infty = \frac{k E_m}{k + A}. \quad (3.14)$$

В (3.14)  $E_m^\infty$  – так называемый длительный модуль вязкоупругого тела [18-20].

Согласно (3.13) при  $\sigma_1 > \sigma_A^\infty$  напряжение в волокнах монотонно убывает со временем от значения  $\sigma_1$  асимптотически приближаясь сверху к величине  $\sigma_A^\infty$ . В этом случае будут верно предположение об отсутствии структурного превращения на этом этапе, т.е. решение (3.13) является корректным. Таким образом, напряжение в рассматриваемом процессе монотонно уменьшается и асимптотически стремится к минимальному значению  $\sigma_A^\infty$ , которое может быть вычислено по формуле (3.14), получающейся из упругого выражения (3.10) путем замены мгновенного модуля на длительный. Поскольку  $E_m > E_m^\infty$ , то  $\sigma_A^\infty < \sigma_1$ .

Далее рассматривается случай охлаждения волокон (знаки плюс в верхнем индексе) после их нагрева. Систему дифференциальных уравнений следует решать при начальных условиях  $q(M_s^\sigma) = 0$ ,  $\varepsilon^{phst'}(M_s^\sigma) = 0$ ,  $\sigma_f(M_s^\sigma) = \sigma_2$ . Здесь  $\sigma_2$  – напряжение в момент начала процесса охлаждения волокон. В случае, если

при охлаждении волокон напряжения в них убывает, во всех формулах следует считать  $q_{st} = 0$  [22]. Решение системы дифференциальных уравнений для процесса охлаждения продолжается до тех пор, пока величина  $q$  не достигнет значения 1, даже если при этом напряжения в волокнах  $\sigma_f(1) = \sigma_3 > 0$ , или пока напряжения в волокнах не обратятся в нуль (даже если при этом будет  $q < 1$ ).

Рассмотрим процесс деформирования композита после завершения процесса прямого превращения в первом из этих вариантов. Предполагается, что напряжения в волокнах в таком процессе не могут превысить максимальные значения  $\sigma_f$ , соответствующие полному обратному превращению. В этом случае, структурного превращения в материале волокон не происходит [29,30]. После окончания прямого превращения будут сохраняться равенства:  $q = 1$ ,  $E_f = E_M$ ,  $\varepsilon^{phst'} = \varepsilon^{phst'}(1) = \text{const}$ , где под величиной  $\varepsilon^{phst'}(1)$  понимается значение девиатора фазово-структурной деформации, получаемое для  $q = 1$  при решении системы дифференциальных уравнений (3.6)-(3.8). Тогда  $\varepsilon_1^{phst}(1) = \varepsilon^{phst'}(1) + \varepsilon_0 - \varepsilon^0 = \text{const}$ . В этом случае, согласно (2.6)

$$\varepsilon_m = \frac{\sigma_f}{E_M} + \varepsilon_1^{phst}(1), \quad (3.15)$$

$$\dot{\varepsilon}_m = \frac{\dot{\sigma}_f}{E_M}. \quad (3.16)$$

Подставляя (3.15), (3.16) и (3.1) в (2.1) получаем дифференциальное уравнение для  $\sigma_f$  в форме (3.12), где

$$\lambda = \frac{kE_m(1-\mu) + (k+A)E_M\mu}{(1-\mu)E_m + \mu E_M}, \quad \beta = \frac{kE_M E_m(1-\mu)(\varepsilon^0 - \varepsilon^{phst}(1))}{(1-\mu)E_m + \mu E_M}$$

Решение этого уравнения при начальном условии  $\sigma_f(t_0) = \sigma_3$  имеет вид

$$\sigma_f = \sigma_M^\infty + (\sigma_3 - \sigma_M^\infty) \exp(-(t-t_0)), \quad (3.17)$$

$$\sigma_M^\infty = \frac{\varepsilon^0 - \varepsilon^{phst}(1)}{\frac{1}{E_M} + \frac{\mu}{1-\mu} \frac{1}{E_m}}. \quad (3.18)$$

Согласно (3.17) при стремлении  $t \rightarrow \infty$  напряжение в волокнах в рассматриваемом процессе асимптотически стремится к величине  $\sigma_M^\infty$  сверху, если  $\sigma_3 > \sigma_M^\infty$  и снизу при выполнении противоположного неравенства. Сравнение формул (3.14) и (3.18) показывает, что всегда  $\sigma_A^\infty > \sigma_M^\infty$ . В случае осуществления замкнутого двухпутевого эффекта памяти формы  $\varepsilon^{phst}(1) = \varepsilon^0$ ,  $\sigma_m^\infty = 0$ ,  $\sigma_3 = 0$  и при выдержке напряжения в волокнах и в композите не меняются и равны нулю.

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ РЕШЕНИЯ

Все приведенные ниже результаты решения задач получены для следующих значений параметров материала для СПФ:  $M_s^0 = 40^\circ\text{C}$ ,  $M_f^0 = 20^\circ\text{C}$ ,  $A_s^0 = 50^\circ\text{C}$ ,

$A_f^0 = 70^\circ\text{C}$ ,  $\Delta S = 0.644$  МПа/К,  $E_A = 84000$  МПа,  $E_M = 28000$  МПа,  $\varepsilon_0 = 0.001$ ,  $\rho_D = 0.08$ ,  $C = 2$ ,  $\sigma_{10} = 140$  МПа,  $\sigma_{20} = 200$  МПа,  $a = 2$ , соответствующих никелиду титана [23].

Предполагалось, что начальная растягивающая деформация  $\varepsilon^0 = 0.04$  задается волокнам при их нагружении в режиме мартенситной неупругости. Значение напряжения  $\sigma_s$ , соответствующее такой начальной деформации,

$$\text{определялось по формуле [12]} \quad \sigma_s = \sigma_{20} \left[ \ln \left( \frac{\rho_D}{\rho_D - (\varepsilon^0 - \varepsilon_0)} \right) \right]^{1/\alpha} = 164 \text{ МПа.}$$

Мгновенный модуль упругости связующего предполагался равным  $E_m = 2500$  МПа (Дефлон [31]). Методы идентификации вязкоупругих определяющих соотношений рассмотрены в [32-36]. Коэффициенты  $A$  и  $k$  для связующего, если не оговорено противоположное, приняты равными  $1.68$  мин<sup>-1</sup> и  $0.32$  мин<sup>-1</sup> соответственно и определяются по приведенным в [37] кривым релаксации напряжений. Вычисления по формуле (3.14) дают для длительного модуля связующего  $E_\infty = 400$  МПа, а для величины  $\sigma_A^\infty$ , к которому стремится напряжение при выдержке после завершения обратного превращения в волокнах  $\sigma_A^\infty = 47.1$  МПа. Время измеряется в мин. Расчеты проведены для постоянных скоростей изменения температуры волокон  $\theta = [1/30; 5; 10; 50; 200]^\circ\text{C/мин.}$

