

УДК 539.4

DOI 10.33113/mkmk.ras.2020.26.04.441_454.01

ОПИСАНИЕ ЯВЛЕНИЯ СВЕРХУПРУГОСТИ В РАМКАХ ОБЪЕДИНЕННОЙ МОДЕЛИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ СПЛАВОВ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ С УЧЕТОМ РАЗВИТИЯ МАРТЕНСИТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Гаганова Н.В.

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
г. Москва, Россия*

АННОТАЦИЯ

В статье исследуется модель деформирования сплавов с памятью формы, которая позволяет отразить особенности фазовой и структурной деформации. Модель построена с учетом того, что эффект упрочнения характерен для структурного перехода, но не проявляется при фазовых переходах. Приращение деформаций за счёт структурного перехода определяется по аналогии с теорией пластичности с изотропным упрочнением с использованием поверхности нагружения. Деформированное состояние определяется единым параметром, изменение которого может быть вызвано как фазовым, так и структурным переходом. Приращение неупругих деформаций, обусловленное структурным переходом в активном процессе, определяется ассоциированным законом.

В статье исследуются возможности модели для описания явления сверхупругости. Температура, при которой начинается фазовый переход в сплавах с памятью формы, зависит от действующих напряжений, поэтому фазовый переход может при определенных условиях происходить при постоянной температуре. В некотором диапазоне напряжений наблюдается нелинейная зависимость деформаций от напряжений, что можно объяснить фазово-структурным переходом. В данной работе рассматривается пропорциональное монотонное нагружение при постоянной температуре и вызванный изменением напряжений прямой и обратный фазовый переход. Используются соотношения, позволяющие распространить модель на случай учета развития мартенситных элементов при фазовом и структурном переходе. Построены графики фазово-структурных и фазовых деформаций в зависимости от напряжений. Показано, что модель позволяет качественно правильно описать явление сверхупругости. Проведено сравнение результатов, полученных для разных материальных функций, определяющих соотношение между процессами зарождения и развития мартенситных элементов. Показано, что в рассмотренных условиях нагружения для больших значений температуры и для материальных функций, позволяющих учесть развитие мартенситных элементов, значения фазовых деформаций оказываются выше

Ключевые слова: сплавы с памятью формы; фазовые и структурные превращения; деформационное упрочнение; сверхупругость

SUPERELASTICITY DESCRIPTION BASED ON THE COMBINED MODEL OF SHAPE MEMORY ALLOYS DEFORMATION CONSIDERING DEVELOPMENT OF THE MARTENSITIC ELEMENTS

Gaganova N.V.

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

ABSTRACT

The article considers a constitutive model for shape memory alloys, which allows to take into account the differences between phase and structural transformation. The model reflects the fact that hardening effect is typical for structural transformation, but not for phase transformation. Deformation due to structural transformation is described with the use of loading surface by analogue of the plasticity theory with isotropic hardening. The deformed state is determined by one parameter, which can be changed by phase or structural deformation. Inelastic deformation due to structural transformation in the active process is subject to the associated flow rule.

The article examines the possibilities of the model for describing the phenomenon of superelasticity. The temperature of the phase transition in shape memory alloys depends on the operating stress, so the phase transition can occur at the constant temperature. In a certain range of stresses, dependence of deformations on stresses becomes nonlinear. This phenomenon can be explained by a phase-structural transition. In this paper, a proportional monotonic loading at a constant temperature and phase transitions caused by increasing and decreasing stresses.

The model is extended to the case of the development of martensitic elements during the phase and structural transition. Phase-structural and phase deformations plots are provided. It is shown that the model allows to describe the phenomenon of superelasticity correctly. The obtained results are compared for different material functions that determine the relationship between the processes of origin and development of martensitic elements. It is shown that under the considered loading conditions, phase deformations increase with temperature. The values of phase deformations are higher for material functions that take into account the development of martensitic elements.

Keywords: shape memory alloys; phase and structural transformations; hardening; superelasticity

ВВЕДЕНИЕ

Для сплавов с памятью формы характерны два механизма создания неупругих деформаций, связанные с фазовыми и структурными переходами [1,2]. Между ними наблюдаются принципиальные различия: для деформаций, связанных со структурным переходом и переориентацией мартенсита, в отличие от фазовых деформаций, характерны особенности деформационного упрочнения [3]. Также рост фазовых деформаций, в отличие от структурных, может происходить как при уменьшающихся напряжениях, так и при их отсутствии [4].

Несмотря на перечисленные различия, процессы накопления фазовых и структурных деформаций тесно связаны друг с другом. Так, в [5-7] было показано, что радиус поверхности нагружения для структурных деформаций сплавов с памятью формы зависит от величины фазовой деформации в текущий момент времени. Эти экспериментальные данные привели к попыткам создать объединенную модель фазово-структурного деформирования сплавов с памятью формы (СПФ), в рамках которой деформированное состояние определяется единым параметром – фазово-структурной деформацией, изменение которой может происходить и за счет фазового, и за счет структурного переходов. В [8-15] были предложены различные объединенные модели деформирования СПФ, однако они не учитывали все особенности фазовой и структурной деформации, поскольку либо строились полностью аналогично теории пластичности, либо не учитывали эффекта деформационного упрочнения.

