

УДК 539.3

DOI 10.33113/mkmk.ras.2020.26.03.371_386.06

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ И ПРАКТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕСОВМЕЩНОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ В МОДЕЛИ СПЛАВА С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ*

Мишустин И.В.

ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Для учета несовместности деформаций, вызванной фазово-структурным деформированием мартенсита, в выражение термодинамического потенциала сплава с памятью формы (СПФ) введены дополнительные слагаемые, выраженные через две материальные функции. Первая из них характеризует несовместность деформаций между мартенситными образованиями и аустенитной матрицей. Вторая функция связана с несовместностью деформаций между различно ориентированными мартенситными образованиями и между разными вариантами ориентации мартенсита внутри них. Рассмотрен вопрос о знаке дополнительных слагаемых и аргументах соответствующих функций. Если за базовое состояние принят хаотический мартенсит без упрочнения, то слагаемое, учитывающее несовместность деформаций в мартенсите, меньше или равно нулю и увеличивается по модулю с возрастанием степени ориентированности мартенсита. Слагаемое, учитывающее несовместность деформаций между мартенситом и аустенитом, равно нулю в однофазных состояниях и больше нуля в двухфазном. Подробно рассмотрен СПФ с однородным упрочнением мартенситной части представительного объема. Сформулированы условия неотрицательности механической части диссипации, которая представлена в виде суммы слагаемых, связанных с фазовыми переходами и структурным превращением. Из этих условий получены ограничения, накладываемые на материальные функции, учитывающие несовместность деформаций, и сдвиги характерных температур фазовых переходов. В частности, при обратном фазовом переходе без нагрузки в образце из СПФ, имеющем в мартенситном состоянии ненулевую фазово-структурную деформацию, температуры начала и окончания перехода увеличиваются, а диапазон перехода сужается по сравнению с образцом из хаотического мартенсита, что согласуется с результатами ряда экспериментов. Продемонстрирована методика определения материальных функций, характеризующих несовместность деформаций в СПФ, по экспериментальным данным. Выбран вид этих функций и путем аппроксимации найдены входящие в их выражения постоянные. При этом удовлетворены ограничения, обеспечивающие неотрицательность механической части диссипации.

Ключевые слова: сплавы с памятью формы; термодинамический потенциал; несовместность деформаций; фазовые переходы; структурное превращение

THEORETICAL DESCRIPTION AND PRACTICAL DETERMINATION OF THE STRAIN INCOMPATIBILITY IN THE MODEL OF A SHAPE MEMORY ALLOY

Mishustin Ilya V.

*Работа выполнена в рамках госбюджетной темы АААА-А19-119012290118-3 при частичном финансовом содействии РФФИ (грант № 20-20-01-00240)

ABSTRACT

To take into account the strain incompatibility caused by phase-structural deformation of martensite, additional terms are added to the expression for the thermodynamic potential of a shape memory alloy (SMA). These terms are expressed through two material functions. The first of them characterizes the strain incompatibility between martensite formations and the austenite matrix. The second function is associated with the strain incompatibility between differently oriented martensite formations and between different variants of martensite orientation within these formations. The issue of the sign of additional terms and the arguments of corresponding functions is considered. If chaotic martensite without hardening is taken as the base state, then the term taking into account the strain incompatibility in martensite is less than or equal to zero and increases in modulus with an increase in the degree of orientation of martensite. The term that takes into account the strain incompatibility between martensite and austenite is zero in single-phase states and positive in two-phase state. The SMA with homogeneous hardening of the martensitic part of representative volume is considered in detail. The conditions for the nonnegativity of the mechanical part of dissipation represented as a sum of terms associated with phase transitions and structural transformation are formulated. From these conditions, the restrictions imposed on the material functions, taking into account the strain incompatibility, and the shifts of characteristic temperatures of phase transitions are derived. In particular, in the case of a reverse phase transition without loading in the SMA sample having a nonzero phase-structural strain, the transition start and end temperatures increase and the transition interval narrows in comparison with the chaotic martensite sample, which is consistent with the results of a number of experiments. A technique for determining material functions characterizing the strain incompatibility in the SMA using experimental data is demonstrated. The form of these functions is chosen and constants included in their expressions are found by fitting. At the same time, the restrictions ensuring the nonnegativity of the mechanical part of dissipation are satisfied.

Keywords: shape memory alloys; thermodynamic potential; strain incompatibility; phase transitions; structural transformation

ВВЕДЕНИЕ

При описании механического поведения СПФ термодинамический потенциал его единичного объема принято представлять в виде суммы аддитивной части, полученной по правилу смеси из потенциалов аустенитной ψ_A и мартенситной ψ_M фаз путем суммирования с умножением на объемные доли, и дополнительного слагаемого ψ_1 , которое называют энергией взаимодействия фаз

$$\psi = q\psi_M + (1-q)\psi_A + \psi_1,$$

где q – объемная доля мартенсита. Обзор разных моделей и выражений ψ_1 приведен в [1]. В простейшем случае принимается

$$\psi_1 = Hq(1-q), \quad (1)$$

где H является постоянной величиной или линейно зависит от температуры. Кроме двухфазных моделей СПФ, существуют трехфазные [2-3], в которых предполагается наличие в представительном объеме как хаотического мартенсита (с нулевой осредненной деформацией формоизменения), так и ориентированного (образующегося из аустенита под действием высоких напряжений

или в результате раздвоения хаотического). В моделях [4-5] учитывается каждый вариант ориентации мартенсита и взаимодействие их между собой и с аустенитной матрицей. При формулировке выражения энергии взаимодействия фаз используется решение упругой задачи о бесконечной матрице с включением, получившим в ходе внутренних процессов определенную деформацию [6]. В результате ψ_1 записывается как функция объемных долей и фазово-структурных деформаций всех вариантов ориентации мартенсита. В простейшем случае однородной деформации мартенсита (когда формируется один вариант его ориентации) получается выражение (1) с H в виде квадратичной формы компонент тензора собственной фазово-структурной деформации мартенсита.

Влияние ψ_1 и подобных слагаемых термодинамического потенциала на характерные температуры фазовых переходов в указанных исследованиях не описывается. Однако ряд экспериментальных работ [7-9] свидетельствуют о существенной зависимости граничных значений температурного интервала обратного фазового перехода A_s и A_f от накопленной фазово-структурной деформации даже в случае перехода в ненагруженном состоянии. Чем больше интенсивность предварительной фазово-структурной деформации, независимо от пути ее накопления – в ходе прямого фазового перехода с охлаждением образца, изотермического нагружения в мартенситном или аустенитном состоянии, тем больше увеличиваются температуры A_s и A_f вплоть до сдвигов на 20-30°C.