В [12] установлено, что в случае начальной деформации  $\varepsilon^0 = 0.04$  в предположении об упругом поведении связующего, при учете переменности упругих модулей СПФ, но в случае пренебрежения объемным эффектом фазового превращения, замкнутый двухпутевой эффект памяти формы наблюдается при значении коэффициента наполнения  $\mu = 0.251$ . Если же учитывается еще и объемный эффект фазового превращения, то для обеспечения замкнутого двухпутевого эффекта необходимо значение коэффициента наполнения  $\mu = 0.262$ . Ниже конкретные расчеты проводились именно для таких значений  $\mu$ . На всех графиках напряжения приведены в МПа, температура – в градусах Цельсия. Скорость изменения температуры  $\theta$  измерялась в единицах  $^\circ\text{C} \cdot \text{мин}^{-1}$ . Обозначение размерностей у величин  $A$ ,  $k$ ,  $\theta$  далее опускаются.

#### 4.1. Результаты решения несвязанных задач.

Для того чтобы оценить влияние на поведение композита учета только вязкоупругих свойств связующего и величин соответствующих материальных параметров  $k$  и  $A$ , был решен ряд задач в несвязанной постановке [25]. Кроме того, полученные в упрощенной постановке решения использовались для тестирования результатов решения соответствующих связанных задач. Несвязанные задачи решались без учета объемного эффекта фазового превращения, поэтому при решении использовалось значение коэффициента наполнения  $\mu = 0.251$ .

На рис.1 изображены полученные таким образом графики зависимости напряжений в волокнах от температуры при нагреве волокон со скоростью  $\theta = 1/30$ . Все результаты получены для одного и того же значения параметра

$A = 1.68$ . Значение  $k$  для кривой 1 равно 0.32, для кривой 2 – 3.2, для кривой 3 – 32. Кривая 4 построена для упругого поведения связующего. Как видно, при фиксированном значении  $A$  с ростом величины  $k$  напряжения при прочих равных условиях растут, приближаясь при достаточно больших значениях  $k$  к величинам, соответствующим упругому решению. Абсолютно такие же результаты получаются, в рамках расчета, когда величина  $k$  остается постоянной  $k = 0.32$ , а величина  $A$  при переходе от одной кривой к другой уменьшается в 10 раз, т.е. равна  $A = 1.68$  для кривой 1,  $A = 0.168$  для кривой 2,  $A = 0.0168$  для кривой 3. Причина такого совпадения состоит в том, что для одноименных кривых в этих численных экспериментах сохраняется одинаковое значение отношения  $A/k = 5.25$ , а отношение мгновенного модуля к длительному полностью определяется этим отношением  $E_m/E_\infty = 1 + A/k$ .

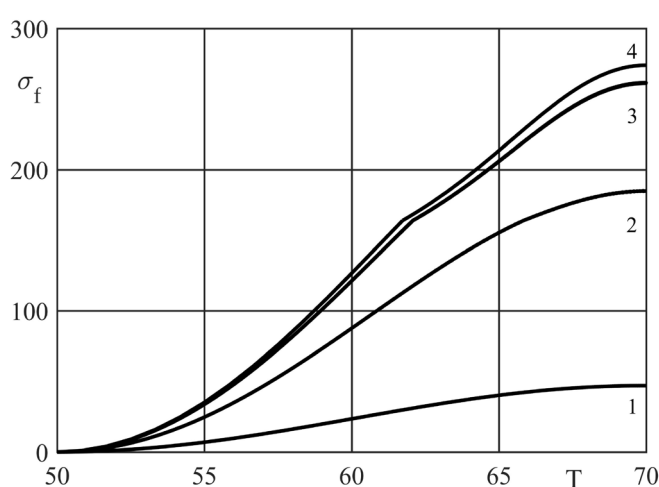


Рис.1.

На рис.2 приведены графики зависимости напряжения в волокнах от температуры при нагреве композита через интервал температур обратного превращения  $A_s^0 = 50^\circ\text{C}$ ,  $A_f^0 = 70^\circ\text{C}$ , который, поскольку рассматривается несвязанная задача, от действующих напряжений не зависит. Решение получено для фиксированных значений параметров материала связующего  $A = 1.168$ ,  $k = 0.32$ , а кривые соответствуют различным скоростям увеличения температуры. Кривая 1 соответствует  $\theta = 1/30$ , кривая 2 –  $\theta = 5$ , кривая 3 –  $\theta = 50$ , кривая 4 –  $\theta = 200$ , кривая 5 – упругому решению.

Как видно, с увеличением скорости нагрева напряжения в волокнах, при прочих равных условиях, возрастают. На кривых 3,4 и 5 заметны точки разрыва касательной при значении напряжения  $\sigma_f = \sigma_s = 164$  МПа. При нагреве до этих точек происходит только обратное фазовое превращение, а после этих точек добавляется, еще и структурный переход. При низких скоростях нагрева, соответствующих кривым 1 и 2 напряжения для всего процесса нагрева ниже  $\sigma_s$  и наблюдается только фазовый переход. Аналогичные точки перелома хорошо видны на двух верхних графиках рис.1.

Обращает на себя внимание тот факт, что для средних скоростей нагрева (кривые 2-4) напряжения  $\sigma_f$  меняются немонотонно, наблюдается переход от возрастания напряжений к их убыванию. Этот эффект связан с резким

замедлением процесса обратного фазового превращения перед его окончанием. В результате падает скорость деформации волокон, а значит и скорость деформации связующего. Происходит переход от преобладания процесса ползучести в связующем к процессу релаксации напряжений в нем (в чистом виде процесс релаксации напряжений наблюдается при нулевой скорости деформации). В результате начинает убывать и напряжение в волокнах, связанные с напряжением в связующем соотношением (2.2).

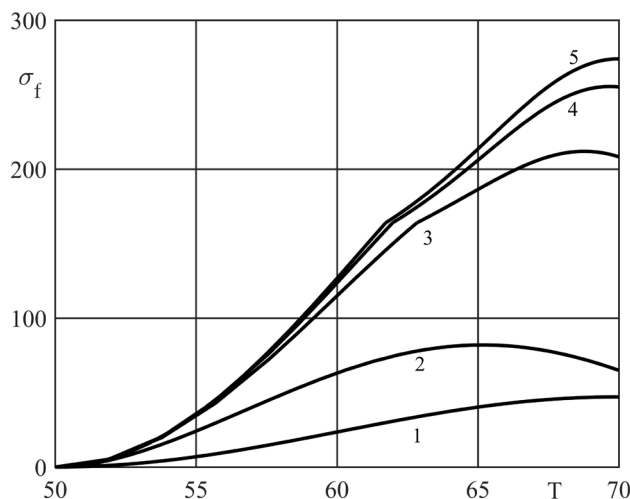


Рис.2.