В [16] была предложена объединенная модель фазового-структурного деформирования СПФ, в которой приращение фазовых деформаций определяется

упрощенным вариантом соотношений из [10], а приращение структурных деформаций определяется по аналогии с теорией пластичности с изотропным упрочнением. При этом на поверхность нагружения влияют и структурные, и фазовые деформации, таким образом, учитывается эффект перекрестного упрочнения. По аналогии с теорией пластичности, в [16] формулируется дифференциальное условие активного нагружения и появления структурных деформаций, которое выражает требование сонаправленности тензора приращений структурных деформаций внешней нормали к поверхности нагружения и положительности параметра упрочнения, связанного со структурным переходом. В [17] было рассмотрено распространение данной модели на случай учета развития мартенситных элементов. Было показано, что модель позволяет описать процессы перекрестного упрочнения и ориентированного превращения и проведено сравнение результатов, полученных для различных материальных функций, определяющих соотношение между процессами зарождения и развития мартенситных элементов.

В данной работе рассматривается применение объединенной модели, предложенной в [16], для описания явления сверхупругости. Температура, при которой начинается фазовый переход в сплавах с памятью формы, зависит от действующих напряжений, поэтому прямой и обратный фазовый переход могут при определенных условиях происходить при постоянной температуре [18,19]. При достижении напряжением пороговых значений наблюдается переход от линейной зависимости деформаций от напряжений к нелинейной, что можно объяснить фазово-структурным переходом, вызванным изменением напряжений. В данной работе описано применение расширенной модели, предложенной в [16], для описания сверхупругости в никеле-титановых сплавах и проводится сравнение результатов, полученных для различных материальных функций, определяющих соотношение между процессами зарождения и развития мартенситных элементов. Показано, что объединенная модель фазово-структурного деформирования СПФ позволяет качественно правильно описать явление сверхупругости.

1. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

По аналогии с [16], приращение деформации за счет фазового перехода определяется следующими соотношениями из [3]

$$d \varepsilon_{ij}^{ph'} = \frac{3}{2} \rho_1 \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} \varphi_1(\sigma_i) (1 - qf(q)) dq + f(q) \varepsilon_{ij}^{phst'} dq, \quad dq > 0, \quad (1)$$

$$d \varepsilon_{ij}^{ph'} = \frac{\varepsilon_{ij}^{phst'}}{q} dq, \quad dq < 0, \quad (2)$$

где σ_{ij} , σ_i – тензор напряжений и его интенсивность, штрихом обозначены компоненты девиаторов, q – параметр фазового состава, ρ_1 – материальный параметр, обозначающий предельное значение интенсивности деформаций, накапливаемых при прямом превращении, $f(q)$ – материальная функция, определяющая соотношение между процессами зарождения и развития мартенситных элементов, которая удовлетворяет ограничениям $0 \leq f(q) \leq 1/q$, $\varphi_1(\sigma_i)$ – интегральная функция распределения интенсивности микронапряжений

в представительном объеме СПФ в аустенитном фазовом состоянии. Предполагается, что функция $\varphi_1(x)$ дифференцируема, $\varphi_1(x) = 0$ при $x \leq 0$, функция монотонно возрастает и асимптотически стремится к 1 при $x \rightarrow +\infty$.

Зависимость параметра фазового состава q от напряжений и температуры определяется соотношениями

$$q = \frac{1}{2}(1 - \cos(\pi t)), \quad (3)$$

$$t = \frac{M_s^\sigma - T_0}{M_s^0 - M_f^0}, \quad M_s^\sigma = M_s^0 + \frac{\rho_1 \sigma_i \varphi_1(\sigma_i)}{\Delta S_0} \quad \text{при } dq > 0, \quad (4)$$

$$t = \frac{A_f^\sigma - T_0}{A_f^0 - A_s^0}, \quad A_s^\sigma = A_s^0 + \frac{\rho_1 \sigma_i \varphi_1(\sigma_i)}{\Delta S_0} \quad \text{при } dq < 0, \quad (5)$$

где T_0 – текущее значение температуры, $M_s^0, M_f^0, A_s^0, A_f^0$ – температуры начала и окончания соответственно прямого и обратного превращения в отсутствие напряжений (верхний индекс ноль); те же символы с верхним индексом σ соответствуют наличию напряжений; ΔS_0 – объемная плотность энтропии фазового перехода.

Эти соотношения являются упрощенным вариантом, принятым в модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях [11], который в условиях пренебрежения малыми слагаемыми, связанными с переменностью упругих модулей при фазовом переходе и объемным эффектом реакции следуют из соотношений [11] в случае справедливости положения об активных процессах пропорционального нагружения.

В данной работе рассматривались представления $f(q) = a_0 = const$, где $0 \leq a_0 \leq 1$, и $f(q) = 1/(q + C)$, где $C = const, C \geq 0$, вид функции $f(q)$ может быть определен по данным опыта на ориентированное превращение [3].