В моделях нелинейного деформирования СПФ, изложенных в [10-15], используется термодинамический потенциал Гиббса, полученный преобразованием Лежандра свободной энергии по термоупругой деформации

$$\psi(\sigma_{ij}, T, q, \varepsilon_{ij}^{phst}, \chi_*) = U - TS - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{eT},$$

где U и S – объемные плотности внутренней энергии и энтропии. Основными термодинамическими параметрами в этом случае являются σ_{ij} – напряжение, T – температура, q – объемная доля мартенсита, ε_{ij}^{phst} – фазово-структурная деформация, отсчитываемая от аустенитного состояния и в сумме с термоупругой ε_{ij}^{eT} составляющая полную деформацию ε_{ij} . Дополнительные параметры, от которых может зависеть потенциал, обозначены χ_* .

Элементарная механическая диссипация единицы объема равна

$$D_1 dt = \left(\sigma_{ij} - \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}^{phst}} \right) d\varepsilon_{ij}^{phst} - \frac{\partial \psi}{\partial q} dq - d_* \psi \geq 0, \quad (2)$$

где $d_* \psi$ – приращение потенциала за счет изменения дополнительных параметров χ_* . Здесь второе слагаемое связано с фазовыми переходами, тогда как первое слагаемое меняется как при фазовых переходах, так и при структурном превращении. Для разделения влияния этих процессов используются определяющие соотношения нелинейной теории деформирования СПФ [12-15]

$$d\varepsilon_{ij}^{phst} = d\varepsilon_{ij}^{ph} + d\varepsilon_{ij}^{st}, \quad d\varepsilon_{ij}^{ph} = (\delta_{ij} \varepsilon_0 + \omega_{ij}) dq, \quad (3)$$

$$\omega_{ij} = \frac{3}{2} \rho(\mu_\sigma) \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} [1 - qf_1(q)] \varphi_1(\sigma_i) + f_1(q) \varepsilon_{ij}^{phst'} \quad \text{при } dq \geq 0, \quad (4)$$

$$\omega_{ij} = [1 - qf_2(q)] \hat{\varepsilon}'_{ij} + f_2(q) \varepsilon_{ij}^{phst'} \quad \text{при } dq \leq 0,$$

где ε_0 – линейная деформация объемного эффекта прямого фазового перехода, σ'_{ij} и σ_i – девиатор и интенсивность напряжения, $\varepsilon_{ij}^{phst'}$ – девиатор фазово-структурной деформации, φ_1 – монотонно возрастающая от 0 до 1 материальная функция, $f_1(q)$ и $f_2(q)$ – удельные скорости роста и уменьшения объема мартенситных образований при прямом и обратном фазовых переходах, значения которых находятся в диапазоне от 0 до $1/q$, ρ – предельная интенсивность фазово-структурной деформации мартенситного объема $\bar{\varepsilon}_i$, зависящая от параметра μ_ε вида его деформированного состояния, $\hat{\varepsilon}'_{ij}$ – девиатор осредненной фазово-структурной деформации исчезающих мартенситных образований. В формуле (4) ρ относится к зародившемуся в текущий момент объему мартенсита, параметр μ_ε которого равен μ_σ – параметру вида текущего напряженного состояния. Безразмерные параметры μ_ε и μ_σ выражаются через третий инвариант девиатора и интенсивность тензора фазово-структурной деформации и напряжений соответственно

$$\mu_\varepsilon = 4I_3(D_{\bar{\varepsilon}})/\bar{\varepsilon}_i^3, \quad \mu_\sigma = 27I_3(D_\sigma)/(2\sigma_i^3).$$

Если считать термодинамический потенциал единицы объема СПФ равным сумме термоупругих потенциалов мартенсита и аустенита для малых деформаций, помноженных на объемные доли фаз [10-11]

$$\psi^{eT}(\sigma_{ij}, T, q) = q\psi_M^{eT} + (1-q)\psi_A^{eT},$$

а коэффициент температурного расширения и теплоемкость единицы объема при постоянном напряжении одинаковыми в мартенситном и аустенитном состояниях, то выражение элементарной механической диссипации (2) преобразуется к виду

$$D_1 dt = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^{st} + [T_* + \Delta T - T] \Delta S_0 dq \geq 0, \quad (5)$$

$$\Delta T \Delta S_0 = \sigma_{ij} \omega_{ij} + Z(\sigma_i, \sigma_{kk}) + \sigma_{kk} \varepsilon_0, \quad T_* = \Delta U_0 / \Delta S_0, \quad (6)$$

$$6Z(\sigma_i, \sigma_{kk}) = (K_M^{-1} - K_A^{-1}) \sigma_{kk}^2 + (G_M^{-1} - G_A^{-1}) \sigma_i^2,$$

$$\Delta S_0 = S_{0A} - S_{0M}, \quad \Delta U_0 = U_{0A} - U_{0M},$$

где σ_{kk} – первый инвариант тензора напряжений, K и G – утроенный объемный и сдвиговой упругие модули, U_0 и S_0 – объемные плотности внутренней энергии и энтропии в ненагруженном состоянии при отсчетной температуре, индексы М и А относятся к мартенситу и аустениту.

Первое слагаемое в правой части выражения (5) связано со структурным превращением, а второе с фазовыми переходами, и оно будет неотрицательным при выполнении условий

$$T \leq M_s^0 + \Delta T \quad \text{при } dq \geq 0; \quad T \geq A_s^0 + \Delta T \quad \text{при } dq \leq 0, \quad (7)$$

$$M_s^0 \leq T_* \leq A_s^0,$$

согласующихся с законом изменения объемной доли мартенсита q , который в случае однофазного начального состояния принимается в виде [14-15]

$$\begin{aligned}
 q &= \zeta(t), \quad t = (M_s^0 + \Delta T - T)(M_s^0 - M_f^0)^{-1} \quad \text{при } dq \geq 0, \\
 q &= \zeta(1-t), \quad t = (T - A_s^0 - \Delta T)(A_f^0 - A_s^0)^{-1} \quad \text{при } dq \leq 0,
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

где ζ – материальная функция, монотонно возрастающая от 0 до 1; M_s^0 , M_f^0 и A_s^0 , A_f^0 – начальные и конечные температуры прямого и обратного фазовых переходов в отсутствии напряжения и деформации формоизменения мартенсита. q меняет значение при условии непрерывного роста параметра t . В общем случае с учетом выражений (4) и (6) температурный сдвиг ΔT зависит от параметров σ_{ij} , q и $\varepsilon_{ij}^{phst'}$, а граничные температуры фазовых переходов M_s , M_f , A_s , A_f согласно (8) смещены относительно M_s^0 , M_f^0 , A_s^0 , A_f^0 на значения ΔT в соответствующие моменты процесса. Из (6) следует, что в отсутствие напряжения $\Delta T = 0$, то есть при $\psi = \psi^{eT}$ невозможно описать упомянутый выше эффект влияния накопленной фазово-структурной деформации на характерные температуры обратного фазового перехода.