На рис.3 приведены графики зависимости фазово-структурной деформации волокон от температуры при их нагреве в составе композита через интервал температур обратного превращения. Расчет проводился для различных скоростей нагрева  $\theta$ . Как видно, на первом участке процесса нагрева для всех скоростей нагрева наблюдается единая зависимость фазово-структурной деформации от температуры. Для небольших скоростей нагрева  $\theta = 1/30$  и 5 зависимость  $\varepsilon^{phst}$  от  $T$  описывается единой зависимостью при нагреве до полного обратного превращения. Однако для достаточно больших температур при высоких скоростях нагрева наблюдается разделение графиков для различных скоростей. Отделившиеся кривые снизу вверх соответствуют скоростям нагрева  $\theta = 50$ ,  $\theta = 200$ , а также упругому решению задачи. Установлено, что графики зависимости  $\varepsilon^{phst}$  от  $T$  не зависят от скорости нагрева, если в рассматриваемом процессе наблюдается лишь фазовый переход

$$\sigma_f < \sigma_s \quad (4.1)$$

структурного превращения не происходит. Для высоких скоростей нагрева неравенство (4.1) при некоторой температуре нарушается, происходит структурный переход наряду с фазовым, и кривые разделяются. Чем выше скорость нагрева, тем раньше происходит разделение.

При обратном превращении в отсутствие структурного перехода, согласно формулам (2.9), (2.11) фазово-структурная деформация не зависит от напряжения, а зависит только от величины  $q$ . В случае несвязанной постановки задачи в полном цикле обратного превращения,  $q$  является однозначной функцией температуры и не зависит ни от напряжения, ни от скорости нагрева. Именно

поэтому  $\varepsilon^{phst}$  волокон композита при обратном превращении в отсутствие структурного перехода не зависит от скорости нагрева.

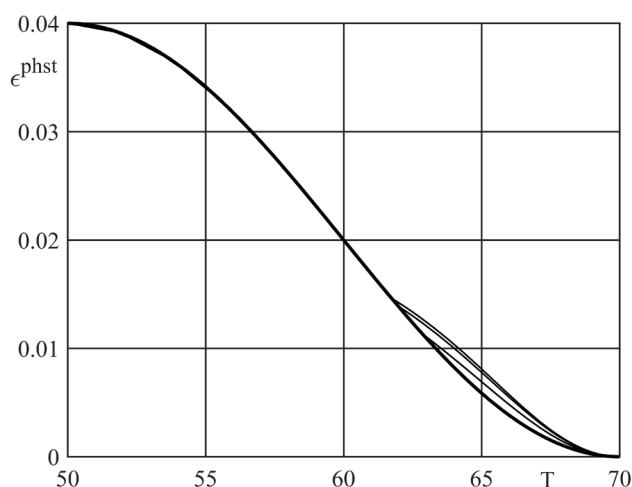


Рис.3.

На рис.4 приведены графики зависимости напряжений в волокнах от температуры при охлаждении волокон в композите со скоростью  $\theta = 1/30$  через интервал температур прямого мартенситного превращения  $M_s^0 = 40^\circ\text{C}$ ,  $M_f^0 = 20^\circ\text{C}$ , не зависящий от действующих напряжений в силу несвязанной постановки задачи. Все кривые получены для одного и того же значения параметра связующего  $A = 1.68$  и значений параметра  $k$  равных 0.32 (кривая 1), 3.2 (кривая 2), 32 (кривая 3) и упругого решения (кривая 4). В качестве начального значения  $\sigma_f$  при интегрировании дифференциальных уравнений выбиралось значение, полученное в последней точке предшествующего этапа нагрева волокон и соответствующего обратного превращения для тех же значений параметра материала. Точно такая же картина получается, если решать задачу для фиксированного значения  $k = 0.32$  и значений  $A = 1.68$  (кривая 1),  $A = 0.168$  (кривая 2),  $A = 0.0168$  (кривая 3). Здесь опять получается, что график зависимости  $\sigma_f$  от  $T$  однозначно определяется величиной отношения  $A/k$ , или, что то же, при прочих равных условиях, значениями мгновенного и длительного модулей связующего. Чем ниже значение этого отношения, т.е. чем ближе величина  $E_\infty$  к  $E_m$ , тем ближе соответствующее решение к упругому.

Как видно, при прямом превращении СПФ в волокнах композита, напряжение в этих волокнах падают с уменьшением температуры, причем, скорость этого падения тем больше, чем меньше отношение  $A/k$ . В точке полного прямого превращения ( $T = M_f^0$ ,  $q = 1$ ) напряжение в волокнах равно нулю только для упругого решения (величина начальной деформации  $\varepsilon^0$  и значение коэффициента наполнения  $\mu$  подбирались таким образом, чтобы в композите наблюдался замкнутый обратимый эффект памяти формы). Для самого маленького из рассмотренных значений этого отношения (кривая 3,  $A/k = 0.0525$ ) напряжение  $\sigma_f$  в момент окончания прямого превращения лишь

слегка превосходит нуль. Однако с ростом отношения  $A/k$  значение  $\sigma_f$  при  $T = M_f^0$  возрастает. Напряжения, действующего в процессе прямого превращения, не хватает для того, чтобы деформация, генерируемая в процессе прямого превращения достигла величины начальной деформации  $\varepsilon^0$ . Чем выше значение  $A/k$ , тем больше незамкнутость процесса. Значение коэффициента наполнения, обеспечивающее осуществление замкнутого эффекта обратимой памяти формы, с ростом величины  $A/k$  должно уменьшаться.

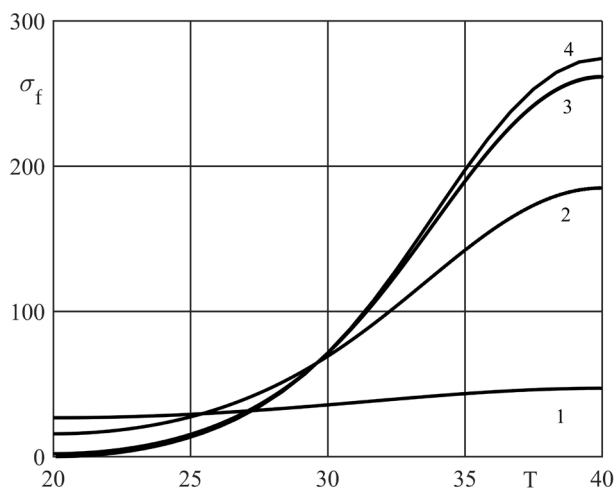


Рис.4.