Модель развития структурных деформаций строится по аналогии с теорией пластичности с изотропным упрочнением [16]. Уравнение поверхности нагружения формулируется следующим образом

$$\rho_2 q \varphi_2(\sigma_i^*) = \int d\chi, \quad d\chi = d\chi^{ph} + d\chi^{st}, \quad (6)$$

где $d\chi^{ph} = \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} d\varepsilon_{ij}^{ph'}$; $d\chi^{st} = \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} d\varepsilon_{ij}^{st'}$. В приведенных соотношениях

ρ_2 – материальный параметр, соответствующий предельной интенсивности деформаций, которая может быть накоплена при структурном переходе, $\varphi_2(x)$ – интегральная функция распределения интенсивности микронапряжений в представительном объеме СПФ в мартенситном фазовом состоянии, которая обладает теми же свойствами, что и функция $\varphi_1(x)$, χ – параметр упрочнения. Интеграл в правой части (6) вычисляется от начальной точки процесса, соответствующей полностью аустенитному ($q = 0$) недеформированному ($\varepsilon_{ij}^{phst} = 0$) состоянию СПФ. Соотношение (6) определяет текущее значение радиуса поверхности нагружения σ_i^* .

Приращение неупругих деформаций за счет структурного перехода в активном процессе определяется ассоциированным законом

$$d\varepsilon_{ij}^{st'} = \sigma'_{ij} d\lambda, \quad d\lambda > 0. \quad (7)$$

Выполнение неравенства (4) соответствует сонаправленности тензора приращений структурных деформаций внешней нормали к поверхности нагружения и положительности параметра упрочнения $d\lambda$, связанного со структурным переходом.

Таким образом, в рассматриваемой модели для наличия структурных деформаций требуется выполнение двух условий:

1) точка, соответствующая текущему тензору напряжений, должна находиться на поверхности нагружения;

2) должно быть выполнено дифференциальное условие (7), т.е. параметр упрочнения $d\lambda$ должен быть положительным.

В случае фазово-структурного превращения ($d\lambda > 0$), дифференцируя (6) с учетом (7), можно получить выражение для $d\lambda$, верное как для прямого, так и для обратного превращения

$$d\lambda = 3/2 \frac{\rho_2 d[q\varphi_2(\sigma_i)] - \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} d\varepsilon_{ij}^{ph'}}{\sigma_i}. \quad (8)$$

Для активного процесса прямого превращения и структурного перехода, когда соотношение (6) справедливо при замене σ_i^* на текущее значение интенсивности напряжений σ_i , учитывая, что $d\varepsilon_{ij}^{phst'} = d\varepsilon_{ij}^{ph'} + d\varepsilon_{ij}^{st'}$, и используя (1), (7) и (8), можно получить для фазово-структурных деформаций $d\varepsilon_{ij}^{phst'}$

$$d\varepsilon_{ij}^{phst'} = \frac{3}{2} \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} \rho_2 d[q\varphi_2(\sigma_i)] + f(q) \left(\delta_{im} \delta_{jn} - \frac{3}{2} \frac{\sigma'_{ij} \sigma'_{mn}}{\sigma_i^2} \right) \varepsilon_{mn}^{phst'} dq. \quad (9)$$

Для обратного превращения и структурного перехода аналогичным образом используя (2), (7) и (8), можно показать, что

$$d\varepsilon_{ij}^{phst'} = \frac{3}{2} \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} \rho_2 d[q\varphi_2(\sigma_i)] + \frac{1}{q} \left(\delta_{im} \delta_{jn} - \frac{3}{2} \frac{\sigma'_{ij} \sigma'_{mn}}{\sigma_i^2} \right) \varepsilon_{mn}^{phst'} dq. \quad (10)$$

Нагружение считается пропорциональным, если выполнены условия

$$\sigma'_{ij} = \sigma \cdot \sigma_{ij}^0, \quad \sigma_{ij}^0 = const; \quad \frac{3}{2} \sigma_{ij}^0 \sigma_{ij}^0 = 1, \quad |\sigma| = \sigma_i. \quad (11)$$

Соотношения (9) выполняются, если предположить пропорциональное изменение девиатора фазово-структурной деформации

$$\begin{aligned} \varepsilon^{phst'} &= \varepsilon \cdot \varepsilon_{ij}^0; \quad \varepsilon_{ij}^0 = const; \\ \frac{2}{3} \varepsilon_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^0 &= 1; \quad |\varepsilon| = \varepsilon_i; \quad \varepsilon_{ij}^0 = \frac{3}{2} \sigma_{ij}^0; \\ d\varepsilon_{ij}^{st'} &= \varepsilon_{ij}^0 d\varepsilon^{st}; \quad d\varepsilon_{ij}^{ph} = \varepsilon_{ij}^0 d\varepsilon^{ph}; \quad d\varepsilon = d\varepsilon^{ph} + d\varepsilon^{st}. \end{aligned} \quad (12)$$

Ограничимся рассмотрением процессов, в которых знак σ не меняется, без ограничения общности будем считать, что $\sigma > 0$. В случае пропорционального активного нагружения, когда одновременно происходит

прямое фазовое и структурное превращение, подстановка (12) в (9), с учетом того, что $\sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^0 = 1$, приводит к соотношению

$$d\varepsilon = \rho_2 d[q\varphi_2(\sigma_i)]. \quad (13)$$

Соотношение (13) является аналогом положения об активных процессах пропорционального нагружения, доказанного в [10] в рамках модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных переходах, не учитывающей явления обычного и перекрестного упрочнения СПФ.