В работе [16] введены два дополнительных к ψ^{eT} слагаемых. Первое из них зависит от q и позволяет описывать поведение СПФ с узким гистерезисом, для которого не выполняется последнее условие (7), поскольку $M_s^0 > A_s^0$. Второе слагаемое зависит от фазово-структурной деформации и влияет на характерные температуры фазовых переходов. Полученные условия неотрицательности механической части диссипации весьма сложные, и их выполнение не всегда очевидно. Анализ экспериментальных данных по влиянию фазово-структурной деформации на начальную температуру обратного фазового перехода в отсутствие напряжений проведен в [17]. В [18] предложено для описания этого эффекта добавить в выражение потенциала Гиббса слагаемое, зависящее от интенсивности фазово-структурной деформации. Изменение диапазона $A_f - A_s$ при этом не рассматривалось.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ НЕСОВМЕЩНОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ В СПФ

Несовместность деформаций в СПФ имеет место не только между мартенситными образованиями и аустенитной матрицей, но и внутри мартенситной фазы. Конкретный вид учитывающих эту несовместность слагаемых термодинамического потенциала и параметры, от которых они зависят, связаны со сложной структурой мартенситной фазы [1-3].

Переход из аустенита в мартенсит предполагает целый ряд вариантов ориентации мартенситных ячеек относительно аустенитной матрицы. Мартенсит формируется в виде образований типа пластин или игл, состоящих из ячеек нескольких ориентаций, сопряженных (сдвойникованных) одним из возможных способов [19]. В свою очередь, мартенситные образования в общем случае также ориентированы по-разному. В ходе структурного превращения мартенситные образования могут менять форму, число вариантов ориентации мартенсита в них и объединяться между собой. Поэтому термодинамический потенциал СПФ

в однофазном мартенситном состоянии должен учитывать несовместность деформаций между мартенситными образованиями и внутри каждого из них.

О различии плотностей внутренней энергии хаотического и ориентированного мартенсита можно судить по экспериментальным кривым дифференциальной сканирующей калориметрии (ДСК) при обратном фазовом переходе, приведенным в работах [7-8]. Согласно этим данным, площадь выступающей части кривой ДСК, коррелирующая с количеством поглощаемого латентного тепла и разницей объемных плотностей внутренней энергии аустенита и мартенсита, в случае образца, начальное состояние которого соответствует хаотическому мартенситу, больше аналогичной площади в случае предварительно деформированного образца (независимо от способа получения фазово-структурной деформации). Отсюда следует, что плотность внутренней энергии хаотического мартенсита больше, чем у ориентированного.

Знак дополнительного к термоупругому потенциалу мартенсита слагаемого зависит от того, какая мартенситная структура принята за базовое состояние. Очевидно, что несовместность деформаций отсутствует в идеальном состоянии полностью ориентированного мартенсита, которое нереализуемо для поликристаллического материала с дефектами кристаллической решетки. С другой стороны, у хаотического мартенсита несовместность деформаций и потенциал больше, чем у частично ориентированного, что согласуется с описанными выше экспериментальными данными.

Следует также отметить, что только по девиатору осредненной фазово-структурной деформации нельзя судить о микроструктуре мартенсита. Путем реверсивного нагружения можно изменить эту структуру, добившись одинаковой с исходной фазово-структурной деформации. Упрочнение при этом также изменится. Поэтому слагаемое, учитывающее несовместность деформаций в мартенсите, должно зависеть не только от его фазово-структурной деформации, но и от других параметров, характеризующих микроструктуру.

Таким образом, дополнительные слагаемые в термодинамическом потенциале СПФ должны быть двух типов. Если за базовое состояние принят хаотический мартенсит, то слагаемое, учитывающее несовместность деформаций в ориентированном мартенсите, отрицательное и тем больше по модулю, чем ближе интенсивность фазово-структурной деформации к предельному значению. Слагаемое, учитывающее несовместность деформаций мартенсита и аустенита равно нулю в однофазных состояниях и положительное в двухфазном.

Предложенная в [12-15] модель нелинейного деформирования СПФ в общем случае формирования мартенсита под действием меняющегося напряжения предполагает неравномерную деформацию и неоднородное упрочнение мартенситной части представительного объема. Считается, что она состоит из мартенситных элементов – неизменных по составу групп одновременно зародившихся мартенситных образований. Объемная доля мартенситного элемента меняется в результате его роста при прямом фазовом переходе и уменьшения при обратном. Фазово-структурная деформации мартенситного элемента изменяется в ходе структурного превращения, описываемого аналогом теории пластического течения с изотропным и трансляционным упрочнением [20]. Каждому мартенситному элементу сопоставлена собственная поверхность нагружения, положение центра и радиус которой в пространстве девиатора напряжений задают тензор остаточных микронапряжений и параметр изотропного упрочнения. Число мартенситных элементов меняется путем зарождения новых

и исчезновения (перехода в аустенит) имеющихся элементов при прямом и обратном фазовых переходах. Если удельные скорости роста f_1 и уменьшения объема f_2 одинаковые для всех мартенситных образований, то фазовые переходы описываются формулами (3-4).

Основываясь на вышесказанном, примем за базовые состояния СПФ аустенит и хаотический мартенсит. Введем функцию $\phi_M \leq 0$ как дополнительное к ψ_M^{eT} слагаемое термодинамического потенциала единицы объема мартенсита, учитывающее несовместность деформаций между мартенситными образованиями и внутри них. Эта функция зависит от собственной фазово-структурной деформации и параметров упрочнения мартенситного объема, то есть в случае СПФ с неоднородным упрочнением принимает разные значения для разных мартенситных элементов. Потенциал единичного объема СПФ в двухфазном состоянии состоит из аддитивной части, вычисленной по правилу смеси как сумма потенциалов мартенситных элементов и аустенитной матрицы, помноженных на их объемные доли, и дополнительного слагаемого в виде функции $\phi_{MA} \geq 0$, зависящей от девиаторов собственных фазово-структурных деформаций и объемных долей всех имеющихся мартенситных элементов.