На рис.5 приведены графики зависимости  $\sigma_f$  от температуры для процесса охлаждения волокон композита, полученные при различных скоростях уменьшения температуры. Кривая 1 соответствует  $\theta = 1/30$ , кривая 2 –  $\theta = 5$ , кривая 3 – упругому решению. Для высоких скоростей охлаждения с дальнейшим ростом этих скоростей решение приближается к упругому, так же как и с уменьшением отношения  $A/k$  при фиксированной скорости охлаждения.

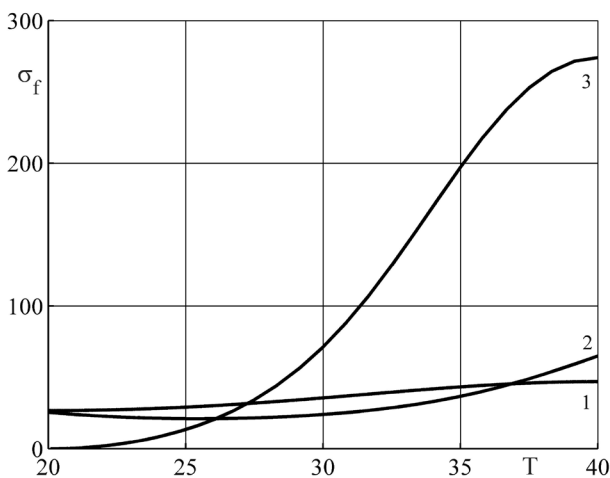


Рис.5.

Как и следовало ожидать, для упругого решения (или изменения температуры с предельно высокой скоростью) в точке завершения прямого



превращения  $\sigma_f = 0$ , т.е. наблюдается замкнутый обратимый эффект памяти формы. При уменьшении скорости изменения температуры напряжения  $\sigma_f$  не обращаются в нуль при  $T = M_f^0$ ,  $q = 0$  причем с уменьшением скорости охлаждения незавершенность эффекта обратимой памяти формы растет. С уменьшением скорости охлаждения для получения замкнутого двухпутевого эффекта памяти формы коэффициент наполнения  $\mu$  следует уменьшать.

На рис.6 изображены графики зависимости фазово-структурной деформации в волокнах композита от температуры при охлаждении волокон через интервал температур прямого превращения. Расчет проведен для различных скоростей охлаждения  $\theta$ . Кривая 1 соответствует  $\theta = 1/30$ , кривая 2 –  $\theta = 5$ , кривая 3 –  $\theta = 50$ , кривая 4 –  $\theta = 200$ , кривая 5 – упругому решению. Согласно рис.6 фазово-структурная деформация волокон, отсчитываемая от аустенитного состояния, растет при снижении температуры, причем величина деформации и скорость ее роста увеличивается с ростом скорости охлаждения. В момент окончания прямого превращения, т.е. при  $T = M_f^0$ ,  $q = 0$  фазово-структурная деформация  $\varepsilon^{phst}(0)$ , получаемая в предположении об упругом поведении связующего, равна 0.04, т.е. первоначально заданной величине  $\varepsilon^0$ , что соответствует осуществлению замкнутого двойного эффекта памяти формы. В то же время для решений, учитывающих вязко – упругие свойства связующего, величина  $\varepsilon^{phst}(0)$  меньше  $\varepsilon^0$  и уменьшается с уменьшением скорости изменения температуры. Таким образом, незамкнутость двойного эффекта памяти формы в композите растет с уменьшением скорости изменения температуры волокон.

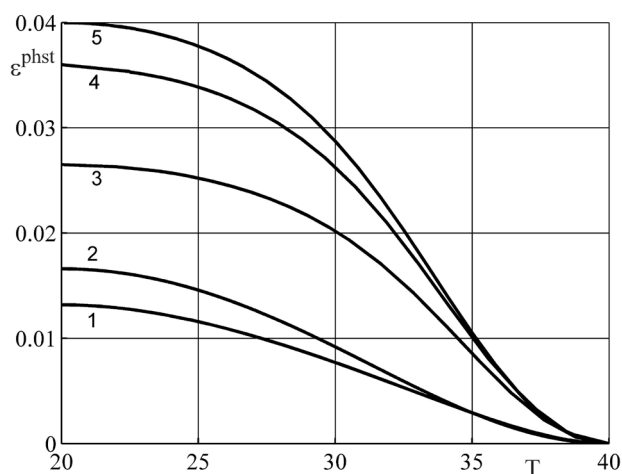


Рис.6.

#### 4.2. Результаты решения связанных задач.

Ниже приведены некоторые результаты решения задач о поведении композита при нагреве и последующем охлаждении волокон из СПФ в связанной постановке [25], т.е. с учетом влияния действующих напряжений на процессы фазовых переходов. Они получены путем интегрирования полной системы дифференциальных уравнений (3.6)-(3.8). Все задачи в связанной постановке решались для значений параметров связующего  $A = 1.68$ ,  $k = 0.32$ . Поскольку

связанные задачи решались с учетом объемного эффекта фазового превращения, то при решении этих задач предполагалось, что  $\mu = 0.262$ .

На рис.7 изображены графики зависимости напряжений в волокнах от температуры для процесса нагрева волокон с различными скоростями изменения температуры. Кривая 1 соответствует  $\theta = 1/30$ , 2 – 5, 3 – 50, 4 – 200 мин. Кривая 5 соответствует решению задачи в предположении упругого поведения связующего (или, что то же, предельно быстрому нагреву волокон). Кривые 1' – 5' соответствует решению аналогичной несвязанной задачи и приведены для сравнения. Согласно приведенным графикам, основные качественные особенности графиков зависимости  $\sigma_f$  от  $T$  (возрастание напряжений и приближение к упругому решению с ростом скорости нагрева, наличие участка убывания напряжений в конце процесса нагрева для средних скоростей нагревания, наличие участков только фазового-тонкие линии, и как фазового, так и структурного-толстые линии переходов) наблюдаются при решениях, как в несвязанной, так и в связанной постановках.

