УДК 539.3
DOI 10.33113/mkmk.ras.2020.26.04.501_512.05

ВАРИАНТ УТОЧНЕНИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ИЗГИБА ТОНКИХ ПЛАСТИН

Фирсанов Вик.В.

ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Классическая теория изгиба тонких пластин базируется на гипотезах Кирхгофа об отсутствии нормальных напряжений в поперечном к основаниям пластинки направлении, неизменяемости длины нормального к срединной плоскости элемента пластинки, что означает неизменяемость толщины и отсутствие линейной деформации в поперечном направлении, отсутствии деформаций сдвига в плоскостях, перпендикулярным основаниям пластинки. При этом в уравнениях равновесия и нормальные напряжения в поперечном направлении, и касательные напряжения, связанные со сдвиговыми деформациями физическими соотношениями, остаются, но при этом, очевидно, нарушаются физические связи. Уточнение классической теории, как правило, связано с отказом от всех гипотез Кирхгофа, что значительно усложняет такую модель, либо отказ от одной или двух кинематических гипотез. Например, можно перемещение в поперечном направлении задавать в виде степенного ряда по поперечной координате. В этом случае, если степени чётные, линейная деформация в поперечном направлении отлична от нуля, но нормальный элемент, соединяющий основания пластинки, не меняет своей длины, что не находится в противоречии с гипотезой Кирхгофа. Но такой подход может не привести к существенным уточнениям классической модели, поэтому для более или менее существенного уточнения предполагается наиболее приемлемым отказ от гипотезы отсутствия сдвиговых деформаций в поперечных к основаниям пластинки плоскостях. В этом случае физическая связь между сдвигами и напряжениями восстанавливается. Учёт указанных деформаций сдвига особенно важен для материалов, обладающих низкой сдвиговой жёсткостью в поперечных направлениях.

Ещё одной причиной, побуждающей к уточнению классической модели изгиба пластин, является недостаточно точное удовлетворение некоторых граничных условий, которое связано с внесением в расчётную модель обобщённой перерезывающей силы Кирхгофа, состоящей из чисто перерезывающей силы и приращения по одной из плоскостных координат крутящего момента. При определённых уточнениях можно решить проблему трёх граничных условий на свободных от закрепления кромках пластинки.

Ключевые слова: деформации; перемещения; напряжения; гипотезы; модели; уравнения; нагрузка; граничные условия; упругость

A VARIANT OF REFINEMENT OF THE CLASSICAL THEORY OF THIN PLATE BENDING

Firsanov Vic.V.

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

ABSTRACT

The classical theory of bending of thin plates based on Kirchhoff's hypotheses about the absence of normal stresses in the transverse to the bases direction, invariability of the length of the normal element to the middle plane of the plate, which means the invariability of the thickness and lack of linear deformation in the transverse direction, the absence of shear strains in planes perpendicular to the bases of the plate. At the same time, in the equilibrium equations, both normal stresses in the transverse direction and tangential stresses associated with shear deformations by physical relations remain, but the physical connections are obviously broken. Refinement of the classical theory is usually associated with the rejection of all Kirchhoff hypotheses, which significantly complicates such a model, or the rejection of one or two kinematic hypotheses. For example, you can set a displacement in the transverse direction as a power series along the transverse coordinate. In this case, if the degrees are even, the linear deformation in the transverse direction is different from zero, but the normal element connecting the bases of the plate does not change its length, which is not in contradiction with the Kirchhoff hypothesis. However, this approach may not lead to significant refinements of the classical model, so for a more or less significant refinement, it is assumed that the most acceptable rejection of the hypothesis of the absence of shear deformations in the planes transverse to the plate bases. In this case, the physical relationship between shear and stress is restored. Accounting for these shear deformations is especially important for materials with low shear stiffness in the transverse directions.

Another reason for refining the classical model of plate bending is that some boundary conditions are not satisfied accurately enough, which is due to the introduction of a generalized Kirchhoff shear force into the calculation model, which consists of a purely shear force and an increment along one of the plane coordinates of the torque. With certain refinements, it is possible to solve the problem of three boundary conditions on the free edges of the plate.