Для поликристаллического СПФ без текстуры, являющегося изотропным и разносопротивляющимся, зависимость от девиатора собственной фазово-структурной деформации мартенситного объема $\bar{\varepsilon}_{ij}'$ эквивалентна зависимости от его инвариантов, через которые выражается относительная интенсивность этой деформации $e = \bar{\varepsilon}_i / \rho(\mu_\varepsilon)$. По истории ее изменения определяется параметр изотропного упрочнения e_{\max} . Будем считать, что ϕ_M зависит от e вместо $\bar{\varepsilon}_{ij}'$. Функция ϕ_{MA} может также зависеть от относительных интенсивностей e имеющихся мартенситных элементов. Другими аргументами функции ϕ_M являются e_{\max} и тензор (девиатор) остаточных микронапряжений r_{ij} , то есть два его инварианта, вместо которых по аналогии с $\bar{\varepsilon}_{ij}'$ может быть использован один аргумент в виде интенсивности r_i или отношения r_i к предельному значению при монотонном нагружении мартенсита напряжением, пропорциональным r_{ij} . Обоснование этих предположений, как и наличия других аргументов у ϕ_M , требует дополнительных экспериментальных исследований.

Для дальнейшего анализа функций ϕ_M и ϕ_{MA} перейдем к случаю, когда все мартенситные элементы имеют одинаковую деформацию и параметры упрочнения, то есть мартенситная часть представительного объема равномерно деформирована и является однородно упрочненной (или считается таковой). Это имеет место, когда мартенсит сформирован путем охлаждения под действием постоянного напряжения. Структурное превращение такого мартенсита без возобновления прямого фазового перехода (если он не закончен) и обратный фазовый переход не меняют указанное свойство. Также однородное упрочнение может быть теоретически достигнуто в результате структурного превращения неоднородно упрочненного мартенсита.

В этом случае $\varepsilon_{ij}^{phst} = \bar{\varepsilon}_{ij} q$. Изменение $\bar{\varepsilon}_{ij}$ описывается по аналогии с теорией пластического течения уравнениями [14,15,20]

$$\begin{aligned} d\bar{\varepsilon}_{ij} &= d\lambda S_{ij} \text{ при } \varphi_2(S_i) = e_{\max} \text{ и } S_{ij} d\sigma_{ij} > 0, \\ dr_{ij} &= g(\sigma_i, \mu_S) d\bar{\varepsilon}_{ij}, \quad \sigma'_{ij} = S_{ij} + r_{ij}, \quad e = \bar{\varepsilon}_i / \rho(\mu_\varepsilon), \end{aligned} \quad (9)$$

где S_{ij} – активное напряжение. Материальная функция φ_2 монотонно возрастает от 0 до 1 с ростом интенсивности активного напряжения и описывает изотропное упрочнение с параметром e_{\max} , равным максимальному значению величины e за все время от начала формирования мартенсита до текущего момента. Описывающая трансляционное упрочнение знакоположительная материальная функция g зависит от интенсивности напряжения и меняется вместе с видом активного напряженного состояния, характеризуемого параметром $\mu_S = 27I_3(D_S) / (2S_i^3)$.

Для осуществления структурного превращения должны выполняться два условия активного нагружения, приведенные в (9). Упрочнение может быть либо чисто трансляционным, либо комбинированным с изотропным при выполнении дополнительных условий

$$e = e_{\max}, \quad P = p_{ij} S_{ij} > 0. \quad (10)$$

Приращения e и e_{\max} выражаются в виде

$$de = p_{ij} d\bar{\varepsilon}_{ij}, \quad de_{\max} = \delta_c P d\lambda. \quad (11)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} p_{ij} \rho(\mu_\varepsilon) &= \frac{2}{3} \frac{\bar{\varepsilon}'_{ij}}{\bar{\varepsilon}_i} - e R_{ij}, \quad R_{ij} = \rho'(\mu_\varepsilon) \frac{\partial \mu_\varepsilon}{\partial \bar{\varepsilon}'_{ij}}, \\ d\lambda &= \frac{3}{2} \frac{S_{ij} d\sigma'_{ij}}{S_i} \left[g(\sigma_i, \mu_S) S_i + \frac{\delta_c P}{\varphi'_2(S_i)} \right]^{-1} > 0, \end{aligned}$$

$\delta_c = 1$ при выполнении условий изотропного упрочнения (10), иначе $\delta_c = 0$.

Термодинамический потенциал СПФ представляется в виде

$$\psi = \psi^{eT} + q\phi_M(e, r_{ij}, e_{\max}) + \phi_{MA}(\bar{\varepsilon}_{ij}, q).$$

В результате его подстановки в формулу (2) с учетом равенств (3), (9-11) получим следующее выражение механической диссипации

$$\begin{aligned} D_1 dt &= \left[\left(\sigma_{ij} - \frac{\partial \phi_M}{\partial e} p_{ij} - g \frac{\partial \phi_M}{\partial r_{ij}} \right) q S_{ij} - \frac{\partial \phi_{MA}}{\partial \bar{\varepsilon}'_{ij}} S_{ij} - \delta_c \frac{\partial \phi_M}{\partial e_{\max}} q P \right] d\lambda + \\ &+ [T_* + \Delta T - T] \Delta S_0 dq \geq 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Условия неотрицательности второго слагаемого выражения (12), связанного с фазовыми переходами, сохраняют вид (7) при уточненном выражении смещения характерных температур

$$\Delta T \Delta S_0 = \sigma_{ij} \omega_{ij} + Z(\sigma_i, \sigma_{kk}) + \sigma_{kk} \varepsilon_0 - \phi_M - \frac{\partial \phi_{MA}}{\partial q}, \quad (13)$$

где последние два слагаемых учитывают несовместность деформаций. Первое из них неотрицательное, а второе меньше или равно нулю при $q = 0$ и неотрицательное при $q = 1$. Таким образом, при ненулевой интенсивности осредненной фазово-структурной деформации мартенсита $\bar{\varepsilon}_i > 0$ несовместность деформаций внутри него увеличивает характерные температуры фазовых

переходов, а несовместность деформаций между мартенситом и аустенитом может сужать температурные интервалы фазовых переходов. Несовместность, вызванная объемной фазовой деформацией мартенсита, будучи учтенной в $\phi_{МА}$, влияла бы на смещение ΔT при любом значении $\bar{\varepsilon}_i$. Однако согласно (8) это смещение отсчитывается от экспериментально определяемых граничных температур фазовых переходов при нулевом напряжении, когда $\bar{\varepsilon}_i = 0$. Поэтому функция $\phi_{МА}$ должна обращаться в ноль вместе с $\bar{\varepsilon}_i$.