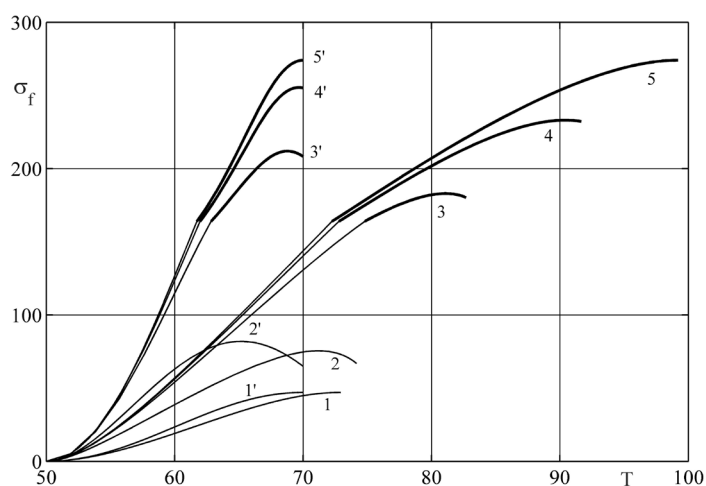


Рис.7.

Наиболее существенное различие этих решений состоит в том, что в случае связанной постановки верхняя граница температурного интервала процесса нагрева до окончания обратного превращения существенно возрастает, причем это возрастание тем больше, чем выше скорость нагрева. Эффект падения напряжений на заключительном этапе процесса нагрева для решения в несвязанной постановке выражен более существенно, чем в случае связанной постановки. Максимальные значения напряжений при решении в несвязанной постановке с учетом вязкоупругих свойств матрицы несколько превышают те же величины, полученные при решении в связанной постановке, тогда как в предположении об упругом поведении матрицы эти напряжения одинаковы [12], что подтверждается сравнением кривых 5 и 5' рис.7.

В случае, если после нагрева через полный интервал температур обратного фазового превращения композит выдерживается при постоянной температуре  $A_f^\sigma$ , происходит релаксация напряжения в связующем и уменьшаются напряжения в волокнах в соответствии с зависимостью (3.13). Толстые линии на рис.8 соответствуют процессу релаксации после полного обратного превращения в материале волокон при нагреве со скоростью изменения

температуры  $\theta = 200$  (линия 1) и  $\theta = 50$  (линия 2). Тонкие линии на рис.8 соответствуют этапам нагрева. Величина напряжений с течением времени асимптотически стремится к величине  $\sigma_A^\infty = 47.1$  МПа, определяемой по формуле (3.18).

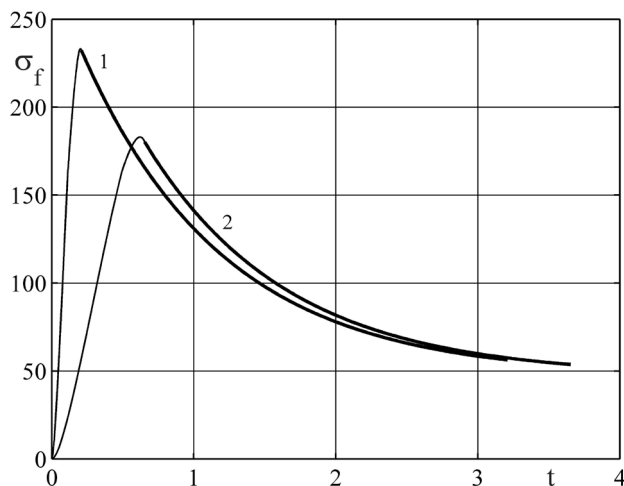


Рис.8.

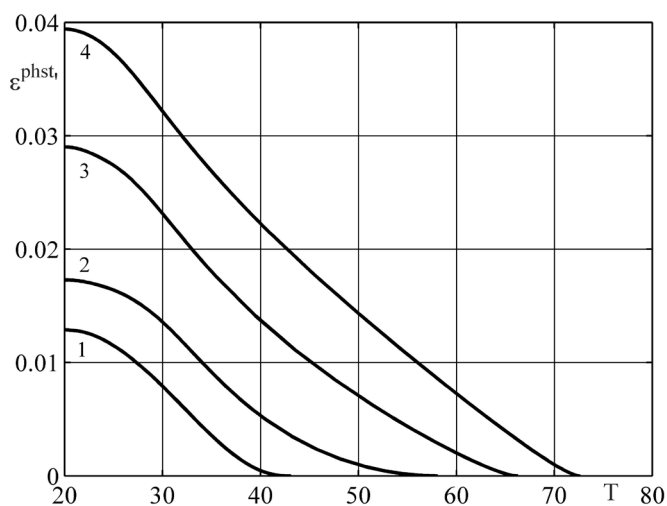


Рис.9.

На рис.9 приведены графики зависимости девиатора фазово-структурной деформации от температуры в процессе охлаждения волокон через интервал температур прямого мартенситного превращения проведенного сразу после процесса нагрева волокон через интервал температур обратного превращения. Кривая 1 соответствует скорости изменения температуры  $\theta = 5$ , кривая 2 –  $\theta = 50$ , кривая 3 –  $\theta = 200$ , кривая 4 – упругому решению. Для упругого решения заданная предварительно фазово-структурная деформация  $\varepsilon^0 = 0.04$  при полном прямом превращении полностью восстанавливается (видимое на графике отличие величиной 0.001 связано с тем, что по оси отложена девиаторная часть фазово-структурной деформации). Чем меньше скорость изменения температуры, тем меньше деформация при полном прямом превращении и дальше процесс от замкнутого. Сравнение графиков рис.6 и рис.9, соответствующих одинаковым значениям скорости изменения температуры,

свидетельствует о том, что при решении задачи в связанной постановке получается при прочих равных условиях большая незамкнутость эффекта обратимой памяти формы, чем при решении несвязанных задач.

### 4.3. Влияние скорости изменения температуры на двойной эффект памяти формы.

На рис.10 изображены графики изменения напряжения в волокнах  $\sigma_f$  от параметра фазового состава  $q$  для случаев обратного (начинается с  $q=1$ ,  $\sigma_f=0$ , заканчивается при  $q=0$ ) и прямого (начинается с  $q=0$  и заканчивается при  $q=1$ ) превращения. Петля 1 построена для случая упругого поведения матрицы и является полностью замкнутой, поскольку задача решена с учетом объемного эффекта фазового перехода и переменности упругих модулей для  $\mu = 0.262$ .