В качестве функций распределения интенсивности микронапряжений $\varphi_1(\sigma)$ и $\varphi_2(\sigma)$ для расчетов использовались интегральные функции экспоненциального распределения и распределения Вейбулла

$$\varphi_1(\sigma) = 1 - \exp\left(-\frac{\sigma}{\sigma_{01}}\right), \quad \varphi_2(\sigma) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma}{\sigma_{01}}\right)^\alpha\right].$$

Для удобства использовались безразмерные величины

$$\beta = \frac{\sigma_{02}}{\sigma_{01}}, \quad \gamma = \frac{\rho_1}{\rho_2}. \quad (14)$$

В [7] было показано, что для никелида титана для любых значений интенсивности напряжений, отличных от нуля, выполняется неравенство $\rho_1\varphi_1 > \rho_2\varphi_2$, обеспечить выполнение которого можно, выбрав для γ предложенную в [16] зависимость вида

$$\gamma = 1 + \exp\left(-\beta^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right). \quad (15)$$

Для построения графиков использовались значения $\alpha = 2.96$, $\rho_1 = 0.0805$, $\sigma_{01} = 144.7$ МПа, $\sigma_{02} = 180$ МПа. С помощью формул (14-15) определялись значения материальных параметров β и ρ_2 . Значения остальных констант принимались равными: $\Delta S_0 = 644$ МПа/К, $M_s^0 = 40$ С, $M_f^0 = 20$ С, $A_s^0 = 50$ С, $A_f^0 = 70$ С.

Были рассмотрены материальные функции $f(q) = 0$; $f(q) = a_0$; $f(q) = 1/(q+C)$; для построения графиков были использованы значения материальных констант $a_0 = 0,35$; $a_0 = 0,7$ и $C = 2$, при которых достаточно хорошо описывается явление ориентированного превращения в никелиде титана.

2. ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ СВЕРХУПРУГОСТИ В СЛУЧАЕ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОГО МОНОТОННОГО НАГРУЖЕНИЯ ПРИ ПОСТОЯННОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ

Для моделирования явления сверхупругости рассмотрен прямой и обратный фазовый переход в процессе изотермического пропорционального монотонного нагружения и последующей разгрузки СПФ при постоянной температуре $T = T_0 > A_f^0$, $T_0 = const$, более высокой, чем A_f^0 .

2.1. Прямой фазовый переход.

Рассмотрим процесс пропорционального монотонного нагружения при постоянной температуре $T_0 > A_f^0$. В начале нагружения материал находится в аустенитном состоянии. Значения напряжений σ_s^M и σ_f^M , при которых начинается и заканчивается прямой фазовый переход, можно определить из уравнения (4) для заданного значения температуры T_0

$$T_0 = M_s^0 + \frac{\rho_1 \sigma_s^M \varphi_1(\sigma_s^M)}{\Delta S_0}; \quad T_0 = M_f^0 + \frac{\rho_1 \sigma_f^M \varphi_1(\sigma_f^M)}{\Delta S_0}. \quad (16)$$

Уравнения (16) относительно σ_s^M и σ_f^M решались с помощью численных методов.

Используя (11) и (12), можно преобразовать дифференциальное уравнение (9)

$$\frac{d\varepsilon^{ph'}}{d\sigma} = \rho_1 \varphi_1(\sigma) (1 - qf(q)) \frac{dq}{d\sigma} + \rho_1 f(q) \varepsilon^{phstr'} \frac{dq}{d\sigma}. \quad (17)$$

С помощью (3) и (4) величины q и $\frac{dq}{d\sigma}$ можно представить как функции от напряжения σ .

Если условия активного нагружения не выполняются в начале процесса нагружения, то структурные деформации отсутствуют, $\varepsilon^{phstr'} = \varepsilon^{ph}(\sigma)$, и (17) представляет собой дифференциальное уравнение относительно фазовых деформаций $\varepsilon^{ph}(\sigma)$, с начальными условиями $q(\sigma) = 0$, $\varepsilon^{ph}(\sigma) = 0$ при $\sigma = \sigma_s^M$ (в начале прямого фазового перехода материал находится полностью в аустенитном состоянии, фазово-структурные деформации отсутствуют).

На первом этапе проверки условий активного нагружения уравнение (17) решается методом Рунге Кутты в предположении о том, что хотя бы одно из условий активного нагружения не выполняется. Численно была получена зависимость фазовых деформаций от напряжений $\varepsilon_0^{ph}(\sigma)$. Найденное решение $\varepsilon_0^{ph}(\sigma)$ использовалось для проверки выполнения условий активного нагружения в диапазоне напряжений $[\sigma_s^M, \sigma_f^M]$, в котором происходит прямой фазовый переход.

Первое условие активного нагружения выполняется, если действующие напряжения σ больше радиуса поверхности нагружения σ^* , полученного из уравнения (6). Заметим, что при нулевых начальных условиях ($\varepsilon = 0$, $q = 0$ при $\sigma = \sigma_s^M$) и выполнении условий $d\sigma > 0$, $dq > 0$, что соответствует прямому фазовому переходу при возрастающих напряжениях, уравнение (6) для радиуса поверхности нагружения можно переписать в виде

$$\rho_2 q \varphi_2(\sigma^*) = \varepsilon. \quad (18)$$

В таком случае первое условие активного нагружения выражается неравенством

$$\sigma \geq \sigma^* = \varphi_2^{-1} \left(\frac{\varepsilon(\sigma)}{\rho_2 q} \right). \quad (19)$$

Рассмотрим второе условие активного нагружения (7), которое соответствует требованию сонаправленности тензора приращений структурных деформаций внешней нормали к поверхности нагружения. В случае прямого превращения, подставляя (1) в (8) и используя условия пропорционального нагружения (12), при $\sigma > 0$, аналогично случаю, рассмотренному в [17], второе, дифференциальное, условие активного нагружения $d\lambda > 0$ можно представить в виде

$$\rho_2 \left(\varphi_2 \frac{dq}{d\sigma} + q \frac{d\varphi_2}{d\sigma} \right) - \rho_1 \varphi_1 (1 - qf) \frac{dq}{d\sigma} - f \varepsilon^{phstr'} \frac{dq}{d\sigma} > 0, \quad (20)$$

где φ_1 , φ_2 , q , $\frac{dq}{d\sigma}$, f , $\varepsilon^{phstr'}$ зависят только от σ .