Первое слагаемое выражения (12) представляет механическую диссипацию при структурном превращении. Ее часть, не связанная с несовместностью деформаций, пропорциональна свертке $\sigma_{ij} S_{ij}$, которая имеет неотрицательное значение, если начало отсчета в пространстве компонент девиатора напряжений находится внутри поверхности нагружения мартенсита (то есть снятие нагрузки не приводит к неупругому деформированию). Параметр e_{\max} меняется только при комбинированном упрочнении, когда выполняются условия (10), путем возрастания вместе со степенью ориентированности мартенсита, так что производная ϕ_M по нему очевидно отрицательная. Поэтому рассматриваемая диссипация будет всегда неотрицательная, если ϕ_M зависит только от e_{\max} , а несовместность деформаций между мартенситом и аустенитом пренебрежимо мала, то есть можно считать $\phi_{МА} = 0$.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСОВМЕЩНОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Как было описано выше, несовместность деформаций, вызванная фазово-структурным деформированием СПФ, влияет на температурные интервалы фазовых переходов даже в ненагруженном состоянии. Поэтому для определения материальных функций, характеризующих эту несовместность, можно использовать данные соответствующих экспериментов.

В качестве примера рассмотрим экспериментальные данные, приведенные в статье [7]. Образцы в виде холоднотянутой проволоки из равноатомного NiTi, отожженные при 560°C в течение 20 мин с закалкой в воде, растягивались в мартенситном состоянии до заданного удлинения. После разгрузки из них вырезались пробы, по которым строились кривые ДСК при обратном фазовом переходе без нагрузки. Результаты обработки диаграммы нагружения и кривых ДСК приведены в таблице 1.

Для каждой полной деформации удлинения ε , достигнутой в мартенситном состоянии, вычислена остаточная деформация ε_R после упругой разгрузки с модулем Юнга 28 ГПа. Ее зависимость от растягивающего напряжения σ аппроксимировалась по ряду точек, полученных по диаграмме растяжения в мартенситном состоянии. Остаточная деформация является суммой фазово-структурной ε^{phst} и пластической ε^p деформаций, для аппроксимации которых соответственно использовались сумма двух функций распределения Вейбулла и степенная функция

$$\varepsilon^{phst}(\sigma) = \varepsilon_1 W_1(\sigma) + \varepsilon_2 W_2(\sigma), \quad \varepsilon^p(\sigma) = 0.2\%(\sigma/\beta_3)^{\alpha_3}$$

$$W_k(\sigma) = 1 - \exp\left[-(\sigma/\beta_k)^{\alpha_k}\right], \quad k = 1, 2$$

Таблица 1.

Результаты обработки экспериментальных данных.

$\varepsilon, \%$	$\varepsilon_R, \%$	$\varepsilon^{phst}, \%$	e	$A_s, ^\circ\text{C}$	$A_f, ^\circ\text{C}$
0	0	0	0	91.2	121.7
3	2.504	2.503	0.280	95.4	124.3
5	4.440	4.438	0.497	116.4	134.5
7	6.263	6.257	0.701	124.3	140.8
9	7.914	7.863	0.880	134.8	150.4
11	9.372	8.903	0.997	135.2	151.4
15	12.628	8.931	1.000	141.2	163.3

В результате аппроксимации зависимости $\varepsilon_R(\sigma)$ со средней квадратичной ошибкой $\text{RSME}=0.254\%$ и критерием уточненный R-квадрат $\text{ARS}=0.9975$ получены следующие значения параметров (α_1 был выбран предварительно)

$$\varepsilon_1 = 5.17 \%, \quad \varepsilon_2 = 3.76 \%, \quad \alpha_1 = 8, \quad \alpha_2 = 3.365, \quad \alpha_3 = 5.484,$$

$$\beta_1 = 150 \text{ МПа}, \quad \beta_2 = 284 \text{ МПа}, \quad \beta_3 = 390 \text{ МПа},$$

Соответствующие им значения ε^{phst} и $e = \varepsilon^{phst} / (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ приведены в третьем и четвертом столбцах таблицы 1. В последних двух столбцах находятся значения температур A_s и A_f , найденные по пикам кривых ДСК и указанным в статье разницам между этими температурами и пиками.

Так как в рассматриваемом эксперименте мартенсит является однородно упрочненным, и влияние параметров упрочнения при одинаковой осредненной деформации не исследовалось, будем искать функции ϕ_M и ϕ_{MA} в виде

$$\phi_M = -\psi_1(e)\Delta S_0, \quad \phi_{MA} = q(1-q)\psi_2(e)\Delta S_0,$$

где $\psi_1(e)$ и $\psi_2(e)$ – монотонно возрастающие функции, равные нулю при $e = 0$.

Формулы (12) и (13) принимают вид (штрихом обозначены производные)

$$D_1 dt = \left\{ \sigma_{ij} S_{ij} + \Delta S_0 \left[\psi_1'(e) - (1-q)\psi_2'(e) \right] p_{ij} S_{ij} \right\} q d\lambda + \\ + [T_* + \Delta T - T] \Delta S_0 dq \geq 0 \quad (14)$$

$$\Delta T = \left[\sigma_{ij} \omega_{ij} + Z(\sigma_i, \sigma_{kk}) + \sigma_{kk} \varepsilon_0 \right] \Delta S_0^{-1} + \psi_1(e) - (1-2q)\psi_2(e).$$

Неотрицательность второго слагаемого (14) обеспечивают условия (7). При этом

$$A_s(e) = A_s^0 + \psi_1(e) + \psi_2(e), \quad A_f(e) = A_f^0 + \psi_1(e) - \psi_2(e), \quad (15)$$

$$\psi_2(1) < \frac{1}{2}(A_f^0 - A_s^0) \quad (16)$$

откуда можно найти зависимости $\psi_1(e)$ и $\psi_2(e)$ по известным $A_s(e)$ и $A_f(e)$.

Ограничение (16) следует из условия $A_f - A_s > 0$. В случае комбинированного упрочнения для неотрицательности представленной первым слагаемым (14) диссипации при структурном превращении достаточно выполнения $\psi_1'(e) > \psi_2'(e)$, так как $p_{ij} S_{ij} > 0$ согласно (10). Однако эта свертка может иметь отрицательное значение в случае чисто трансляционного упрочнения.