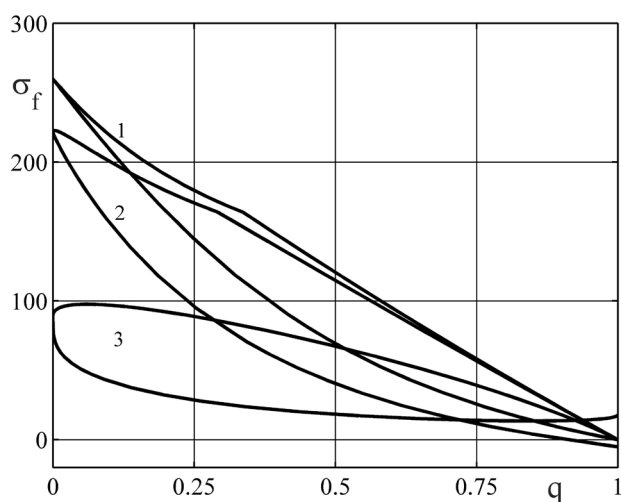


Рис.10.

Петля 2 построена с учетом вязкоупругих свойств связующего для высокой скорости изменения температуры  $\theta = 200$ . Эта петля характеризуется небольшой степенью незамкнутости, причем напряжение  $\sigma_f$  обращается в нуль еще до завершения прямого превращения. Следовательно, для обеспечения замкнутого характера петли для данной скорости изменения температуры необходимо несколько увеличить коэффициент наполнения  $\mu$ . Петля 3 построена для малой скорости изменения температуры  $\theta = 10$ . В данном случае форма петли далека от замкнутой, причем напряжение во всем процессе прямого превращения не опускается ниже 10 МПа и на завершающей стадии прямого превращения даже несколько возрастает. Таким образом, учет реономных свойств связующего приводит к переходу от замкнутой в предположении об упругом поведении матрицы петли к незамкнутой, причем с уменьшением скорости изменения температуры степень незамкнутости петли (отличие величины  $\sigma_f$  в момент окончания прямого превращения от нуля) растет.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Исследовано влияние вязкоупругих свойств связующего на процесс деформирования однонаправленного композита с волокнами из сплава с памятью формы при нагреве и охлаждения волокон. Свойства связующего соответствовали модели Кельвина.
2. При фиксированных значениях параметров материала волокон и заданной скорости нагрева и охлаждения процесс деформирования композита определяется величинами мгновенного и длительного модулей связующего.
3. С уменьшением скорости изменения температуры разница между решениями, получающимися в предположениях об упругом и вязкоупругом поведении связующего, увеличивается.
4. При средних скоростях нагрева волокон в конце процесса обратного превращения появляются участки убывания напряжения в волокнах с ростом температуры.
5. Если параметры композита подобраны так, что в предположении об упругом поведении связующего осуществляется замкнутый двухпутевой эффект памяти формы, то при учете вязкоупругих свойств связующего эффект перестает быть замкнутым, причем нарушение замкнутости тем больше, чем меньше скорость изменения температуры волокон. Для ликвидации разрыва петли следует уменьшать коэффициент наполнения.
6. При решении задачи в связанной постановке при прочих равных условиях незамкнутость эффекта обратимой памяти формы получается больше, чем при решении несвязанной задачи.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Michaud V. *Can shape memory alloy composites be smart?* // Scripta materialia. – 2004. – Vol.50. – Pp.249-253.
2. Rogers C.A., Liang G., Jia J. *Behavior of shape memory alloy reinforced composite plates* / In: Proceeding of the 30-th Structural, Structural Dynamics and Materials (SDM) conference. – 1989. – Part 4. – Pp.2011-2017.
3. Wei Z.G., Sandstrom R., Miyazaki S. *Shape memory materials and hybrid composites for smart systems. Part II. Shape-memory hybrid composites* // Journal of Materials Science. – 1998. – Vol.33. – Pp.3763-3783.
4. Liang C., Rogers C.A. *One dimensional thermomechanical constitutive relations for shape memory materials* // Journal of the Intelligent Material System and Structures. – 1990. – Vol.1. – No.2. – Pp.207-234.
5. Jia J., Rogers C.A. *Formulation of the mechanical model for composites with embedded SMA actuators* // Trans. ASME. J. of the Mechanical Design. – 1992. – Vol.114. – No.4. – Pp.670-676.
6. Fisher K., Extner A., Hornbogen E., Schmidt H. *The two way effect for mechanical hands* / In: Proceeding of the 31-th Structural, Structural Dynamics and Materials (SDM) conference. – 1990. – Part 1. – Pp.29-37.
7. Lee J.J., Choi S. *Thermal buckling and postbuckling analysis of a laminated composite beam with embedded SMA actuators* // Composite Structures. – 1999. – Vol.47. – Pp.695-703.
8. Kabir M.-Z. and Tehrani B.T. *Closed-form Solution for Thermal, Mechanical and Thermo-mechanical Buckling and Post-buckling of SMA Composite Beams* // Composite Structures. – 2017. – Vol.168. – Pp.535-548.

9. Armstrong W.D., Lorentzen T. *The self – thermal – plastic response of TiNi shape memory alloy fiber actuated metal matrix composites* // International Journal of Solids and Structures. – 2001. – Vol.38. – Pp.7029-7044.
10. Dano M.-L., Hyer M.W. *SMA-induced snap-through of unsymmetric fiber-reinforced composite laminates* // International Journal of Solids and Structure. – 2003. – Vol.40. – Pp.5949-5972.
11. Мовчан А.А., Казарина С.А. *Механика активных композитов, содержащих волокна или слои из сплавов с памятью формы* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1996. – Т.2. – №2. – С.29-48.
12. Movchan A.A., Chernov M.I. *Closed two-way shape memory effect in unidirectional composite with shape memory alloy fibers and elastic matrix*. Composites: Mechanics, Computations, Applications, 2019, Vol.10, Iss.2. Pp.135-156.
13. Zheng Y., Cui L., Li Y., Stalmans R. *Partial transformation behavior of prestrained TiNi fibers in composites* // Material Letters. – 2001. – Vol.51. – Pp.425-428.
14. Gordaninejad F., Wu W. *A two dimensional shape memory alloy/elastomer actuator* // International Journal of Solids and Structures. – 2001. – Vol.38. – Pp.3393-3409.
15. Cherkaoui M., Sun Q.P., Song G.Q. *Micromechanics modeling of composite with ductile matrix and shape memory alloy reinforcement* // International Journal of Solids and Structures. – 2000. – Vol.37. – Pp.1577-1594.
16. Мовчан А.А. *Микромеханический подход к описанию деформации мартенситных превращений в сплавах с памятью формы* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1995. – №1. – С.197-205.
17. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г., Сильченко Т.Л. *Учет явления мартенситной неупругости при обратном фазовом превращении в сплавах с памятью формы* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2011. – №2. – С.44-56.
18. Работнов Ю.Н. *Ползучесть элементов конструкций*. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
19. Кристенсен Р. *Введение в теорию вязкоупругости*. – М.: Мир, 1974. – 338 с.
20. Бленд Д.Р. *Теория линейной вязкоупругости*. – М.: Мир, 1965. – 200 с.
21. Мовчан А.А., Ньюнт Со *Термодинамическое описание поведения сплавов с памятью формы с помощью аддитивного потенциала Гиббса* // Журнал прикладной механики и технической физики. – 2006. – Т.47. – №4. – С.98-103.
22. Мишустин И.В., Мовчан А.А. *Моделирование фазовых и структурных превращений в сплавах с памятью формы, происходящих под действием немонотонно меняющихся напряжений* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2014. – №1. – С.37-53.
23. Мовчан А.А., Казарина С.А., Сильченко А.Л. *Экспериментальная идентификация модели нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях* // Деформация и разрушение материалов. – 2018. – №12. – С.2-11.
24. Мовчан А.А., Давыдов В.В. *Инкрементальные определяющие соотношения для объемной доли мартенситной фазы в сплавах с памятью формы* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2010. – Т.16. – №5. – С.653-661.
25. Мовчан А.А. *Исследование эффектов связности в задачах изгиба балок из сплава с памятью формы* // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1998. – Т.39. – №1. – С.87-97.
26. Мовчан А.А., Казарина С.А. *Материалы с памятью формы как объект механики деформируемого твердого тела: экспериментальные исследования,*