При подстановке решения уравнения (17) $\varepsilon_0^{ph}(\sigma)$ в (19) и (20) оказалось, что условия активного нагружения выполняются в предположении $\varepsilon^{phstr'}(\sigma) = \varepsilon_0^{ph}(\sigma)$ для всех рассмотренных температур (90 С, 120 С, 150 С) в соответствующих температуре промежутках $[\sigma_s^M, \sigma_f^M]$. Следовательно, необходимо учитывать приращение структурных деформаций.

На втором этапе проверки условий активного нагружения уравнение (17) решалось с учетом того, что в материале происходит и фазовое, и структурное превращение. В таком случае $d\varepsilon^{phstr'} = d\varepsilon^{ph'} + d\varepsilon^{st'}$. В этом случае, учитывая нулевые начальные условия, величину фазово-структурной деформации можно найти с помощью (18). Полученная из (18) зависимость фазово-структурной деформации от напряжений $\varepsilon^{phst}(\sigma)$ подставлялась в дифференциальное уравнение (17), которое решалось численно методом Рунге Кутты на промежутке $[\sigma_s^M, \sigma_f^M]$ с нулевыми начальными условиями. В результате была найдена зависимость фазовой деформации от напряжений $\varepsilon^{ph}(\sigma)$ в предположении, что оба условия активного нагружения выполняются. Полученная зависимость фазово-структурных деформаций от напряжений $\varepsilon^{phst}(\sigma)$ подставлялась в условия активного нагружения (19-20). Оказалось, что условия активного нагружения также выполняются для всех рассмотренных температур (90 С, 120 С, 150 С) в соответствующих температуре промежутках $[\sigma_s^M, \sigma_f^M]$. Следовательно, на протяжении всего процесса нагружения в рассмотренном промежутке $[\sigma_s^M, \sigma_f^M]$, соответствующем диапазону напряжений, в котором происходит прямой фазовый переход, идет и фазовое, и структурное превращение для рассмотренных случаев и выбранных материальных констант.

На рис.1 приведены графики фазовых и фазово-структурных деформаций для разных материальных функций $f(q)$ и значений температуры T_0 . Графики фазовых деформаций были построены для материальных функций $f(q) = 0$, $f(q) = 0.35$, $f(q) = 1/(q+2)$ и $f(q) = 0.7$. Графики для $f(q) = 0.35$ и $f(q) = 1/(q+2)$ практически совпадают. Можно заметить, что при увеличении материального параметра a величина фазовых деформаций увеличивается. Также фазовые деформации незначительно увеличиваются с повышением температуры. Полученные графики показывают, что модель качественно правильно описывает

нелинейный рост деформаций при прямом фазовом переходе, вызванном повышением напряжений при постоянной температуре с учетом структурных деформаций.