В частности, при пропорциональном нагружении, когда каждый девиатор выражается через скалярный параметр и постоянный направляющий девиатор σ_{ij}^0

$$\sigma'_{ij} = \sigma \sigma_{ij}^0, \quad S_{ij} = S \sigma_{ij}^0, \quad \varepsilon'_{ij} = \frac{3}{2} \varepsilon \sigma_{ij}^0, \quad \frac{3}{2} \sigma_{ij}^0 \sigma_{ij}^0 = 1, \quad \sigma_{ij}^0 \sigma_{ij}^0 \sigma_{ij}^0 > 0,$$

условие неотрицательности первого слагаемого выражения (14) сводится к

$$\Delta S_0^{-1} \rho |\sigma| + \text{sign}(S\varepsilon) [\psi'_1(e) - (1-q)\psi'_2(e)] \geq 0, \quad (17)$$

где ρ принимает одно из двух значений $\rho_{\pm} = \rho_{\text{sign}(\varepsilon)} = \rho(\mu_0 \text{sign}(\varepsilon))$. Если известны функции φ_2 и g , то зависимость $S = \varphi_s(\sigma)$ при монотонном пропорциональном нагружении определенного вида находится путем решения обыкновенного дифференциального уравнения [15]. Кривая нагружения этого процесса описывается функцией $e = \varphi_3(|\sigma|) = \varphi_2(\varphi_s(|\sigma|))$. Из неравенства (17) следуют ограничения

$$\psi'_1(e) - \psi'_2(e) \geq -\Delta S_0^{-1} \rho |\sigma|, \quad \psi'_1(e) \leq \Delta S_0^{-1} \rho [2\varphi_s(|\sigma|) - |\sigma|], \quad (18)$$

$$\psi'_1(0) = \psi'_2(0) = 0. \quad (19)$$

Первое из них получено для структурного превращения с комбинированным упрочнением, когда $S\varepsilon > 0$, второе для структурного превращения с чисто трансляционным упрочнением после реверса нагрузки [15] в начальной точке этапа, когда $S\varepsilon < 0$, e имеет максимальное, а $|\sigma|$ минимальное значение.

С помощью функции φ_3 неравенства (18) записываются через один параметр $|\sigma|$ или e . Условие (19) получено с учетом $\varphi_3(0) = \varphi_s(0) = 0$.

По результатам аппроксимации диаграммы нагружения можно найти функцию φ_3 и параметр $\rho_1 = \rho(1)$

$$\rho_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad \rho_1 \varphi_3(|\sigma|) = \varepsilon_1 W_1(|\sigma|) + \varepsilon_2 W_2(|\sigma|).$$

Для определения функции φ_s при нагружении определенного вида (в данном случае при растяжении) помимо диаграммы монотонного пропорционального нагружения нужно знать начальный участок неупругого деформирования с таким же видом напряженного состояния после реверса нагрузки (растяжения после сжатия), когда происходит структурное превращение с чисто трансляционным упрочнением. Если этот участок с точностью до постоянного значения описывает функция G , так что $|\varepsilon| = \rho_1 G(|\sigma|) + \text{const}$, то функция φ_s равна

$$\varphi_s(|\sigma|) = \int_0^{|\sigma|} [1 - \varphi'_3(x) G'(x)^{-1}] dx.$$

По аналогии с [15] примем $G(|\sigma|) = 2.5(|\sigma|/\sigma_0)^3$, где $\sigma_0 = 180$ МПа. При этом выполняются условия монотонности изотропного упрочнения $\varphi'_2(|S|) \geq 0$ и нахождения начала отсчета пространства компонент девиатора напряжений внутри или на поверхности нагружения $|2S - \sigma| \geq 0$.

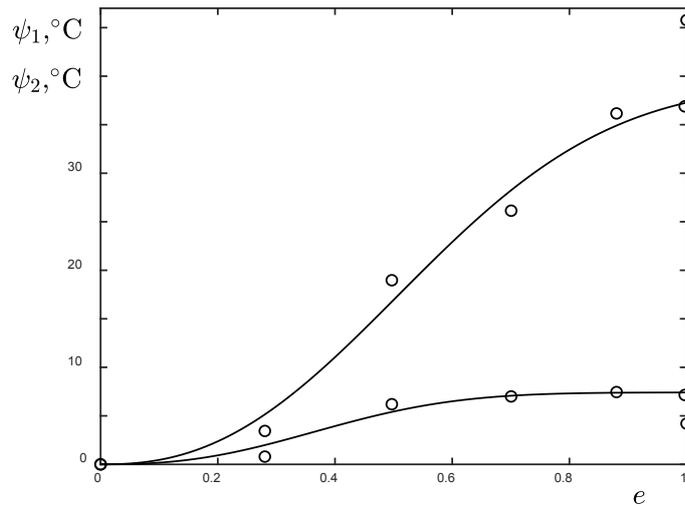


Рис.1. Аппроксимация функций $\psi_1(e)$ и $\psi_2(e)$.

На рис.1 показаны зависимости $\psi_1(e)$ и $\psi_2(e)$ – верхняя и нижняя кривые. Кружками отмечены точки, вычисленные по данным таблицы 1 согласно формулам (15). Кривые получены в результате аппроксимации, для которой с учетом условий (19) и расположения экспериментальных точек были выбраны функции распределения Вейбулла

$$\psi_1(e) = T_1 \bar{W}_1(e), \quad \psi_2(e) = T_2 \bar{W}_2(e),$$

$$\bar{W}_k(e) = 1 - \exp\left[-\left(e/\bar{\beta}_k\right)^{\bar{\alpha}_k}\right], \quad k = 1, 2.$$

Точки, полученные при $\varepsilon = 15\%$, соответствуют практически предельной фазово-структурной деформации и выпадают из общего ряда. Поэтому они были исключены при аппроксимации, в результате которой получены значения параметров ($\bar{\alpha}_2$ был выбран предварительно)

$$T_1 = 39.2 \text{ }^\circ\text{C}, \quad \bar{\alpha}_1 = 2.4, \quad \bar{\beta}_1 = 0.634,$$

$$T_2 = 7.4 \text{ }^\circ\text{C}, \quad \bar{\alpha}_2 = 2.5, \quad \bar{\beta}_2 = 0.447.$$

Показатели $\text{RSME} = 2.16^\circ\text{C}$, $\text{ARS} = 0.9816$ и $\text{RSME} = 0.728^\circ\text{C}$, $\text{ARS} = 0.9546$ для зависимостей $\psi_1(e)$ и $\psi_2(e)$ соответственно. Условие (16) выполняется, так как

$$\psi_2(1) = 7.41 \text{ }^\circ\text{C} < \frac{1}{2}(A_f^0 - A_s^0) = 15.25 \text{ }^\circ\text{C}.$$

На рис.2 приведены графики производных $\psi_1'(e)$ и $\psi_2'(e)$ – средняя и нижняя кривые. Верхняя кривая $\eta(e)$ – правая часть второго условия (18), выраженная через e с помощью функции, обратной φ_3 , при $\Delta S_0 = 0.46 \text{ МПа/К}$ [21].