Keywords: deformations; displacements; stresses; hypotheses; models; equations; load; boundary conditions; elasticity

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время опубликовано достаточно много работ, посвящённых уточнению классических теорий изгиба балок и пластин, гипотезы которых, по сути, идентичны. Одной из первых была работа известного ученого Тимошенко С.П., который в своих работах отказался от гипотезы отсутствия сдвига в поперечных к основанию пластинки плоскостях, и привел решение с постоянным по толщине пластинки сдвигом и постоянными касательными напряжениями, которые в силу парности действуют на основаниях пластинки, что приводит к искажению исходной задачи [1]. Но влияние, действующей на основаниях касательной нагрузки на прогиб, видимо, не является значительным, поэтому эту модель, называемою моделью Тимошенко, используют для уточнения классической теории.

Дальнейшие уточнения связаны с аппроксимацией перемещений по толщине с использованием полиномиальных функций различного порядка, от которых зависит точность результатов. Эти уточнения проводились для тонких пластин и балок достаточной длины, выполненных из традиционных конструкционных материалов [2-4].

В этой работе предлагаются два подхода к получению решения при отказе от гипотезы отсутствия сдвиговых деформаций в плоскостях, перпендикулярных основаниям пластинки при сохранении других гипотез Кирхгофа.

Считается, что внешняя силовая нагрузка не вызывает больших перемещений, а напряжения зависят линейно от деформаций.

Получим систему разрешающих уравнений изгиба тонких пластин при следующих допущениях

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0,\ u = u_0\left(x, y\right) z,\ v = v_0\left(x, y\right) z,\ \sigma_z = 0, \tag{1}$$

откуда следует $w = w\left(x, y\right)$, а неизвестные и подлежащие определению функции u_0 и v_0 не связаны между собой и с прогибом как в классической теории изгиба из-за равенства нулю сдвиговых деформаций γ_{xz} и γ_{yz}. Как и в классической теории принято линейное изменение по толщине перемещений u и v.

После определения деформаций через перемещения из соотношений Коши с учётом (1)

$$\begin{gathered}\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} z,\ \ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} z,\ \ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) z,\\ \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = u_0 + \frac{\partial w}{\partial x},\ \ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = v_0 + \frac{\partial w}{\partial y}\end{gathered} \tag{2}$$

перейдём к соотношениям связи напряжений и деформаций для изотропного материала с учётом (2) и получим напряжения, выраженные через перемещения

$$\begin{gathered}\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y\right) = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \mu\frac{\partial v_0}{\partial y}\right) z,\\ \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x\right) = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + \mu\frac{\partial u_0}{\partial x}\right) z,\\ \tau_{xy} = G\gamma_{xy} = G\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) z,\ \tau_{xz} = G\gamma_{xz} = G\left(u_0 + \frac{\partial w}{\partial x}\right),\\ \tau_{yz} = G\gamma_{yz} = G\left(v_0 + \frac{\partial w}{\partial y}\right).\end{gathered} \tag{3}$$

Из полученных равенств видно, что нормальные напряжения σ_x, σ_y и τ_{xy} линейно зависят от поперечной координаты, что соответствует задаче изгиба пластинки, а касательные напряжения τ_{xz} и τ_{yz} постоянны по толщине, и, следовательно, не равны нулю на основаниях пластинки согласно закону парности касательных напряжений.

Уравнения равновесия трёхмерной задачи теории упругости в отсутствие объёмных сил

$$\begin{gathered}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0,\\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0,\\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0\end{gathered} \tag{4}$$

запишем в перемещениях, подставив сюда (3) и сократив полученное на z

$$\begin{aligned}
&\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}\right)+G\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}\right)=0,\\
&G\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}\right)+\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}\right)=0,\\
&G\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+G\left(\frac{\partial v_0}{\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=0.
\end{aligned}\tag{5}$$

Из последнего уравнения системы (5) определим σ_z, отсутствующее в физических соотношениях и оставляемое в уравнениях равновесия, что даёт возможность учесть поперечную нагрузку, распределённую по одному или двум основаниям пластинки. Интегрируя по поперечной координате третье уравнение системы (5) получим

$$\sigma_z=-G\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}+\nabla^2 w\right)z+\sigma_0\left(x,y\right),$$

где $\sigma_0\left(x,y\right)$ произвольная функция интегрирования, ∇^2 оператор Лапласа в декартовой системе координат.