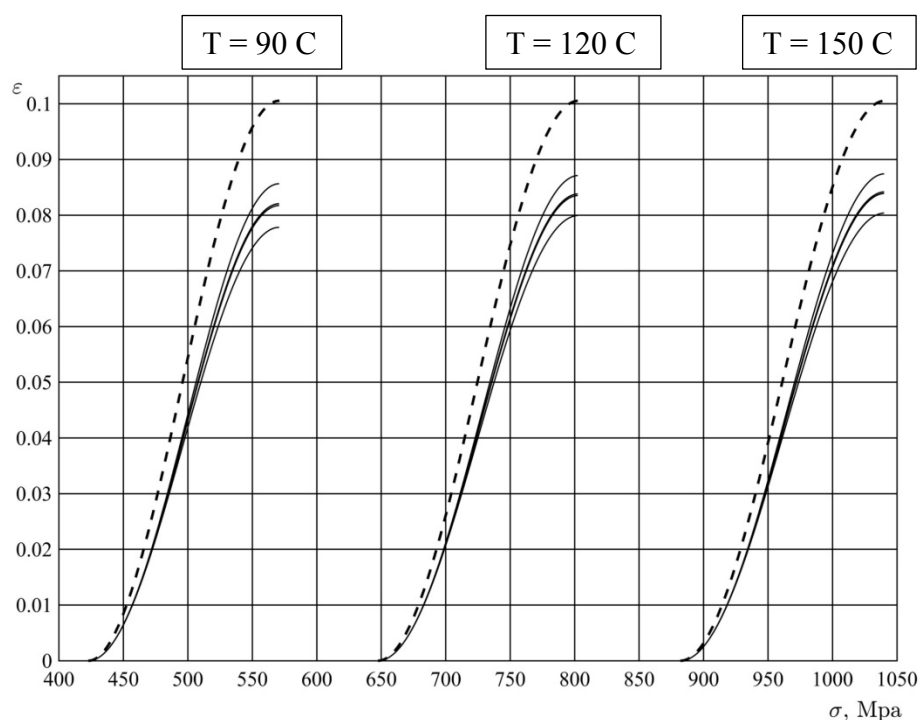


Рис.1. Фазово-структурные деформации (пунктирные линии) и фазовые деформации (сплошные линии) в зависимости от напряжений в случае прямого превращения под действием монотонно увеличивающегося напряжения при постоянной температуре 90 C, 120 C и 150 C соответственно. Графики фазовых деформаций построены для материальных функций снизу вверх $f(q)=0$, $f(q)=0.35$, $f(q)=1/(q+2)$, $f(q)=0.7$ соответственно. Графики для $f(q)=0.35$ и $f(q)=1/(q+2)$ практически совпадают.

2.2. Обратный фазовый переход.

Рассмотрим обратный фазовый переход, вызванный монотонным уменьшением напряжений при той же постоянной температуре T_0 после окончания прямого фазового перехода, вызванного монотонным увеличением напряжений от σ_s^M до σ_f^M . σ_s^M и σ_f^M – значения напряжений, при которых начинается и заканчивается прямой фазовый переход при постоянном значении температуры T_0 .

Значения напряжений σ_s^A и σ_f^A , при которых начинается и заканчивается прямой фазовый переход, можно определить из уравнения (5) для заданного значения температуры T_0

$$T_0 = A_s^0 + \frac{\rho_1 \sigma_s^A \varphi_1(\sigma_s^A)}{\Delta S_0}; \quad T_0 = A_f^0 + \frac{\rho_1 \sigma_f^A \varphi_1(\sigma_f^A)}{\Delta S_0}. \quad (21)$$

Уравнения (21) относительно σ_s^A и σ_f^A решались с помощью численных методов.

Заметим, что значение напряжения σ_f^M , при котором заканчивается прямой фазовый переход, и σ_s^A , при котором начинается обратный фазовый переход, не совпадают. При учете только фазовых и структурных деформаций в течение монотонного снижения напряжений от σ_f^M до σ_s^A деформация не изменяется.

Поскольку при обратном превращении структурного превращения не происходит, $d\varepsilon^{st} = 0$, уравнение для обратного превращения сводится к следующему.

Фазовые деформации при обратном фазовом переходе описываются уравнением (2). С учетом (12) уравнение (2) принимает вид

$$d\varepsilon^{phst'} = \frac{\varepsilon^{phst'}}{q} dq. \quad (22)$$

Уравнение (22) следует решать при начальном условии

$$\varepsilon^{phst'} = \varepsilon_1^{phst'}, \quad (23)$$

где $\varepsilon_1^{phst'} = \varepsilon^{phst'}(\sigma_f^M) = \varepsilon^{phst'}(\sigma_s^A)$ – значения фазово-структурной деформации в конце прямого фазового перехода и начале обратного перехода соответственно. Заметим, что для разных функций f значения $\varepsilon_1^{ph'}$ незначительно отличаются, а значения $\varepsilon_1^{phst'}$ совпадают вследствие (18), если в течение прямого перехода выполнялись условия активного нагружения (как в рассмотренных в данной работе случаях). Переходя в (22), (23) от аргумента q к аргументу σ , получаем дифференциальное уравнение с начальным условием

$$d\varepsilon^{phst'}(\sigma) = \frac{\varepsilon^{phst'}(\sigma)}{q(\sigma)} \frac{dq}{d\sigma}(\sigma) d\sigma, \quad (24)$$

$$\varepsilon^{phst'}(\sigma_s^A) = \varepsilon_1^{phst'}.$$

Уравнение (24) было решено численно методом Рунге Кутты, таким образом, были получены зависимости фазово-структурных деформаций от напряжений в течение обратного фазового перехода. Графики фазово-структурных деформаций в зависимости от напряжений представлены на рис.2. Графики деформаций во время обратного фазового перехода для разных функций f совпадают.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Модель качественно правильно описывает деформирование СПФ под действием монотонно изменяющихся напряжений при постоянной температуре и явление сверхупругости. Рассмотрен прямой и обратный фазовый переход при постоянной температуре, вызванный монотонным изменением напряжений. Проведено сравнение результатов, полученных для разных материальных функций, определяющих соотношение между процессами зарождения и развития мартенситных элементов. Показано, что учет развития мартенситных элементов оказывает значительное влияние на величину фазовых деформаций и никак не отражается на фазово-структурных деформациях. В рассмотренных условиях нагружения для больших значений температуры и для материальных функций, позволяющих учесть развитие мартенситных

элементов, значения фазовых деформаций при учете развития мартенситных элементов оказываются выше.