Как видно, условия неотрицательности механической части диссипации при структурном превращении (18) выполняются для любого e . Отметим, что значения функции $\psi_2(e)$ и ее производной $\psi_2'(e)$ намного меньше значений $\psi_1(e)$ и $\psi_1'(e)$ соответственно, то есть влияние несовместности деформаций между мартенситом и аустенитом на смещение характерных температур фазовых переходов и на диссипацию намного меньше, чем влияние несовместности деформаций внутри мартенситной фазы.

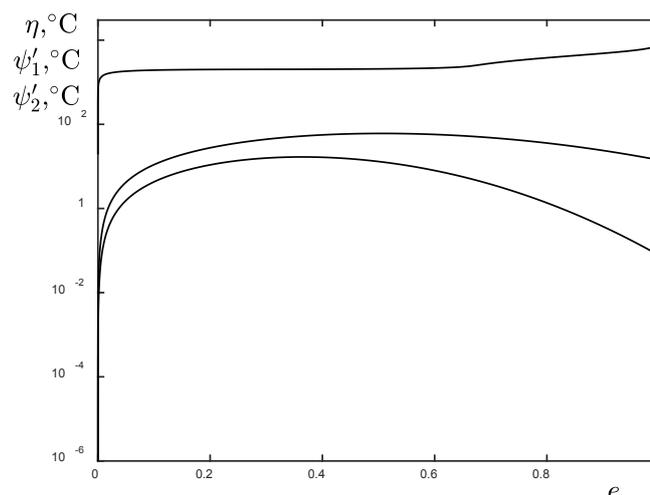


Рис.2. Проверка выполнения условий (18).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Несовместность деформаций в СПФ, вызванную фазово-структурным деформированием мартенсита, предложено учитывать через дополнительные слагаемые термодинамического потенциала. Обоснована необходимость введения двух типов слагаемых, учитывающих несовместность деформаций между мартенситными образованиями и аустенитной матрицей и между различно ориентированными мартенситными образованиями внутри мартенситной фазы. При таком разделении проще решается вопрос о знаке и аргументах каждого слагаемого, а также полнее учитывается влияние несовместности деформаций на характерные температуры фазовых переходов. Сформулированы условия неотрицательности механической части диссипации при фазовых переходах и структурном превращении и следующие из них ограничения, накладываемые на материальные функции, учитывающие несовместность деформаций. Эти функции можно определить по сдвигам характерных температур обратного фазового перехода в ненагруженном состоянии. Методика такого определения путем аппроксимации экспериментальных зависимостей продемонстрирована на конкретном примере.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lexcelent C. *Shape-memory alloys handbook*. – London: ISTE Ltd and John Wiley & Sons Inc., 2013. – 379 p.
2. Lagoudas D.C. (Ed.). *Shape Memory Alloys: Modeling and Engineering Applications*. – Springer, 2008. – 436 p.
3. Ziolkowski A. *Pseudoelasticity of Shape Memory Alloys: Theory and Experimental Studies*. – Elsevier, 2015. – 246 p.
4. Huang M., Brinson L.C. *A multivariant model for single crystal shape memory alloy behavior* // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1998. – Vol.46. – No.8. – Pp.1379-1409.
5. Zhang S., McCormick P.G. *Thermodynamic analysis of shape memory phenomena – I. Effect of transformation plasticity on elastic strain energy* // Acta Materialia. – 2000. – Vol.48. – No.12. – Pp.3081-3089.
6. Эшелби Дж. *Теория непрерывных дислокаций*. – М.: ИИЛ, 1963. – 248с.

7. Uchil J., Mahesh K.K., Ganesh Kumara K. *Calorimetric study of the effect of linear strain on the shape memory properties of Nitinol* // Physica B. – 2001. – Vol.305. – No.1. – Pp.1-9.
8. Liu Y., Favier D. *Stabilisation of martensite due to shear deformation via variant reorientation in polycrystalline NiTi* // Acta Materialia. – 2000. – Vol.48. – No.13. – Pp.3489-3499.
9. Tan G., Liu Y., Sittner P., Saunders M. *Lüders-like deformation associated with stress-induced martensitic transformation in NiTi* // Scripta Materialia. – 2004. – Vol.50. – No.2. – Pp.193-198.
10. Мовчан А.А., Ньют Со. *Термодинамическое описание поведения сплавов с памятью формы с помощью аддитивного потенциала Гиббса* // Журнал прикладной механики и технической физики. – 2006. – Т.47. – №4. – С.98-103.
11. Мишустин И.В. *О фазовых переходах в стержне из сплава с памятью формы под действием электрического напряжения при неоднородном начальном фазовом состоянии* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2010. – Т.16. – №4/2. – С.629-638.
12. Мишустин И.В., Мовчан А.А. *Моделирование фазовых и структурных превращений в сплавах с памятью формы, происходящих под действием немонотонно меняющихся напряжений* // Изв. РАН. МТТ. – 2014. – №1. – С.37-53.
13. Мовчан А.А., Мишустин И.В., Казарина С.А. *Вариант микроструктурной модели деформирования сплавов с памятью формы* // Деформация и разрушение материалов. – 2017. – №5. – С.6-11.
14. Мишустин И.В. *Трехуровневая модель сплава с памятью формы и ее применение к описанию эффекта реверсивной памяти формы* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2012. – Т.18. – №4. – С.463-474.
15. Мишустин И.В. *Модель деформирования сплава с памятью формы с учетом разнсопротивляемости* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2017. – Т.23. – №4. – С.484-498.
16. Мовчан А.А., Мишустин И.В. *Анализ неаддитивных добавок к потенциалу Гиббса сплава с памятью формы* // Известия РАН. Серия Физическая. – 2006. – Т.70. – №9. – С.1388-1395.
17. Мовчан А.А., Казарина С.А., Сильченко А.Л. *Влияние неупругих деформаций на температуру начала обратного термоупругого превращения в сплавах с памятью формы. Часть 1. Анализ экспериментальных данных* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т.24. – №3. – С.362-376.
18. Мовчан А.А., Казарина С.А., Сильченко А.Л. *Влияние неупругих деформаций на температуру начала обратного термоупругого превращения в сплавах с памятью формы. Часть 2. Термодинамическая модель* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2019. – Т.25. – №1. – С.3-18.
19. Nishida M., Nishiura T., Kawano H., Inamura T. *Self-accommodation of B19' martensite in Ti–Ni shape memory alloys – Part I. Morphological and crystallographic studies of the variant selection rule* // Philosophical Magazine. – 2012. – Vol.92. – No.17. – Pp. 2215–2233.
20. Мишустин И.В., Мовчан А.А. *Аналог теории пластического течения для описания деформации мартенситной неупругости в сплавах с памятью формы* // Изв. РАН. МТТ. – 2015. – №2. – С.78-95.

21. Lagoudas D.C., Bo Z. *Thermomechanical modeling of polycrystalline SMAs under cyclic loading, Part II: material characterization and experimental results for a stable transformation cycle* // International Journal of Engineering Science. – 1999. – Vol.37. – No.9. – Pp.1141-1173.

REFERENCES

1. Lexcelent C. *Shape-memory alloys handbook*. London, ISTE Ltd and John Wiley & Sons Inc., 2013, 379 p.
2. Lagoudas D.C. (Ed.). *Shape Memory Alloys: Modeling and Engineering Applications*. Springer, 2008, 436 p.
3. Ziolkowski A. *Pseudoelasticity of Shape Memory Alloys: Theory and Experimental Studies*. Elsevier, 2015, 246 p.
4. Huang M., Brinson L.C. *A multivariant model for single crystal shape memory alloy behavior*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1998, Vol.46, No.8, Pp.1379-1409.
5. Zhang S., McCormick P.G. *Thermodynamic analysis of shape memory phenomena – I. Effect of transformation plasticity on elastic strain energy*. Acta Materialia, 2000, Vol.48, No.12, Pp.3081-3089.
6. *Collected Works of J.D. Eshelby: The Mechanics of Defects and Inhomogeneities*. Springer, 2006, 939 p.
7. Uchil J., Mahesh K.K., Ganesh Kumara K. *Calorimetric study of the effect of linear strain on the shape memory properties of Nitinol*. Physica B, 2001, Vol.305, No.1, Pp.1-9.
8. Liu Y., Favier D. *Stabilisation of martensite due to shear deformation via variant reorientation in polycrystalline NiTi*. Acta Materialia, 2000, Vol.48, No.13, Pp.3489-3499.
9. Tan G., Liu Y., Sittner P., Saunders M. *Lüders-like deformation associated with stress-induced martensitic transformation in NiTi*. Scripta Materialia, 2004, Vol.50, No.2, Pp.193-198.
10. Movchan A.A., Soe N. *Thermodynamic description of the behavior of shape memory alloys by an additive Gibbs potential*. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2006, Vol.47, No.4, Pp.542-546.
11. Mishustin I.V. *O fazovykh perekhodakh v sterzhne iz splava s pamyat'yu formy pod dejstviem ehlektricheskogo napryazheniya pri neodnorodnom nachal'nom fazovom sostoyanii [On phase transitions in shape memory alloy bar under the action of voltage in case of heterogeneous initial phase state]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2010, Vol.16, No.4/2, Pp.629-638.
12. Mishustin I.V., Movchan A.A. *Modeling of phase and structure transformations occurring in shape memory alloys under nonmonotonically varying stresses*. Mechanics of Solids, 2014, Vol.49, No.1, Pp.27-39.
13. Movchan A.A., Mishustin I.V., Kazarina S.A. *Microstructural model for the deformation of shape memory alloys*. Russian Metallurgy (Metally), 2018, No.4, Pp.316-321.
14. Mishustin I.V., Movchan A.A. *The microstructural model of mechanical behavior of a shape-memory alloy*. Nanoscience and Technology: An International Journal, 2016, Vol.7, No.1, Pp.77-91.

15. Mishustin I.V. *Nanostructural model of shape memory alloy with resistance asymmetry behavior*. Nanoscience and Technology: An International Journal, 2018, Vol.9, No.2, Pp.165-181.
16. Movchan A.A., Mishustin, I.V. *Analysis of nonadditive parts of Gibbs potential for shape memory alloys*. Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics, 2006, Vol.70, No.9, Pp.1589-1598.
17. Movchan A.A., Kazarina S.A., Sil'chenko A.L. *Vliyanie neuprugikh deformatsij na temperaturu nachala obratnogo termouprugogo prevrashheniya v splavakh s pamyat'yu formy. Chast' 1. Analiz ehksperimental'nykh dannyx [The influence of inelastic deformations on the reverse thermoelastic transformation start temperature in shape memory alloys. Part 1. Analysis of experimental data]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2018, Vol.24, No.3, Pp.362-376.
18. Movchan A.A., Kazarina S.A., Sil'chenko A.L. *Vliyanie neuprugikh deformatsij na temperaturu nachala obratnogo termouprugogo prevrashheniya v splavakh s pamyat'yu formy. Chast' 2. Termodinamicheskaya model' [The influence of inelastic deformations on the reverse thermoelastic transformation start temperature in shape memory alloys. Part 2. Thermodynamic model]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2019, Vol.25, No.1, Pp.3-18.
19. Nishida M., Nishiura T., Kawano H., Inamura T. *Self-accommodation of B19' martensite in Ti–Ni shape memory alloys – Part I. Morphological and crystallographic studies of the variant selection rule*. Philosophical Magazine, 2012, Vol.92, No.17, Pp. 2215-2233.
20. Mishustin I.V., Movchan A.A. *Analog of the plastic flow theory for describing martensitic inelastic strains in shape memory alloys*. Mechanics of Solids, 2015, Vol.50, No.2, Pp.176-190.
21. Lagoudas D.C., Bo Z. *Thermomechanical modeling of polycrystalline SMAs under cyclic loading. Part II: material characterization and experimental results for a stable transformation cycle*. International Journal of Engineering Science, 1999, Vol.37, No.9, Pp.1141-1173.

Поступила в редакцию 30 июня 2020 года.

Сведения об авторе:

Мишустин Илья Владимирович – к.ф.-м.н., с.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: lewis@nextmail.ru