- определяющие соотношения, решение краевых задач // Физическая мезомеханика. – 2012. – Т.15. – №1. – С.105-116.*
27. Мовчан А.А., Сильченко А.Л., Казарина С.А. *Экспериментальное исследование и теоретическое моделирование эффекта перекрестного упрочнения сплавов с памятью формы // Деформация и разрушение материалов. – 2017. – №3. – С.20-27.*
  28. Мовчан А.А., Казарина С.А., Сильченко А.Л. *Эффект перекрестного упрочнения сплава с памятью формы при сжатии // Деформация и разрушение материалов. – 2019. – №4. – С.2-9.*
  29. Мовчан А.А. *Модель влияния фазового механизма деформирования на структурный в сплавах с памятью формы // Деформация и разрушение материалов. – 2019. – №7. – С.14-23.*
  30. Мовчан А.А. *Феноменологическая модель изменения фазово-структурных деформаций в сплавах с памятью формы // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2020. – №3. – С.58-70.*
  31. Кацнельсон М.Ю., Балаев Г.А. *Полимерные материалы. Свойства и применение. – Л.: Химия, 1982. – 317 с.*
  32. Naario, Raimo von Hertzen, Anssi T. Karttunen, Marko Jorkama. *Identification of the viscoelastic parameters of a polymer model by the aid of a MCMC method // Mechanics Research Communications. – 2014. – Vol.61. – Pp.1-6.*
  33. Gerlach S., Matzenmiller A. *Comparison of numerical methods for identification of viscoelastic line spectra from static test data // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 2005. – Vol.63. – Pp.428-454.*
  34. Park S.W., Kim Y.R. *Fitting Prony-series viscoelastic models with power-lawpresmoothing // J. Mater. Civil Eng. – 2001. – Vol.13. – No.1. – Pp.26-32.*
  35. Renaud F., Dion J.L., Chevallier G., Tawfiq I., Lemaire R. *A new identification method of viscoelastic behavior: application to the generalized Maxwell model // Mechanical Systems and Signal Processing. – 2011. – Vol.25. – No.3. – Pp.991-1010.*
  36. Lewandowski R., Chorzyczewski B. *Identification of the parameters of the Kelvin–Voigt and the Maxwell fractional models, used to modeling of viscoelastic dampers // Computers and Structures. – 2010. – Vol.88. – Pp.1-17.*
  37. Люкшин Б.А., Панин С.В., Корниенко Л.А., Люкшин П.А., Бочкарева С.А., Матолыгина Н.Ю., Гришаева Н.Ю., Реутов Ю.Я., Шилько С.В., Машков Ю.К., Плескачевский Ю.М., Кропотин О.В., Черноус Д.А. *Дисперсно-наполненные полимерные композиты технического и медицинского назначения. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2017. – 311 с.*

## REFERENCES

1. Michaud V. *Can shape memory alloy composites be smart? Scripta materialia, 2004, Vol.50, Pp.249-253.*
2. Rogers C.A., Liang G., Jia J. *Behavior of shape memory alloy reinforced composite plates. In: Proceeding of the 30-th Structural, Structural Dynamics and Materials (SDM) conference, 1989, Part 4, Pp.2011-2017.*
3. Wei Z.G., Sandstrom R., Miyazaki S. *Shape memory materials and hybrid composites for smart systems. Part II. Shape-memory hybrid composites. Journal of Materials Science, 1998, Vol.33, Pp.3763-3783.*