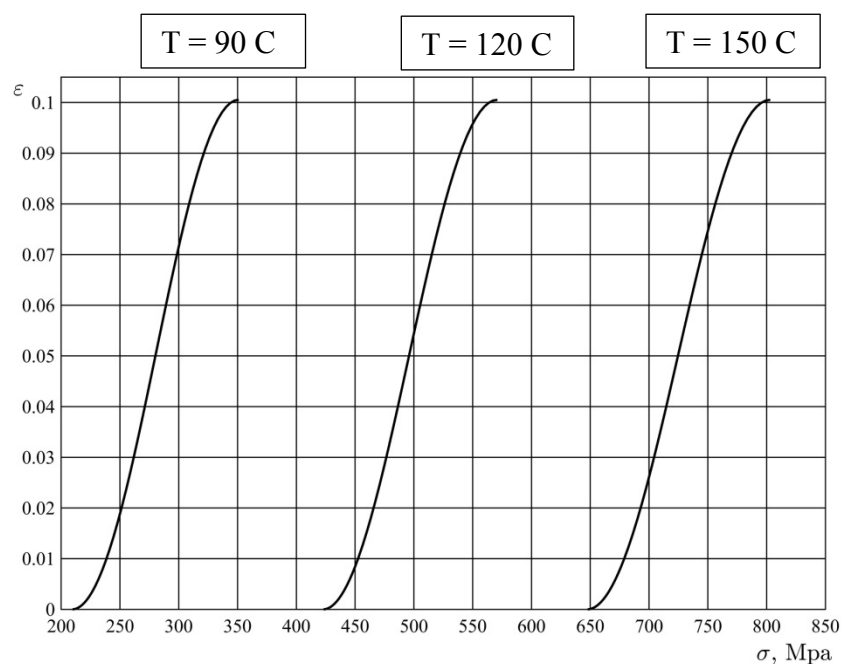


Рис.2. Фазовые деформации в зависимости от напряжения в случае обратного превращения под действием монотонно уменьшающегося напряжения при постоянной температуре 90 С, 120 С и 150 С соответственно. Графики фазово-структурных деформаций для разных материальных функций $f(q)=0$, $f(q)=0.35$, $f(q)=1/(q+2)$, $f(q)=0.7$ совпадают.

ЛИТЕРАТУРА

1. Thamburaja P. *Constitutive equations for martensitic reorientation and detwinning in shape-memory alloys* // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2005. – Vol.53. – Pp.825-856.
2. Liu Y., Xie Z. *Detwinning in shape memory alloy* // Progress in Smart Materials and Structures. – 2007. – Chapt.3. – Pp.29-65.
3. Мовчан А.А., Казарина С.А. *Материалы с памятью формы как объект механики деформируемого твердого тела: экспериментальные исследования, определяющие соотношения, решение краевых задач* // Физическая мезомеханика. – 2012. – Т.15. – №1. – С.105-116.
4. Лихачев В.А., Патрикеев Ю.И., Щуплецов В.Н. *Эффект ориентированного превращения в никелиде титана* // ФММ. – 1986. – Т.61. – Вып.1. – С.121-126.
5. Мовчан А.А., Казарина С.А., Тант Зинг Аунг. *Аналог теории пластичности для описания деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях* // Деформация и разрушение материалов. – 2009. – №9. – С.2-6.
6. Мовчан А.А., Сильченко А.Л., Казарина С.А. *Экспериментальное исследование и теоретическое моделирование эффекта перекрестного упрочнения сплавов с памятью формы* // Деформация и разрушение материалов. – 2017. – №3. – С.20-27.

7. Мовчан А.А., Казарина С.А., Сильченко А.Л. *Эффект перекрестного упрочнения при сжатии* // Деформация и разрушение материалов. – 2019. – №4. – С.2-9.
8. Tanaka K.A. *Phenomenological description on thermomechanical behavior of shape memory alloys* // J. Pressure vessel technology. Trans. ASME. – 1990. – Vol.112. – No.2. – Pp.158-163.
9. Jape S., Baxevanis T., Lagoudas D.C. *On the Fracture Toughness and Stable Crack Growth in Shape Memory Alloy Actuators in the Presence of Transformation-Induced Plasticity* // International Journal of Fracture. – 2018. – Vol.209. – №1-2. – Pp.117-130.
10. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г., Сильченко Т.Л. *Учет явления мартенситной неупругости при обратном фазовом превращении в сплавах с памятью формы.* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2011. – №2. – С.44-56.
11. Hartl D.J., Lagoudas D.C., Calkins F.T. *Advanced methods for the analysis, design, and optimization of SMA- based aerostructures* // Smart Mater. Struct. – 2011. – Vol.20. – No.9. – 094006 (20 pp.).
12. Тихомирова К.А. *Разработка и численная реализация одномерной феноменологической модели фазовой деформации в сплавах с памятью формы* // Вычислительная механика сплошных сред. – 2016. – Т.9. – №2. – С.192-206.
13. Huang W. *Yield surface of shape memory alloys and their applications* // Acta Materialia. – 1999. – Vol.47. – No.9. – Pp.2769-2776.
14. Lexcellent Ch., Boubakar M.L., Bouvet Ch., Calloch S. *About modeling the shape memory alloy behaviour based on the phase transformation surface identification under proportional loading and anisothermal conditions* // Int. J. Solids and Struct. – 2006. – Vol.43. – No.3-4. – Pp.613-626.
15. Мишустин И.В., Мовчан А.А. *Аналог теории пластического течения для описания деформации мартенситной неупругости в сплавах с памятью формы* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2015. – №2. – С.78-95.
16. Мовчан А.А. *Модель влияния фазового механизма деформирования на структурный в сплавах с памятью формы* // Деформация и разрушение материалов. – 2019. – №7. – С.14-23.
17. Гаганова Н.В. *Распространение модели деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях на случай учета развития мартенситных элементов* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2019. – Т.25. – №4. – С.543-562.
18. Otsuka K., Shimizu K. *Pseudoelasticity and shape memory effects in alloys* // Materials Science. – 1986 – Vol.31. – No.3. – Pp.93-114.
19. Ping-Hua L., Tobushi H., Tanaka K., Hattori T., Makita M. *Pseudoelastic Behaviour of TiNi Shape Memory Alloy Subjected to Strain Variations* // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. – 1994. – Vol.5. – Pp.694-701.

REFERENCES

1. Thamburaja P. *Constitutive equations for martensitic reorientation and detwinning in shape-memory alloys.* Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2005, Vol.53, Pp.825-856.
2. Liu Y., Xie Z. *Detwinning in shape memory alloy.* Progress in Smart Materials and Structures, 2007, Chapt.3, Pp.29-65.

3. Movchan A.A., Kazarina S.A. *Shape memory materials as an object of solid state mechanics: experimental study, constitutive relations, solution of boundary value problems*. Physical mesomechanics, 2012, Vol.15, No.3-4, Pp.214-223.
4. Likhachev V.A., Patrikeyev Yu.I., Shupletsov V.N., *Ehffekt orientirovannogo prevrashheniya v nikelide titana [Oriented transformation effect in titanium nickelide]*. Fizika metallov i metallovedenie, 1986, Vol.61, No.1, Pp.121-126.
5. Movchan A.A., Kazarina S.A., Tant Zin Aung. *Analog teorii plastichnosti dlya opisaniya deformirovaniya splavov s pamyat'yu formy pri fazovykh i strukturnykh prevrashheniyakh [Analog of theory of plasticity for describing deformations of shape memory alloys under phase and structure transformations]*. Deformatsiya i razrushenie materialov, 2009, No.9, Pp.2-6.
6. Movchan A.A., Sil'chenko A.L., Kazarina S.A. *Experimental study and theoretical simulation of the cross hardening effect in shape memory alloys*. Russian Metallurgy (Metally), 2017, No.10, Pp.779-784.
7. Movchan A.A., Kazarina S.A., Silchenko A.L. *Cross hardening of a shape memory alloy during compression*. Russian Metallurgy (Metally), 2019, No.10, Pp.967-973.
8. Tanaka K.A. *Phenomenological description on thermomechanical behavior of shape memory alloys*. J. Pressure vessel technology. Trans. ASME., 1990, Vol.112, No.2, Pp.158-163.
9. Jape S., Baxevanis T., Lagoudas D.C. *On the fracture toughness and stable crack growth in shape memory alloy actuators in the presence of transformation-induced plasticity*. International Journal of Fracture, 2018, Vol.209, No.1-2. Pp.117-130.
10. Movchan A.A., Sil'chenko L.G., Sil'chenko T.L. *Taking account of the martensite inelasticity in the reverse phase transformation in shape memory alloys*. Mechanics of Solids, 2011, Vol.46, No.2, Pp.194-203.
11. Hartl D.J., Lagoudas D.C., Calkins F.T. *Advanced methods for the analysis, design, and optimization of SMA-based aerostructures*. Smart Mater. Struct., 2011, Vol.20, No.9, 094006 (20 pp.).
12. Tikhomirova K.A. *Razrabotka i chislennaya realizatsiya odnomernej fenomenologicheskoy modeli fazovoy deformatsii v splavakh s pamyat'yu formy [Numerical and experimental study of thermomechanical behavior of glassy polymers in the case of finite deformations]*. Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred, 2016, Vol.9, No.2, Pp.192-206.
13. Huang W. *Yield surface of shape memory alloys and their applications*. Acta Materialia, 1999, Vol.47, No.9, Pp.2769-2776.
14. LExcellent Ch., Boubakar M. L., Bouvet Ch., Calloch S. *About modeling the shape memory alloy behaviour based on the phase transformation surface identification under proportional loading and anisothermal conditions*. Int. J. Solids and Struct., 2006, Vol.43, No.3-4, Pp.613-626.
15. Mishustin I.V., Movchan A.A. *Analog of the plastic flow theory for describing martensitic inelastic strains in shape memory alloys*. Mechanics of Solids, 2015, Vol.50, No.2, Pp.176-190.
16. Movchan A.A. *Model for the effect of the phase mechanism of deformation on the structural mechanism in shape memory alloys*. Russian Metallurgy (Metally), 2020, No.4, Pp.282-290.
17. Gaganova N.V. *Rasprostranenie modeli deformirovaniya splavov s pamyat'yu formy pri fazovykh i strukturnykh prevrashheniyakh na sluchaj ucheta razvitiya martensitnykh ehlementov [Shape memory alloys constitutive model extension for considering development of the martensitic elements during phase and*

structural transformation]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2019, Vol.25, No.4, Pp.543-562.

18. Otsuka K., Shimizu K. *Pseudoelasticity and shape memory effects in alloys*. *Materials Science*, 1986, Vol.31, No.3, Pp.93-114.
19. Ping-Hua L., Tobushi H., Tanaka K., Hattori T., Makita M. *Pseudoelastic behaviour of TiNi shape memory alloy subjected to strain variations*. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 1994, Vol.5, Pp.694-701.

Поступила в редакцию 29 июля 2020 года.

Сведения об авторе:

Гаганова Наталья Валерьевна – соискатель, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия; e-mail: gaganova-nv@yandex.ru