Удовлетворив граничным условиям $\sigma_z=-q,\ \sigma_z=0$ при $z=\frac{h}{2}$ и $z=-\frac{h}{2}$ соответственно, определим $\sigma_0=-\frac{q}{2}$. Тогда $\sigma_z=-G\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}+\nabla^2 w\right)z-\frac{q}{2}$ и, возвращаясь к тем же граничным условиям, получим неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}+\nabla^2 w=\frac{q}{Gh}.$$

После преобразований двух первых уравнений системы (5) и присоединения к ним этого уравнения, будем иметь разрешающую систему дифференциальных уравнений для определения искомых кинематических неизвестных

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}+\nabla^2 w=\frac{q}{Gh},\\
&\nabla^2 u_0+\left(1+\mu\right)\frac{\partial\omega_z^0}{\partial y}=0,\\
&\nabla^2 v_0-\left(1+\mu\right)\frac{\partial\omega_z^0}{\partial x}=0,
\end{aligned}\tag{6}$$

где $\omega_z^0=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_0}{\partial x}-\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)$ определяет поворот бесконечно малого элемента пластинки в плоскости xy. Если умножить правую часть этого выражения на z, то тогда верхний индекс исчезнет.

Полученную систему уравнений (6) можно упростить, если предположить, что пластинка является абсолютно жёсткой на поворот в плоскости, т.е. $\omega_z=\omega_z^0=0$, но можно сохранить в решении ω_z^0 и преобразовать последние два уравнения системы (6), исключив поворот путём дифференцирования второго уравнения по координате x, третьего уравнения по y и последующего сложения этих уравнений. Затем продифференцируем второе уравнение по y, третье по x и вычтем из третьего первое уравнение. В результате получим

$$\nabla^2\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)=0,\ \ \nabla^2\left(\frac{\partial v_0}{\partial x}-\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)=0,$$
$$\nabla^2 w=\frac{q}{Gh}-\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}\right). \tag{7}$$

Имеем систему дифференциальных уравнений в частных производных шестого порядка относительно трёх кинематически независимых функций, причём первые два уравнения этой системы являются однородными. Дальнейшее преобразование первых двух уравнений приведёт к дифференциальным уравнениям более высокого порядка, чем исходные, относительно искомых функций u_0, v_0.

$$\nabla^2\nabla^2 u_0=0,\ \ \nabla^2\nabla^2 v_0=0.$$

Безразмерные перемещения u_0 и v_0 не связаны ни с нагрузкой, ни с прогибом, что может привести к тривиальному решению при реализации любых однородных как кинематических, так и статических граничных условий. Например, в случае жёсткого защемления пластинки по контуру имеем следующие условия на каждой кромке $u_0=v_0=w=0$. Тогда для определения перемещений в плоскости имеем однородные дифференциальные уравнения и однородные граничные условия, что приводит к тривиальному решению $u_0=v_0=0$, всюду включая граничные кромки. Имеем абсолютно жёсткую в своей плоскости пластинку, в которой лишь прогиб отличен от нуля. Для рассматриваемой пластинки представим прогиб в виде двойного тригонометрического ряда для автоматического удовлетворения граничных условия жёсткого защемления по контуру

$$w=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}w_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b},$$

где w_{mn} постоянные коэффициенты, зависящие от целых чисел m и n.

Для упрощения будем считать поперечную нагрузку постоянной, тогда после подстановки двойного тригонометрического ряда в уравнение (7) и выполнения стандартных преобразований получим формулу для определения общего коэффициента ряда, а затем и сам прогиб

$$w=\frac{16q_0}{\pi^4 Gh}\sum_1^{\infty}\sum_1^{\infty}\frac{1}{mn\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

Сравнивая полученное решение с классическим

$$w_{кл}=\frac{16q_0}{\pi^6 D}\sum_1^{\infty}\sum_1^{\infty}\frac{1}{mn\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

убеждаемся в существенном различии формул, что и следовало ожидать. Определяющим фактором для оценки численных значений прогиба является соотношение жёсткости Gh и цилиндрической жёсткости D. Для квадратной пластинки максимальный прогиб в её центре для толщины, в пять раз меньшей размера пластинки в плоскости, при сохранении только одного члена ряда прогиб, посчитанный по уточнённой формуле, составляет около 10% от классического прогиба. При уменьшении толщины пластинки это расхождение будет ещё более значительным, поэтому можно считать предложенный вариант уточнения неприемлемым, поскольку уточнённое решение даёт слишком большое расхождение с классическим вариантом. Это можно объяснить тем, что в классической теории интегральные аналоги касательных напряжений τ_{xz} и τ_{yz} определяются из первых двух уравнений равновесия системы (4) и попутно удовлетворяются граничные условия для этих касательных напряжений на обоих основаниях пластинки. В предложенной модели рассматриваемые касательные напряжения, выраженные через перемещения и не зависящие от поперечной координаты, исчезают в первых двух уравнениях системы (4) после дифференцирования по поперечной координате. Это приводит, в конечном итоге, к независимой системе уравнений, что, конечно, не является положительным фактором и приводит к очень сомнительному решению, несмотря на выполнение всех условий рассмотренной задачи.

Оставляя в силе сформулированные гипотезы (1), изменим ход решения. Очевидно, что в силе остаются соотношения (2) и (3). Ход решения меняется с уравнений равновесия. Физические соотношения для касательных напряжений τ_{xz} и τ_{yz} из (3) не вносим при преобразовании системы уравнений (4) в (5) с помощью (3). Как и для нормальных напряжений σ_z, определяемых интегрированием третьего уравнения равновесия (5), используем два первых уравнения системы (5) после внесения в них соответствующих производных от указанных касательных напряжений для определения этих напряжений

$$\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}\right)z+G\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}\right)z+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}=0,$$

$$G\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}\right)z+\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}\right)z+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}=0.$$

Интегрируя по поперечной координате, получим

$$\begin{aligned}\tau_{xz}&=-\left[\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}\right)+G\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}\right)\right]\frac{z^2}{2}+\tau_1(x,y),\\ \tau_{yz}&=-\left[G\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}\right)+\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}\right)\right]\frac{z^2}{2}+\tau_2(x,y),\end{aligned}\tag{8}$$

где τ_1 и τ_2 произвольные функции интегрирования, которые определим из условия отсутствия касательных напряжений на основаниях пластинки $z=\pm\dfrac{h}{2}$

$$\begin{aligned}\tau_1&=\left[\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}\right)+G\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}\right)\right]\frac{h^2}{8},\\ \tau_2&=\left[G\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}\right)+\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}\right)\right]\frac{h^2}{8}.\end{aligned}\tag{9}$$

Подставляя (9) в (8), получим решение

$$\tau_{xz}=\left[\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}\right)+G\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}\right)\right]\left(\frac{h^2}{8}-\frac{z^2}{2}\right),$$
$$\tau_{yz}=\left[G\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}\right)+\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}\right)\right]\left(\frac{h^2}{8}-\frac{z^2}{2}\right). \quad (10)$$

Подставляя (10) в третье уравнение равновесия системы (4), получим уравнение для определения нормальных напряжений в поперечном направлении через перемещения

$$\left[\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}+\mu\frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2\partial y}\right)+G\left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2\partial y}\right)\right]\left(\frac{h^2}{8}-\frac{z^2}{2}\right)+$$
$$+\left[G\left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2\partial y}\right)+\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3}+\mu\frac{\partial^3 u_0}{\partial x\partial y^2}\right)\right]\left(\frac{h^2}{8}-\frac{z^2}{2}\right)+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=0.$$

После преобразований и интегрирования по поперечной координате получим решение для нормального напряжения σ_z с точностью до произвольной плоской функции интегрирования $\sigma_0(x,y)$.

Удовлетворив граничные условия на верхнем и нижнем основаниях $z=\pm\frac{h}{2}$ $\sigma_z=-q$ и $\sigma_z=0$ соответственно, получим $\sigma_0=-\frac{q}{2}$ и уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 u_0+\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 v_0=\frac{q}{D}, \quad (11)$$

где цилиндрическая жёсткость изотропной пластинки $D=\dfrac{Eh^3}{12\left(1-\mu^2\right)}$.

Из равенств (8) и (9) следует, что функции τ_1 и τ_2 не зависят от поперечной координаты, также не зависят от z касательные напряжения τ_{xz} и τ_{yz} в двух последних физических соотношениях (3). Приравняв τ_1 и τ_2 напряжениям τ_{xz} и τ_{yz} из двух последних соотношений (3), получим

$$u_0+\frac{\partial w}{\partial x}=\left[\frac{2}{1-\mu}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}\right)+\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}\right]\frac{h^2}{8},$$
$$v_0+\frac{\partial w}{\partial y}=\left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}+\frac{2}{1-\mu}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}\right)\right]\frac{h^2}{8}. \quad (12)$$

По сути это означает выполнение физических соотношений для касательных напряжений τ_{xz} и τ_{yz} при $z=0$, т.е. в срединной плоскости.

Имеем три кинематических неизвестных и три дифференциальных уравнения (11) и (12) для их определения. Можно упростить задачу, приняв

$$\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0.$$

Это условие тождественно удовлетворяется и в классической теории. И в рассматриваемой модели оно может быть тождественно удовлетворено, если выразить безразмерные перемещения через потенциальную функцию $\Phi\left(x,y\right)$

$$v_0 = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \ u_0 = \frac{\partial \Phi}{\partial x}. \tag{13}$$

Подставив (13) в (11) после преобразований, получим разрешающее дифференциальное уравнение четвёртого порядка для определения потенциальной функции

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi = \frac{q}{D}, \tag{14}$$

которое по виду совпадает с разрешающим уравнением классической теории относительно функции прогиба.

Функцию прогиба в этой модели определим из соотношений (12) интегрируя первое уравнение по x, а второе по y с учётом равенств (13)

$$\begin{aligned} w &= -\Phi + \frac{1}{(1-\mu)} \frac{h^2}{4} \nabla^2 \Phi + w_1(y), \\ w &= -\Phi + \frac{1}{(1-\mu)} \frac{h^2}{4} \nabla^2 \Phi + w_2(x). \end{aligned} \tag{15}$$

Из сравнения этих двух равенств следует, что $w_1 = w_2 = C$, причём без ущерба для задачи можно произвольную константу C положить равной нулю.

Таким образом все кинематические и статические неизвестные рассматриваемой задачи определяются потенциальной функцией. Необходимо проинтегрировать разрешающее уравнение (14) и определить потенциальную функцию с точностью до восьми произвольных констант интегрирования, затем простым дифференцированием определить кинематические и статические неизвестные. После этого произвольные константы определим из граничных условий конкретной задачи. Следует отметить, что для рассматриваемой модели количество граничных условий остаётся таким же, как и в классической теории.

Определим напряжения σ_x, σ_y и τ_{xy}, подставив в первые три равенства системы физических соотношений (3) вместо перемещений потенциальную функцию с помощью (13)

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) z, \quad \sigma_y = \frac{E}{(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) z, \\ \tau_{xy} &= 2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} z. \end{aligned} \tag{16}$$

Для аналогичного преобразования равенств (10) также используем соотношения (13). После преобразований в итоге получим

$$\tau_{xz} = \frac{E}{1-\mu^2} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \Phi \left(\frac{h^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right), \ \tau_{yz} = \frac{E}{1-\mu^2} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \Phi \left(\frac{h^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right).$$

Приведём решение тестовой задачи с целью сравнительной оценки приведённого решения с классическим. Шарнирно опёртая прямоугольная пластинка изгибается постоянной нагрузкой q_0, распределённой по верхнему основанию. В этом случае на контуре необходимо выполнить следующие условия

при $x = 0$ и $x = a$ $w = 0$, $\sigma_x = 0$,

при $y = 0$ и $y = b$ $w = 0$, $\sigma_y = 0$, где a и b длина и ширина пластинки, начало координат находится в точке $x = y = 0$.

Очевидно, что эти условия автоматически будут удовлетворены, если функцию Φ задать в виде двойного тригонометрического ряда по синусам

$$\Phi = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}, \tag{17}$$

где C_{mn} коэффициенты двойного ряда, зависящие от целых чисел m и n.
Подставим (17) в формулу для определения прогиба (15)

$$w = \sum_{1}^{\infty}\sum_{1}^{\infty} C_{mn}\left[\frac{h^2}{4(1-\mu)}\left(\lambda_m^2+\beta_n^2\right)-1\right]\sin\lambda_m x\sin\beta_n y, \tag{18}$$

где $\lambda_m = \dfrac{m\pi}{a}$, $\beta_n = \dfrac{n\pi}{b}$, a и b длина и ширина пластинки.

После подстановки (17) в разрешающее уравнение (14) и проведения стандартных преобразований определим общий коэффициент двойного ряда и внесём полученное значение в формулу для определения прогиба (18)

$$w = -\frac{16q_0}{Dab}\sum_{1}^{\infty}\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin\lambda_m x\sin\beta_n y}{\left(\lambda_m^2+\beta_n^2\right)^2\lambda_m\beta_n} + \frac{24q_0}{Ghab}\sum_{1}^{\infty}\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin\lambda_m x\sin\beta_n y}{\left(\lambda_m^2+\beta_n^2\right)\lambda_m\beta_n}, \tag{19}$$

где $\lambda_m = \dfrac{m\pi}{a}$, $\beta_n = \dfrac{n\pi}{b}$, m и n целые нечётные числа.

Первое слагаемое полученной формулы полностью совпадает с классическим решением шарнирно опёртой по контуру пластинки, изгибаемой постоянной нагрузкой, распределённой по верхнему основанию. Очевидно, второе слагаемое в (19) представляет собой уточнение классического решения в рамках рассматриваемой модели. Поскольку эти слагаемые разнозначные, то уточнённый прогиб, очевидно, меньше классического.

Для квадратной пластинки, в которой размер пластинки в её плоскости в пять раз больше толщины, при удержании только первого члена ряда, получим уточнение максимального прогиба в центре пластинки около 14%. При удержании большего числа членов двойного ряда уточнение может быть ещё больше, поскольку двойной ряд во втором слагаемом в формуле (16) сходится медленнее, и для получения приемлемого результата требуется удержать большее число членов этого ряда. При уменьшении толщины пластинки уточняющий эффект второго слагаемого в (19) будет снижаться.

Другой подход, весьма близкий к описанному, связан с переходом к интегральным характеристикам напряжённого состояния пластинки путём интегрирования по толщине уравнений равновесия (4), как это представлено в классической теории, и таким образом перейти от напряжений к изгибающим и крутящему моменту, а также перерезывающим силам, возникающим в поперечных сечениях пластинки под воздействием внешней нагрузки

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y},\quad Q_y = \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y},\quad \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - q = 0, \tag{20}$$

где в соответствии с (16)

$$M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x z dz = \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{E}{\left(1-\mu^2\right)} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) z^2 dz = D \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right),$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y z dz = \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{E}{\left(1-\mu^2\right)} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) z^2 dz = D \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right), \quad (21)$$

$$H = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} z dz = \int_{-h/2}^{+h/2} 2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} z^2 dz = D\left(1-\mu\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}.$$

Подставляя (21) в первые два уравнения (20), получим связь перерезывающих сил с потенциальной функцией Φ

$$Q_x = D\left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial y^2} \right), \quad Q_y = D\left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial y} \right). \quad (22)$$

Подставляя полученное в третье уравнение (20), придём к разрешающему уравнению (14).

Для определения прогиба обратимся к последним двум соотношениям системы физических уравнений (3). Интегрируя эти равенства по толщине, получим

$$Q_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xz} dz = G\left(u_0 + \frac{\partial w}{\partial x} \right) h, \quad Q_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yz} dz = G\left(v_0 + \frac{\partial w}{\partial y} \right) h$$

или $Q_x = G\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\Phi + w\right) h, \quad \mathrm{Q}_y = G\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\Phi + w\right) h.$

Подставляя полученное в равенства (22), интегрируя первое равенство по x, второе по y и пренебрегая константой интегрирования, получим формулу для определения прогиба

$$w = -\Phi + \frac{h^2}{6\left(1-\mu\right)} \nabla^2 \Phi. \quad (23)$$

Сравнивая (23) с (15) при нулевых w_1 и w_2, констатируем, что коэффициент перед оператором Лапласа в (15) в полтора раза больше аналогичного коэффициента в (23). Также в полтора раза отличаются коэффициенты при вторых слагаемых в формулах для прогиба при решении задачи изгиба шарнирно опёртой по контуру пластинки в двойных тригонометрических рядах.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Решена задача изгиба тонкой пластинки при минимальных отступлениях от классической теории, связанных с сохранением деформаций сдвига в поперечных по отношению к основаниям пластинки плоскостях.
2. Также, как и в классической теории, перемещения в плоскости пластинки линейно зависят от поперечной координаты. В общем случае эти перемещения и прогиб пластинки кинематически независимы.
3. Поученная система уравнений равновесия в перемещениях в общем случае шестого порядка, благодаря чему мы могли бы получить необходимое количество произвольных функций и констант интегрирования

для удовлетворения трёх граничных условий на каждой граничной кромке. Однако, отсутствие связи двух перемещений в плоскости с прогибом и с действующей нагрузкой устраняет такую возможность.

4. Приемлемое решение получается в результате некоторого гибридного подхода, когда касательные напряжения, найденные из уравнений равновесия, после выполнения граничных условий отсутствия касательной нагрузки на основаниях пластинки, приводятся в соответствие касательным напряжениям из физических соотношений.
5. Тестовая задача изгиба шарнирно опёртой по контуру пластинки даёт уточнение более 14% по отношению к классической составляющей суммарного прогиба.
6. Практически такие же уравнения для определения искомых функций получим, если вначале перейдём к интегральным характеристикам напряжённого состояния. Но формулы для определения прогиба отличаются в полтора раза коэффициентами, стоящими пред оператором Лапласа во вторых слагаемых приведённых решений.
7. Даже при минимальных отступлениях от классических гипотез теории изгиба пластин получаем решение, отличное от классического.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. *Пластины и оболочки.* – М.: Наука, 1966. – 636 с.
2. Васильев В.В., Лурье С.А. *К проблеме построения неклассических теорий пластин* // Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела. – 1990. – С.158-167.
3. Васильев В.В., Лурье С.А. *Вариант уточненной теории изгиба балок из слоистых пластмасс* // Механика полимеров. – 1972. – №4. – С.577-768.
4. Амбарцумян С.А. *Теория анизотропных пластин. Учебное пособие. 2-е изд., перераб. и доп.* – М.: Наука, 1987. – 360 с.
5. Елисеев В.В. *Механика деформируемого твердого тела.* – СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2006. – 231 с.
6. Ван Цзи-де. *Прикладная теория упругости.* – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. – 400 с.
7. Фирсанов В.В. *Особенности изгиба тонкой прямоугольной пластинки из материала с неизменяемым объёмом* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т.24. – №3. – С.490-498.
8. Carrera E., Giunta G., Petrolo M. *Beam Structures: Classical and Advanced Theories.* – Wiley, 2011. – 204 p.

REFERENCES

1. Timoshenko S.P., Vojnovskij-Kriger S. *Plastiny i obolochki [Plates and shells].* Moskva, Nauka, 1966, 636 p.
2. Vasil’ev V.V., Lur’e S.A. *K probleme postroeniya neklassicheskikh teorij plastin [On the problem of constructing non-classical plate theories].* Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tvyordogo tela, 1990, Pp.158-167.

3. Vasil’ev V.V., Lur’e S.A. *Variant utochnennoj teorii izgiba balok iz sloistykh plastmass [A variant of the refined theory of bending beams made of laminated plastics]*. Mekhanika polimerov, 1972, No.4, Pp.577-768.
4. Ambartsumyan S.A. *Teoriya anizotropnykh plastin [*Theory of anisotropic plates*]*. Moskva, Nauka, 1987, 360 p.
5. Yeliseyev V.V. *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela [Mechanics of a deformable solid].* SPb., Izdatel’stvo Politekhnicheskogo universiteta, 2006, 231 p.
6. Van Tszi-de. *Prikladnaya teoriya uprugosti [Applied theory of elasticity]*. Moskva, Gosudarstvennoe izdatel’stvo fiziko-matematicheskoj literatury, 1959, 400 p.
7. Firsanov V.V. *Osobennosti izgiba tonkoj pryamougol’noj plastinki iz materiala s neizmenyaemym ob”yomom [Features of bending a thin rectangular plate made of a material with an unchangeable volume].* Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2018, Vol.24, No.3, Pp.490-498.
8. Carrera E., Giunta G., Petrolo M. *Beam Structures: Classical and Advanced Theories.* Wiley, 2011, 204 p.

Поступила в редакцию 26 ноября 2020 года.

Сведения об авторе:

Фирсанов Виктор Васильевич – к.т.н., доц., Кафедра «Проектирование и прочность авиационно-ракетных и космических изделий», ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия; e-mail: kaf603@mai.ru