4. Liang C., Rogers C.A. *One dimensional thermomechanical constitutive relations for shape memory materials*. Journal of the Intelligent Material System and Structure, 1990, Vol.1, No.2, Pp.207-234.
5. Jia J., Rogers C.A. *Formulation of the mechanical model for composites with embedded SMA actuators*. Trans. ASME. J. of the Mechanical Design, 1992, Vol.114, No.4, Pp.670-676.
6. Fisher K., Extner A., Hornbogen E., Schmidt H. *The two way effect for mechanical hands*. In: Proceeding of the 31-th Structural, Structural Dynamics and Materials (SDM) conference, 1990, Part 1, Pp.29-37.
7. Lee J.J., Choi S. *Thermal buckling and postbuckling analysis of a laminated composite beam with embedded SMA actuators*, Composite Structures, 1999, Vol.47, Pp.695-703.
8. Kabir M.-Z. and Tehrani B.T. *Closed-form Solution for Thermal, Mechanical and Thermo-mechanical Buckling and Post-buckling of SMA Composite Beams*. Composite Structures, 2017, Vol.168, Pp.535-548.
9. Armstrong W.D., Lorentzen T. *The self – thermal – plastic response of TiNi shape memory alloy fiber actuated metal matrix composites*. International Journal of Solids and Structures, 2001, Vol.38, Pp.7029-7044.
10. Dano M.-L., Hyer M.W. *SMA-induced snap-through of unsymmetric fiber-reinforced composite laminates*. International Journal of Solids and Structure, 2003, Vol.40, Pp.5949-5972.
11. Movchan A.A. Kazarina S.A. *Mekhanika aktivnykh kompozitov, soderzhashhikh volokna ili sloi iz splavov s pamyat'yu formy [Mechanics of active composites, containing fibres or layers from shape memory alloys]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 1996, Vol.2, No.2, Pp.29-48.
12. Movchan A.A., Chernov M.I. *Closed two-way shape memory effect in unidirectional composite with shape memory alloy fibers and elastic matrix*. Composites: Mechanics, Computations, Applications, 2019, Vol.10, Iss.2. Pp.135-156.
13. Zheng Y., Cui L., Li Y., Stalmans R. *Partial transformation behavior of prestrained TiNi fibers in composites*. Material Letters, 2001, Vol.51, Pp.425-428.
14. Gordaninejad F., Wu W. *A two dimensional shape memory alloy/elastomer actuator*. International Journal of Solids and Structures, 2001, Vol.38, Pp.3393-3409.
15. Cherkaoui M., Sun Q.P., Song G.Q. *Micromechanics modeling of composite with ductile matrix and shape memory alloy reinforcement*. International Journal of Solids and Structures, 2000, Vol.37, Pp.1577-1594.
16. Movchan A.A. *Micromechanical description of the deformation due to martensite transformations in shape – memory alloys*. Mechanics of Solid, 1995, Vol.30, No.1, Pp.186-194.
17. Movchan A.A., Sil'chenko L.G., Sil'chenko T.L. *Taking into account of the martensite inelasticity in reverse phase transformation in shape memory alloys*. Mechanics of Solids, 2011, Vol.46, No.2, Pp.194-203.
18. Rabotnov Yu.N. *Polzuchest' ehlementov konstruksij [Creep of Structure Elements]*. Moskva, Nauka, 1966, 752 p.
19. Christensen R.M. *Theory of viscoelasticity. An Introduction*. Acadmic Press, New York and London, 1971, 384 p.
20. Bland D.R. *The theory of Linear Viscoelasticity*. Oxford, 1960, 125 p.



21. Movchan A.A., Soe N. *Thermodynamic description of the behavior of shape memory alloys by an additive Gibbs potential*. Applied Mechanics and Technical Physics, 2006, Vol.47, No.4, Pp.542-546.
22. Mishustin I.V., Movchan A.A. *Modeling of phase and structure transformations occurring in shape memory alloys under nonmonotonically varying stresses*. Mechanics of Solids, 2014, Vol.49, No.1, Pp.27-39.
23. Movchan A.A., Kazarina S.A., Sil'chenko A.L. *Experimental Identification of a Nonlinear Deformation Model for a Shape Memory Alloy during Phase and Structural Transformations*. Russian Metallurgy (Metally), 2019, No.4, Pp.301-308.
24. Movchan A.A., Davydov V.V. *Inkremental'nye opredelyayushhie sootnosheniya dlya ob'emnoj doli martensitnoj fazy v splavakh s pamyat'yu formy [Incremental constitutive relation for martensite volume part parameter in shape memory alloys]* Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2010, Vol.16, No.5, Pp.653-661.
25. Movchan A.A. *Coupling effects in bending problems for beams of a shape memory alloy*. Applied Mechanics and Technical Physics. Plenum Publishing Corporation. 1998, Vol.39, No.1, Pp.143-151.
26. Movchan A.A., Kazarina S.A. *Shape memory materials as an object of solid state mechanics: experimental study, constitutive relations, solution of boundary value problems*. Physical Mesomechanics, 2012, Vol.15, No.3-4, Pp.214-223.
27. Movchan A.A., Sil'chenko A.L., Kazarina S.A. *Experimental Study and Theoretical Simulation of the Cross Hardening Effect in Shape Memory Alloys*. Russian Metallurgy (Metally), 2017, Vol.2017, No.1, Pp.779-784.
28. Movchan A.A., Kazarina S.A., Sil'chenko A.L. *Cross Hardening of a Shape Memory Alloy during Compression*. Russian Metallurgy (Metally), 2019, Vol.2019, No.10, Pp.967-973.
29. Movchan A. A. *Model for the Effect of the Phase Mechanism of Deformation on the Structural Mechanism in Shape Memory Alloys*. Russian Metallurgy (Metally), 2020, Vol.2020, No.4, Pp.282-290.
30. Movchan A.A. *Fenomenologicheskaya model' izmeneniya fazovo-strukturnykh deformatsij v splavakh s pamyat'yu formy [Phenomenological simulation of phase-structure strain changing in shape memory alloys]*. Izvestiya rossijskoj akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela, 2020, No.4, Pp.58-70.
31. Katsnelson M.Iu. Balaev G.A. *Polimernye materialy. Svoystva i primenenie [Polymeric materials. Properties and applications]*. Leningrad, Khimiya, 1982, 317 p.
32. Haario, Raimo von Herten, Anssi T. Karttunen, Marko Jorkama. *Identification of the viscoelastic parameters of a polymer model by the aid of a MCMC method*. Mechanics Research Communications, 2014, Vol.61, Pp.1-6.
33. Gerlach S., Matzenmiller A. *Comparison of numerical methods for identification of viscoelastic line spectra from static test data*. Int. J. Numer. Meth. Eng., 2005, Vol.63, Pp.428-454.
34. Park S.W., Kim Y.R. *Fitting Prony-series viscoelastic models with power-lawpresmoothing*. J. Mater. Civil Eng., 2001, Vol.13, No.1, Pp.26-32.
35. Renaud F., Dion J.L., Chevallier G., Tawfiq I., Lemaire R. *A new identification method of viscoelastic behavior: application to the generalized Maxwell model*. Mechanical Systems and Signal Processing, 2011, Vol.25, No.3, Pp.991-1010.

36. Lewandowski R., Chorazyczewski B. *Identification of the parameters of the Kelvin–Voigt and the Maxwell fractional models, used to modeling of viscoelastic dampers*. Computers and Structures, 2010, Vol.88, Pp.1-17.
37. Lyukshin B.A., Panin S.V., Kornienko L.A., Lyukshin P.A., Bochkareva S.A., Matolygina N.Yu., Grishaeva N.Yu., Reutov Yu.Ya., Shil'ko S.V., Mashkov Yu.K., Pleskachevskij Yu.M., Kropotin O.V., Chernous D.A. *Dispersno-napolnennye polimernye kompozity tekhnicheskogo i meditsinskogo naznachenii [Dispersed-filled polymer composites for technical and medical purposes]*. Novosibirsk, Izdatel'stvo SO RAN, 2017, 311 p.

*Поступила в редакцию 28 июля 2020 года.*

---

Сведения об авторах:

Мовчан Андрей Александрович – д.ф.-м.н., проф., г.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: [movchan47@mail.ru](mailto:movchan47@mail.ru)

Чернов Михаил Игоревич – студент, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия