

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЯЗКОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ИЗГИБНОГО ПОВЕДЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ПРОСТРАНСТВЕННЫМИ СТРУКТУРАМИ АРМИРОВАНИЯ*

Янковский А.П.

*ФГБУН Институт теоретической и прикладной механики
им. С.А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия*

АННОТАЦИЯ

На основе метода шагов по времени разработана численно-аналитическая модель вязкоупругопластического деформирования круговых цилиндрических оболочек с пространственным армированием. Мгновенное пластическое деформирование материалов композиции описывается теорией течения с изотропным упрочнением. Вязкоупругое поведение этих материалов описывается определяющими уравнениями модели тела Максвелла – Больцмана. Геометрическая нелинейность задачи учитывается в приближении Кармана. Возможное слабое сопротивление композитных оболочек поперечным сдвигам учитывается в рамках теории Амбарцумяна. Построенная модель механического поведения материалов композиции адаптирована под применение явной численной схемы типа «крест». Исследовано вязкоупругопластическое и упругопластическое динамическое и квазистатическое деформирование тонких гибких стеклопластиковых цилиндрических оболочек под действием внутреннего давления, а также прямоугольных удлиненных пластин под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки. Рассматриваются традиционное перекрестное армирование конструкций по эквидистантным поверхностям и пространственные структуры армирования. Продемонстрировано, что расчеты, выполненные по теории упругопластического и жесткопластического деформирования армированных оболочек и пластин, не позволяют даже приближенно определить остаточные состояния композитных конструкций при их динамическом нагружении. Показано, что после вязкоупругопластического динамического деформирования относительно тонкие армированные конструкции приобретают гофрированные остаточные формы. При квазистатическом поперечном нагружении композитных пластин остаточный прогиб имеет традиционный вид, т.е. складки при этом не образуются.

Ключевые слова: гибкая цилиндрическая оболочка; эквидистантное армирование; пространственное армирование; динамические нагрузки взрывного типа; вязкоупругопластическое деформирование; теория Амбарцумяна; геометрическая нелинейность; численная схема «крест»

MODELING OF VISCOELASTIC-PLASTIC BENDING BEHAVIOR OF CYLINDRICAL SHELLS WITH SPATIAL REINFORCEMENT STRUCTURES

Yankovskii A.P.

* Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2017-2020 годы (проект 23.4.1 – Механика деформирования и разрушения материалов, сред при механических нагрузках, воздействии физических полей и химически активных сред).

Khristianovich Institute of theoretical and applied mechanics the Siberian Branch of the Russian Academy of Science, Novosibirsk, Russia

ABSTRACT

Based on the method of time steps, a numerical-analytical model of viscoelastic-plastic deformation of circular cylindrical shells with spatial reinforcement has been developed. Instant plastic deformation of the materials of the components of the composition is described by the theory of flow with isotropic hardening. The viscoelastic deformation of these materials is described by the governing equations of the Maxwell – Boltzmann model of the body. The geometric nonlinearity of the problem is taken into account in the Karman approximation. The possible weak resistance of composite shells to transverse shears is taken into account on the basis of the Ambardzumyan theory. The developed model of the mechanical behavior of materials of the components of the composition is adapted to the use of an explicit numerical “cross” type scheme. The viscoelastic-plastic and elastoplastic dynamic and quasistatic deformation of thin flexible fiberglass cylindrical shells under the influence of internal pressure, as well as rectangular elongated plates under the action of a uniformly distributed transverse load, are studied. The constructions have traditional reinforcement structures with orthogonal laying of fibers on equidistant surfaces or have spatial reinforcement structures. It is demonstrated that calculations performed on the theory of elastoplastic and rigid-plastic deformation of reinforced shells and plates do not give even an approximate idea of the residual states of composite constructions under their dynamic loading. It is shown that, after viscoelastic-plastic dynamic deformation, relatively thin reinforced constructions acquire corrugated residual forms. With quasistatic transverse loading of composite plates, the residual deflection has a traditional form, i.e., folds are not formed.

Keywords: cylindrical shell; equidistant reinforcement; spatial reinforcement; explosive-type dynamic loads; viscoelastic-plastic deformation; Ambardzumyan theory; geometric nonlinearity; numerical “cross” type scheme

ВВЕДЕНИЕ

Композитные оболочки широко используются в инженерной практике [1-7], поэтому актуальна проблема математического моделирования механического поведения оболочек из композиционных материалов (КМ), в том числе и при воздействии интенсивных кратковременных нагрузок [7,8]. Известно, что тонкостенные КМ-конструкции, армированные по эквидистантным поверхностям, плохо сопротивляются поперечному сдвигу при их изгибном деформировании [1,2,4-8]. Для устранения этого серьезного недостатка используют пространственные структуры армирования КМ-изделий [8]. Упругопластическое поведение цилиндрических КМ-оболочек с такими структурами армирования моделировалось в [9], а в [10] изучалось вязкоупругопластическое деформирование КМ-пластин. Механическое поведение компонентов композиции в [9] описывалось соотношениями, не учитывающими вязкоупругие свойства реальных материалов [11]. Поэтому механическая модель, использованная в [9], не позволяет определять остаточные перемещения и остаточное деформированное состояние компонентов композиции оболочек при высокоинтенсивных кратковременных воздействиях. Следовательно, актуальной является проблема моделирования вязкоупругопластического поведения [11] КМ-оболочек с пространственными структурами армирования.

Слабое сопротивление тонкостенных КМ-конструкций поперечным сдвигам (которое может проявляться и при некоторых пространственных структурах

армирования [8]) традиционно учитывают в рамках теорий Рейсснера [2,7], Амбарцумяна [1] или Редди-Немировского [4,5]. Для численного интегрирования динамических нелинейных задач механики тонкостенных конструкций используют явные схемы [9,10], как правило типа «крест», или неявные методы, чаще всего из семейства методов Ньюмарка [12,13].

В связи с вышеизложенным данная работа посвящена моделированию вязкоупругопластического поведения гибких цилиндрических оболочек с пространственными структурами армирования. Возможное слабое сопротивление поперечным сдвигам при этом учитывается в рамках теории Амбарцумяна [1], а численное интегрирование возникающих начально-краевых задач осуществляется на основе явной схемы «крест».

1. МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЯЗКОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ГИБКОЙ АРМИРОВАННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Рассмотрим замкнутую цилиндрическую оболочку радиуса R , длиной L и толщиной $2h \ll \min(L, R)$ (рис.1). Свяжем с конструкцией цилиндрическую систему координат x_i таким образом, что x_1 – осевая ($0 \leq x_1 \leq L$), x_2 – угловая ($0 \leq x_2 < 2\pi$) – в окружном направлении, x_3 – радиальная ($R-h \leq x_3 \leq R+h$) координаты. Конструкция усилена N семействами волокон с плотностями армирования ω_k ($1 \leq k \leq N$), которые уложены по эквидистантным поверхностям, – традиционное «плоско»-перекрестное армирование (рис.1б и 2а) – или имеет пространственно-перекрестную структуру армирования (рис.2б). В поперечном направлении x_3 структура армирования однородна. С каждым k -м семейством волокон свяжем локальную систему координат $x_i^{(k)}$, как показано на рис.3, тогда направление армирования можно задать двумя углами сферической системы координат θ_k и φ_k . Направляющие косинусы $l_{ij}^{(k)}$ между осями $x_i^{(k)}$ и x_j ($i, j = \overline{1, 3}, 1 \leq k \leq N$) при этом вычисляются по формулам (11) из [14].

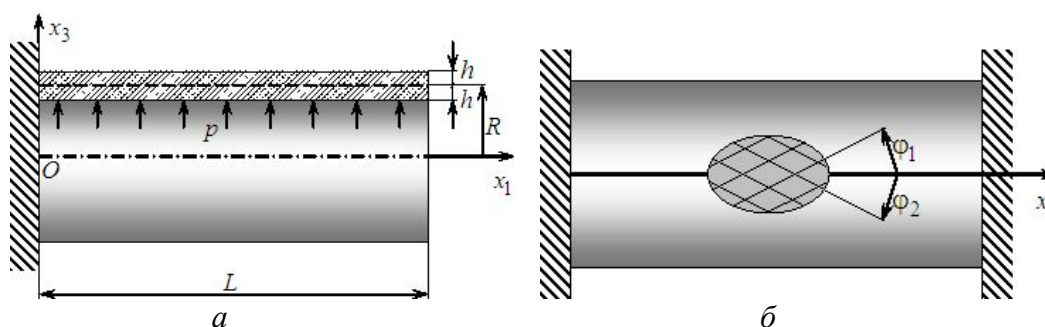


Рис.1. Цилиндрические оболочки: жестко закрепленная на левой кромке (а) и жестко закрепленная на обеих кромках (б).

Исследуется практически важный случай нагружения, когда к лицевым поверхностям ($x_3 = R \pm h$) прикладываются только нормальные распределенные внешние силы (рис.1а). Кроме того, предполагается, что пространственные структуры армирования обладают следующим свойством: если волокна k -го

семейства имеют наклонную траекторию ($0 < \theta_k < \pi/2$), то обязательно присутствует l -ое семейство наклонной арматуры с параметрами армирования $\theta_l = \pi - \theta_k$, $\varphi_l = \varphi_k$, $\omega_l = \omega_k$, $1 \leq k, l \leq N$, $l \neq k$ (см. рис.3). Такие структуры армирования часто встречаются в практических приложениях [8] (см., например, структуру, изображенную на рис.2б).

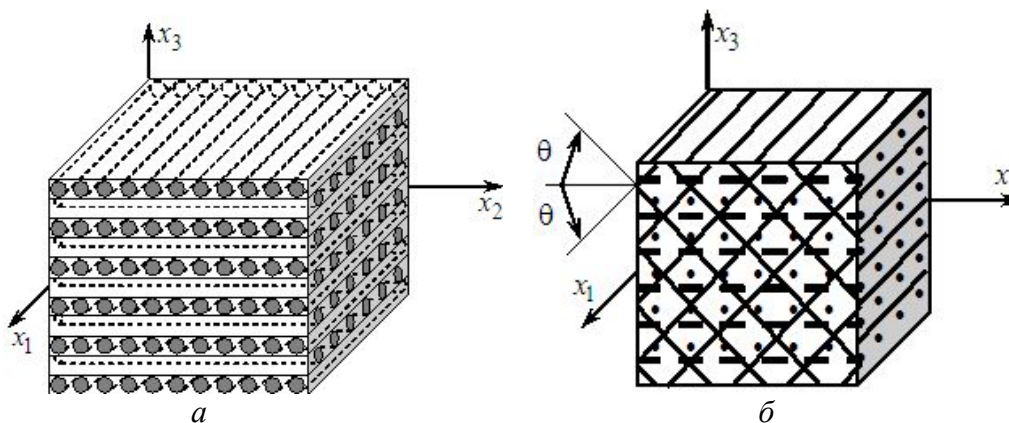


Рис.2. Представительный элемент композиции оболочки с традиционным ортогональным 2D-армированием по эквидистантным поверхностям (а) и с пространственным 4D-армированием (б).

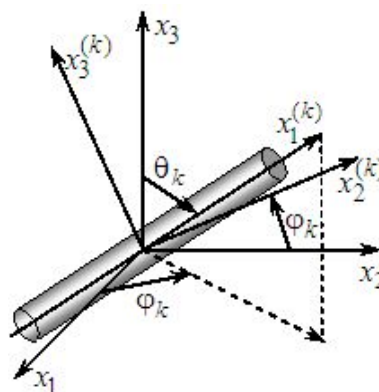


Рис.3. Локальная система координат, связанная с арматурой k -го семейства.

Для учета возможного слабого сопротивления цилиндрической КМ-оболочки поперечным сдвигам [1,2,4,5,7] используем теорию Амбарцумяна [1], согласно которой осредненные деформации композиции ε_{ij} и перемещения точек конструкции U_i аппроксимируем так (геометрическая нелинейность задачи учитывается в приближении Кармана) [9]

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11}(t, \mathbf{r}) &= \partial_1 u_1 - z \partial_1^2 w + f_1^0(z) \partial_1 \varepsilon_{13}^0 + 0,5(\partial_1 w)^2, \\
 \varepsilon_{22}(t, \mathbf{r}) &= (R+z)^{-1} \times [(R+z) R^{-1} \partial_2 u_2 + \partial_2^2 w + w + f_2^0(z) \partial_2 \varepsilon_{23}^0] + \\
 &\quad + 0,5(R+z)^{-2} (\partial_2 w)^2, \\
 2\varepsilon_{12}(t, \mathbf{r}) &= (R+z)^{-1} [\partial_2 u_1 - z \partial_1 \partial_2 w + f_1^0(z) \partial_2 \varepsilon_{13}^0] + (R+z) R^{-1} \partial_1 u_2 + \\
 &\quad + \partial_1 \partial_2 w + f_2^0(z) \partial_1 \varepsilon_{23}^0 + (R+z)^{-1} \partial_1 w \partial_2 w, \\
 \varepsilon_{i3}(t, \mathbf{r}) &= h^{-2} (h^2 - z^2) \varepsilon_{i3}^0(t, \mathbf{x}), \quad i = 1, 2;
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
U_1(t, \mathbf{r}) &= u_1(t, \mathbf{x}) - z \partial_1 w + f_1^0(z) \varepsilon_{13}^0(t, \mathbf{x}), \\
U_2(t, \mathbf{r}) &= (R+z) R^{-1} u_2(t, \mathbf{x}) + \partial_2 w + f_2^0(z) \varepsilon_{23}^0(t, \mathbf{x}), \\
U_3(t, \mathbf{r}) &= w(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2), \quad \mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3), \quad x_3 \equiv R+z, \\
\mathbf{x} \in \Omega, \quad |z| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad \Omega &= \{ \mathbf{x}: 0 \leq x_1 \leq L, 0 \leq x_2 < 2\pi \},
\end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned}
f_i^0(z) &\equiv 2h^{-2} [h^2 \Phi_i^{(0)}(z) - \Phi_i^{(2)}(z)] \quad (i=1, 2), \\
\Phi_1^{(l)}(z) &\equiv h^{-l} (1+l)^{-1} z^{l+1}, \quad \Phi_2^{(l)}(z) \equiv h^{-l} (R+z) \Psi_l(z), \\
\Psi_l(z) &\equiv \sum_{m=0}^{l-1} \frac{(-1)^m R^m z^{l-m}}{l-m} - R^l \ln(R+z), \quad l=0, 2;
\end{aligned} \tag{3}$$

\mathbf{r} – вектор места; \mathbf{x} – то же для точек отсчетной поверхности ($z=0$); ε_{i3}^0 – деформации поперечных сдвигов в точках этой поверхности; u_1, u_2 – продольное и окружное перемещения точек той же поверхности; w – прогиб; z – введенная новая радиальная координата; t_0 – начальный момент времени t ; Ω – область, занимаемая срединной поверхностью; ∂_i – оператор дифференцирования по переменной x_i . В выражениях (1), (2) с учетом (3) неизвестны функции w, u_i и ε_{i3}^0 ($i=1, 2$), зависящие от времени и двух пространственных координат x_1, x_2 .

Предполагается, что материал k -го компонента композиции изотропен и его вязкоупругопластическое поведение описывается соотношениями [10,14]

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}_{ij}^{(k)} &= 2G^{(k)} \dot{\varepsilon}_{ij}^{(k)} + \delta_{ij} \lambda^{(k)} \dot{\varepsilon}_{ll}^{(k)} - B^{(k)} \sigma_{ij}^{(k)} + \delta_{ij} D^{(k)} \sigma_{ll}^{(k)} - A^{(k)} s_{ij}^{(k)} s_{ml}^{(k)} \dot{\varepsilon}_{ml}^{(k)}, \\
i, j &= \overline{1, 3}, \quad 0 \leq k \leq N,
\end{aligned} \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned}
A^{(k)} &= \frac{G^{(k)} \kappa^{(k)}}{T_k^2}, \quad B^{(k)} = \frac{G^{(k)}}{\eta^{(k)}} (1 - \kappa^{(k)}), \quad D^{(k)} = \frac{1}{3} \left(B^{(k)} - \frac{K^{(k)}}{\mu^{(k)}} \right), \quad \kappa^{(k)} = \frac{c^{(k)}}{1 + g^{(k)}}, \\
g^{(k)} &= \frac{\overline{G}^{(k)}}{G^{(k)}}, \quad \lambda^{(k)} = \frac{\nu^{(k)} E^{(k)}}{(1 + \nu^{(k)})(1 - 2\nu^{(k)})}, \quad G^{(k)} = \frac{E^{(k)}}{2(1 + \nu^{(k)})}, \quad K^{(k)} = \frac{E^{(k)}}{3(1 - 2\nu^{(k)})}, \\
c^{(k)} &= \begin{cases} 0, & T_k < \tau_s^{(k)}(\chi^{(k)}) \quad \text{или} \quad T_k = \tau_s^{(k)}(\chi^{(k)}), \quad s_{ij}^{(k)} \dot{\varepsilon}_{ij}^{(k)} \leq \left(\tau_s^{(k)}(\chi^{(k)}) \right)^2 \left(\eta^{(k)} \right)^{-1}, \\ 1, & T_k = \tau_s^{(k)}(\chi^{(k)}), \quad s_{ij}^{(k)} \dot{\varepsilon}_{ij}^{(k)} > \left(\tau_s^{(k)}(\chi^{(k)}) \right)^2 \left(\eta^{(k)} \right)^{-1}, \end{cases} \tag{5}
\end{aligned}$$

$$T_k = \sqrt{\frac{1}{2} s_{ij}^{(k)} s_{ij}^{(k)}}, \quad \chi^{(k)} = \int_{t_0}^t \sqrt{2 \dot{p}_{ij}^{(k)} \dot{p}_{ij}^{(k)}} dt, \quad s_{ij}^{(k)} = \sigma_{ij}^{(k)} - \delta_{ij} \sigma_0^{(k)}, \quad \sigma_0^{(k)} = \frac{1}{3} \sigma_{ll}^{(k)};$$

$\sigma_{ij}^{(k)}, \varepsilon_{ij}^{(k)}$ – тензоры напряжений и деформаций; $p_{ij}^{(k)}$ – тензор пластических несжимаемых деформаций ($p_{ii}^{(k)} = 0$); $E^{(k)}, \nu^{(k)}$ – мгновенные модуль Юнга и коэффициент Пуассона; $\eta^{(k)}, \mu^{(k)}$ – коэффициенты линейной вязкости при чистом сдвиге и объемном расширении и сжатии; $\tau_s^{(k)}$ – функция упрочнения при чистом сдвиге, зависящая от параметра Одквиста $\chi^{(k)}$; $\overline{G}^{(k)}$ – касательный

модуль на мгновенной диаграмме чистого сдвига $\tau^{(k)} \sim \gamma_p^{(k)}$; $\gamma_p^{(k)}$ – пластическая составляющая полной угловой деформации при сдвиге; $\tau^{(k)}$ – касательное напряжение при сдвиге; δ_{ij} – символ Кронекера; индекс k – номер компонента композиции ($k = 0$ – связующий материал, $k \geq 1$ – арматура k -го семейства); точка – дифференцирование по времени.

Равенства (4) с учетом (5) получены в [10] при предположениях: малые деформации $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ можно представить в виде суммы вязкоупругих и пластических $p_{ij}^{(k)}$ составляющих; неупругое поведение материала описывается соотношениями теории пластического течения с изотропным упрочнением, а вязкоупругое деформирование – уравнениями модели тела Максвелла – Больцмана [11].

Как и в [10,14], численное решение рассматриваемой задачи будем строить на базе метода шагов по времени [9,12,13], т.е. значения неизвестных функций будем определять в дискретные моменты времени $t_{n+1} = t_n + \Delta$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), где Δ – шаг по времени. В работе [14] построена численно-аналитическая структурная модель вязкоупругопластического деформирования пространственно-армированного КМ, механическое поведение компонентов которого описывается уравнениями (4) с учетом (5). При этом в текущий момент времени t_n определяющее соотношение для КМ можно записать в матричной форме

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^n = \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^n + \mathbf{p}^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (6)$$

где

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3 \ \sigma_4 \ \sigma_5 \ \sigma_6)^T \equiv (\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{23} \ \sigma_{31} \ \sigma_{12})^T, \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \varepsilon_3 \ \varepsilon_4 \ \varepsilon_5 \ \varepsilon_6)^T \equiv (\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ 2\varepsilon_{23} \ 2\varepsilon_{31} \ 2\varepsilon_{12})^T,$$

$$\mathbf{p} = (p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4 \ p_5 \ p_6)^T;$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^n(\mathbf{r}) \equiv \dot{\boldsymbol{\sigma}}(t_n, \mathbf{r}), \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^n(\mathbf{r}) \equiv \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t_n, \mathbf{r}), \quad \mathbf{p}^n(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{p}(t_n, \mathbf{r}), \quad \mathbf{B}^n(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{B}(t_n, \mathbf{r}); \quad (8)$$

σ_{ij} , ε_{ij} – тензоры осредненных напряжений и деформаций в композиции; \mathbf{B} – 6×6 -матрица; индекс t – операция транспонирования.

Равенство (6) предполагается линеаризованным по методу переменных параметров упругости [15]. Матрица \mathbf{B} и вектор-столбец \mathbf{p} в (6) при учете обозначений (7) рассчитываются по формулам (8)-(11) из [14]. При этом на текущей итерации метода переменных параметров упругости в момент времени t_n элементы матрицы \mathbf{B} и вектора \mathbf{p} известны и зависят от механических характеристик компонентов композиции, напряженного состояния в них (рассчитанного на предыдущей итерации) и от структуры армирования (плотностей ω_k и углов θ_k , φ_k армирования).

В силу того, что исследуется динамическое поведение цилиндрической КМ-оболочки как гибкой тонкостенной системы с приемлемой для практических приложений точностью нормальное напряжение $\sigma_{33}(t, \mathbf{r})$ можно линейно аппроксимировать по поперечной координате z [2]

$$\sigma_{33}(t, \mathbf{r}) \equiv \sigma_3(t, \mathbf{r}) = \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) - \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2h} z + \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) + \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2}, \quad (9)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad |z| \leq h, \quad t \geq t_0,$$

где $\sigma_{33}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) \equiv \sigma_{33}(t, \mathbf{x}, \pm h)$ – нормальные напряжения на внутренней (–) и внешней (+) лицевых поверхностях, известные из силовых граничных условий.

Матричное соотношение (6) – линейризованная система шести уравнений. В силу условий соответствия (7) из третьего уравнения этой системы выразим скорость линейной поперечной деформации композиции оболочки

$$\dot{\epsilon}_{33}^n \equiv \dot{\epsilon}_3^n = \frac{1}{b_{33}^n} \left(\dot{\sigma}_3^n - \sum_{i=1}^6 (1 - \delta_{3i}) b_{3i}^n \dot{\epsilon}_i^n - p_3^n \right), \quad (10)$$

где в момент времени t_n значения функции $\dot{\sigma}_3$ известна из соотношения (9) после его дифференцирования по t ; b_{3i}^n ($i = \overline{1, 6}$) – элементы матрицы \mathbf{B}^n в (6). Скорости деформаций $\dot{\epsilon}_i^n$ в правой части равенства (10) определяются путем дифференцирования по времени соотношений (1), т.е. выражаются через функции w , \dot{w} , \dot{u}_l и $\dot{\epsilon}_{l3}^0$ ($l = 1, 2$).

Для завершения постановки задачи вязкоупругопластического деформирования тонких гибких цилиндрических КМ-оболочек к соотношениям (1), (2), (6) и (10) необходимо присоединить соответствующие уравнения динамического равновесия, начальные и граничные условия, которые общеизвестны (см. [9], формулы (22), (23), (26), (28) и (30)).

2. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА

Как отмечалось в разделе 1, численное решение рассматриваемой задачи разыскивается с использованием алгоритма шагов по времени, поэтому предполагаем, что в дискретные моменты времени t_m уже определены значения следующих функций

$$w(\mathbf{x}) \equiv w(t_m, \mathbf{x}), \quad u_s^{(l)}(\mathbf{x}) \equiv u_s^{(l)}(t_m, \mathbf{x}), \quad \sigma_{33}^{(\pm)}(\mathbf{x}) \equiv \sigma_{33}^{(\pm)}(t_m, \mathbf{x}),$$

$$\dot{\sigma}_{33}^{(\pm)}(\mathbf{x}) \equiv \dot{\sigma}_{33}^{(\pm)}(t_m, \mathbf{x}), \quad \sigma_{ij}^m(\mathbf{r}) \equiv \sigma_{ij}(t_m, \mathbf{r}), \quad X_j^m(\mathbf{r}) \equiv X_j(t_m, \mathbf{r}), \quad (11)$$

$$s = 1, 2, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad m = n-1, n, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |z| \leq h,$$

где

$$u_s^{(l)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h U_s(t, \mathbf{r}) z^l dx_3 \quad (s = 1, 2, \quad l = 0, 1) \quad (12)$$

– введенные для удобства новые кинематические переменные [9]; X_j – объемные нагрузки, действующие на КМ оболочки.

Производные по времени (за исключением преобразований соотношений (4) (см. равенства (4)-(6) в [14]), необходимых для обеспечения устойчивости разрабатываемой численной схемы [10]) аппроксимируем центральными конечными разностями на трехточечном шаблоне $\{t_{n-1}, t_n, t_{n+1}\}$, что позволяет

получить явную схему для интегрирования исследуемой задачи. Заменяя производные по t от кинематических переменных w и $u_s^{(l)}$ (см. (12)) в уравнениях динамического равновесия их конечно-разностными аналогами при учете обозначений, аналогичных (8) и (11), будем иметь [9]

$$\begin{aligned} \frac{2h\rho}{\Delta^2} \left(w^{n+1} - 2w^n + w^{n-1} \right) &= \partial_1 \left(M_{13}^{(0)} + M_{11}^{(0)} \partial_1 w^n + \bar{M}_{12}^{(0)} \partial_2 w^n \right) + \\ &+ \partial_2 \left(\bar{M}_{23}^{(0)} + \bar{M}_{21}^{(0)} \partial_1 w^n + \bar{M}_{22}^{(0)} \partial_2 w^n \right) - \bar{M}_{22}^{(0)} + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)} + X_3^{(0)}, \\ \frac{\rho}{\Delta^2} \left(u_1^{(l+1)} - 2u_1^{(l)} + u_1^{(l-1)} \right) &= \partial_1 \left(M_{11}^{(l)} - M_{13}^{(l)} \partial_1 w^n \right) + \partial_2 \left(\bar{M}_{12}^{(l)} - \bar{M}_{23}^{(l)} \partial_1 w^n \right) - \\ &- l M_{13}^{(l-1)} + l \bar{M}_{33}^{(l-1)} \partial_1 w^n - h^l \left[\sigma_{33}^{(+)} - (-1)^l \sigma_{33}^{(-)} \right] \partial_1 w^n + X_1^{(l)}, \\ \frac{\rho}{\Delta^2} \left(u_2^{(l+1)} - 2u_2^{(l)} + u_2^{(l-1)} \right) &= \partial_1 \left(M_{21}^{(l)} - \bar{M}_{13}^{(l)} \partial_2 w^n \right) + \partial_2 \left(\bar{M}_{22}^{(l)} - \bar{M}_{23}^{(l)} \partial_2 w^n \right) - \\ &- l M_{23}^{(l-1)} + l \bar{M}_{33}^{(l-1)} \partial_2 w^n - h^l \left[(R+h)^{-1} \sigma_{33}^{(+)} - (-1)^l (R-h)^{-1} \sigma_{33}^{(-)} \right] \partial_2 w^n + \\ &+ \bar{M}_{23}^{(l)} + X_2^{(l)}, \quad l = 0, 1, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \tag{13}$$

где (см. (9))

$$\begin{aligned} X_i^{(l)}(t, \mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h X_i(t, \mathbf{r}) z^l dz, \quad M_{ij}^{(l)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h \sigma_{ij}(t, \mathbf{r}) z^l dz, \\ \bar{M}_{ij}^{(l)}(t, \mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h \frac{\sigma_{ij}(t, \mathbf{r})}{R+z} z^l dz, \quad \bar{\bar{M}}_{ij}^{(l)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h \frac{\sigma_{ij}(t, \mathbf{r})}{(R+z)^2} z^l dz, \end{aligned}$$

$$\rho = \rho_0 \omega_0 + \sum_{k=1}^N \rho_k \omega_k, \quad \omega_0 = 1 - \sum_{k=1}^N \omega_k,$$

$$\begin{aligned} l M_{33}^{(l-1)}(t, \mathbf{x}) &= l \int_{-h}^h \sigma_{33}(t, \mathbf{r}) z^{l-1} dz = \frac{h^l}{2} \left[\left(\sigma_{33}^{(+)} + \sigma_{33}^{(-)} \right) \left(1 - (-1)^l \right) + \right. \\ &\left. + \frac{l}{l+1} \left(\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)} \right) \left(1 + (-1)^l \right) \right], \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} l \bar{M}_{33}^{(l-1)}(t, \mathbf{x}) &= l \int_{-h}^h \frac{\sigma_{33}(t, \mathbf{r})}{R+z} z^{l-1} dz = \frac{l}{2h} \left(\sigma_{33}^{(+)} + \sigma_{33}^{(-)} \right) \left(\Psi_l(h) - \Psi_l(-h) \right) + \\ &+ \frac{l}{2} \left(\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)} \right) \left(\Psi_{l-1}(h) - \Psi_{l-1}(-h) \right), \end{aligned}$$

$$i, j = \overline{1, 3}, \quad l = 0, 1;$$

ρ_0, ρ_k – объемная плотность связующего и арматуры k -го семейства; $M_{ij}^{(l)}, \bar{M}_{ij}^{(l)}, \bar{\bar{M}}_{ij}^{(l)}$ – внутренние силовые факторы.

Используя (14) при учете (11), в текущий момент времени t_n можем вычислить все силовые факторы и внешние силы, входящие в правые части уравнений (13), поэтому, учитывая соответствующие граничные условия (см. (26) и (28) в [9]), из равенств (13) можем определить по явной схеме значения неизвестных функций w^{n+1} и $u_i^{(l)n+1}$ в следующий момент времени t_{n+1} . Далее по формулам (35) из [9] (которые следуют из (2), (3) и (12)) при известных w^{n+1} и $u_i^{(l)n+1}$ ($l=0, 1$) получаем u_i^{n+1} и ε_{i3}^{n+1} ($i=1, 2$), затем по формулам (1) определяем осредненные деформации композиции оболочки ε_{ij}^{n+1} . Так как при $t=t_{n-1}$ деформации ε_{ij}^{n-1} предполагаются уже известными (см. (1) с учетом (11)), то, используя формулы численного дифференцирования по t и выражение (10), можем вычислить и скорости осредненных деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}^n$ в каждой точке конструкции в момент времени t_n . Последующее решение задачи строится численно совершенно так же, как и ранее в [9,10,14].

Согласно структуре левых частей уравнений (13), для начала расчета по разработанной численной схеме необходимо сначала получить значения функций w^m и $u_i^{(l)m}$ ($m=0, 1$). Функции w^0 и $u_i^{(l)0}$ однозначно задаются начальными условиями (см. (30) и (31) в [9]), а функции w^1 и $u_i^{(l)1}$ ($i=1, 2, l=0, 1$) можно вычислить по формуле Тейлора, используя начальные условия и уравнения движения в начальный момент времени t_0 (см. (39) в [9]).

Так как для замкнутой цилиндрической КМ-оболочки область Ω (см. (2)) является прямоугольной, то, аппроксимируя в уравнениях (13) и соответствующих силовых граничных условиях (см. (26) в [9]) производные $\partial_i(\bullet)$ их конечно-разностными аналогами от уже известных (см. (14) при учете предположений (11)) в текущий момент времени t_n сеточных функций, окончательно получим явную численную схему типа «крест» [9,10,14]. Необходимые условия устойчивости данной схемы для однородных материалов получаются из условия Куранта [16]. Если эти условия выполняются для каждого компонента композиции, то они с запасом выполняются и для КМ-оболочки.

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТОВ

Рассмотрим упругопластическое и вязкоупругопластическое динамическое поведение относительно тонкой круговой замкнутой цилиндрической оболочки длиной $L=4$ м, радиуса $R=1$ м и толщиной $2h=2$ см ($2h/R=1/50$). Конструкция жестко закреплена на обеих кромках: $w=0$, $U_s=0$ при $x_1=0, L$ и $t \geq t_0$ (см. (2), (12), (13)), и до начального момента времени $t=t_0=0$ покоится в естественном состоянии ($w \equiv 0$, $\dot{w} \equiv 0$, $U_s \equiv 0$, $\dot{U}_s \equiv 0$ ($s=1, 2$) при $t < t_0$, $\mathbf{x} \in \Omega$ и $|z| \leq h$). Объемные силы не учитываем (см. (14) при $X_i \equiv 0$, $i=1, 3$). Оболочка

нагружается только внутренним давлением $p(t)$ условно соответствующим воздушной взрывной волне [12]

$$\sigma_{33}^{(+)} \equiv 0, \quad -\sigma_{33}^{(-)} = p(t) = \begin{cases} p_{\max} t/t_{\max}, & 0 \leq t \leq t_{\max}, \\ p_{\max} \exp[-\alpha(t-t_{\max})], & t > t_{\max}, \end{cases} \quad (15)$$

$$\alpha = -\ln(0,01)/(t_{\min} - t_{\max}) > 0, \quad t_{\min} \gg t_{\max}, \quad p(t_{\min}) = 0,01p_{\max}.$$

Смысл величин p_{\max} , t_{\max} , t_{\min} и α здесь очевиден и подробно описан в [9,10,14]. Согласно экспериментальным данным [12], в расчетах примем $p_{\max} = 8$ МПа, $t_{\max} = 0,1$ мс и $t_{\min} = 2$ мс.

Оболочка выполнена из эпоксидного связующего и армирована стеклянными волокнами. Диаграмма мгновенного упругопластического деформирования k -го компонента композиции при его активном нагружении аппроксимирована билинейной зависимостью

$$\sigma = \begin{cases} E^{(k)} \varepsilon, & |\varepsilon| \leq \varepsilon_s^{(k)} = \sigma_s^{(k)} / E^{(k)}, \\ \text{sign}(\varepsilon) \sigma_s^{(k)} + E_s^{(k)} (\varepsilon - \text{sign}(\varepsilon) \varepsilon_s^{(k)}), & |\varepsilon| > \varepsilon_s^{(k)}, \quad 0 \leq k \leq N, \end{cases}$$

где σ , ε – напряжение и деформация при растяжении–сжатии; $E_s^{(k)}$ – мгновенный модуль линейного упрочнения; $\sigma_s^{(k)}$ – условный предел текучести. Объемная вязкость материала не учитывается $\mu^{(k)} \rightarrow \infty$ (см. (5)). Физико-механические характеристики компонентов композиции оболочки приведены в таблице.

Таблица.
Физико-механические характеристики компонентов композиции [17,18].

Материал	ρ , кг/м ³	ν	σ_s , МПа	E , ГПа	E_s , ГПа	η , МПа·с
Эпоксидная смола	1210	0,33	20	2,8	1,114	150
Стекловолокно	2520	0,25	4500	86,8	6,230	600

Рассматриваются две однородные структуры армирования: 1. Традиционное ортогональное 2D-армирование по эквидистантным поверхностям (рис.2а) с плотностями армирования $\omega_1 = 0,1$ и $\omega_2 = 0,3$ в продольном и окружном направлениях соответственно; 2. Пространственное 4D-армирование, когда первые два семейства волокон укладываются по-прежнему ортогонально по эквидистантным поверхностям с плотностями $\omega_1 = 0,05$ и $\omega_2 = 0,3$, а третье и четвертое семейства волокон укладываются наклонно с плотностями армирования $\omega_3 = \omega_4 = 0,025$. В последнем случае углы сферической системы координат (см. рис.3), задающие направления армирования, определяются значениями: $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$, $\theta_3 = \pi/4$, $\theta_4 = 3\pi/4$, $\varphi_1 = \varphi_3 = \varphi_4 = 0$ и $\varphi_2 = \pi/2$ (т.е. на рис.2б угол $\theta = \pi/4$, а оси x_1 и x_2 нужно поменять местами). В обеих структурах армирования общий расход арматуры одинаков.

При указанных условиях нагружения, закрепления и армирования цилиндрической оболочки она деформируется осесимметрично (решение задачи не зависит от окружной координаты x_2), а также симметрично относительно

центрального сечения $x_1 = L/2$ (т.е. $w(t, x) = w(t, -x)$ и т.п., где $x = x_1 - L/2$ и $|x| \leq L/2$).

На рис.4 изображены осцилляции максимального по модулю значения прогиба КМ-оболочки ($w_m(t) = \max_{0 \leq x_1 \leq L} |w(t, x_1)|$); номера кривых соответствуют номерам структур армирования. Кривая $1''$ рис.4а получена при тех же условиях, что и кривая 1 , но рассчитана по упругопластической модели деформирования материалов композиции (при $\eta^{(k)} \rightarrow \infty$, $0 \leq k \leq N$; см. таблицу). Поведение кривой $1''$ свидетельствует о том, что, согласно упругопластическому расчету, КМ-оболочка неограниченно долго осциллирует. Кривые же 1 и 2 показывают, что к моменту времени $t = 300$ мс поперечные колебания конструкции при расчете по вязкоупругопластической модели практически полностью прекращаются и наибольший остаточный прогиб имеет значение порядка 1,5 мм. Сравнение кривых 1 и $1''$ на рис.4а демонстрирует, что упругопластические расчеты даже приближенно не позволяют оценить величину максимального остаточного прогиба тонкостенной КМ-конструкции.

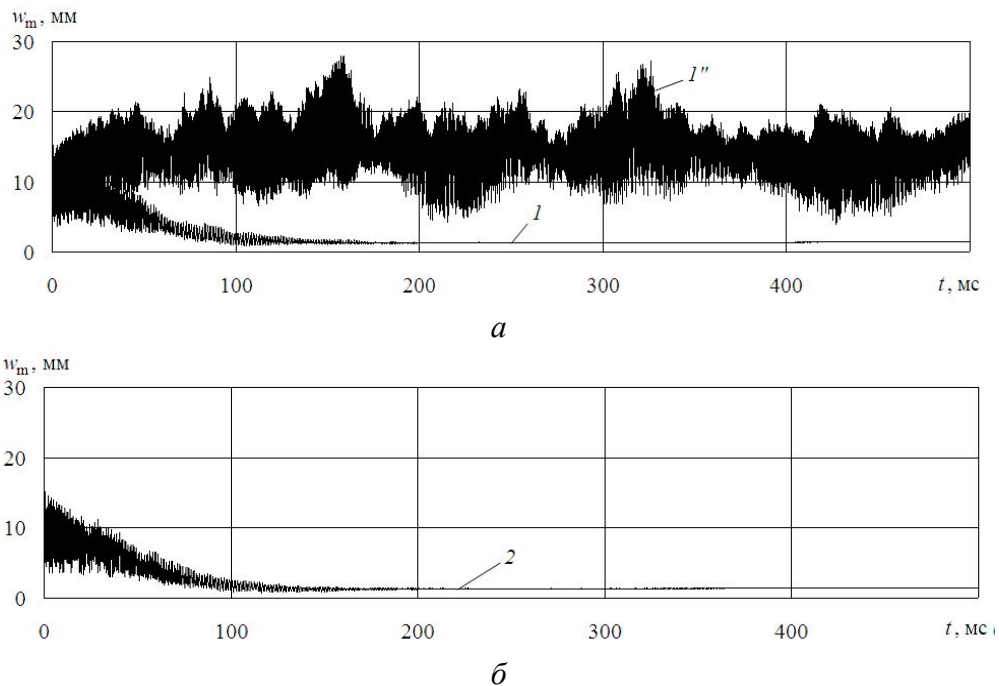


Рис.4. Осцилляции максимального по модулю значения прогиба упругопластической и вязкоупругопластической оболочек с традиционным 2D-армированием (а) и вязкоупругопластической оболочки с пространственным 4D-армированием (б).

На рис.5 изображены зависимости $w(x)$ ($x = x_1 - L/2$), полученные при $t = 500$ мс, когда, согласно поведению кривых 1 и 2 на рис.4, поперечные осцилляции КМ-оболочки практически прекратились. Кривые с одинаковыми номерами на рис.4 и 5 рассчитаны при одинаковых условиях. Так как решение рассматриваемой задачи обладает симметрией относительно центрального сечения оболочки $x = 0$ ($x_1 = L/2$), на рис.5 изображены только правые половины

зависимостей $w(x)$ ($|x| \leq L/2$). Сопоставление наибольших значений ординат точек на кривых 1 и 2 рис.5, которые достигаются при $x \approx 1,84$ м (в зоне краевого эффекта), свидетельствует о том, что при $t = 500$ мс значения w_m при использовании обеих структур армирования практически совпадают. Все-таки значение w_m на кривой 2 (4D-армирование) несколько меньше аналогичной величины на кривой 1 (2D-армирование). Однако поведение кривых 1 и 2 на рис.5 при $0 \leq x \leq 1,3$ м показывает, что в случае использования пространственной структуры армирования остаточный прогиб центральной части даже относительно тонкой цилиндрической КМ-оболочки на 10-20% меньше остаточного прогиба конструкции с традиционным армированием по эквидистантным поверхностям.

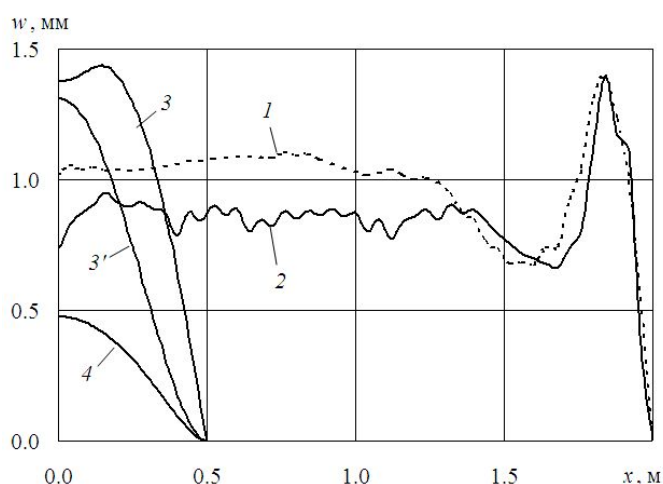


Рис.5. Эпюры остаточных прогибов армированных цилиндрических оболочек и удлиненных пластин, рассчитанные по моделям вязкоупругопластического и «жесткопластического» тел.

На рис.6 изображены полученные при прежних условиях осцилляции максимальных значений интенсивности деформаций компонентов композиции $\varepsilon_*^{(k)}$ ($\varepsilon_m^{(k)}(t) = \max_{x_1, z} \varepsilon_*^{(k)}$, $|z| \leq h$, $0 \leq x_1 \leq L$): связующей матрицы в окрестности начального момента времени (рис.6а); связующего и волокон первого семейства в окрестности момента времени $t = 500$ мс. Кривые 1 и 2 на рис.6 рассчитаны для связующего материала ($k = 0$), а кривые 1' и 2' на рис.6б – для арматуры первого семейства ($k = 1$). Сравнение кривых 1 и 2 на рис.4 и рис.6б показывает, что колебания оболочки с 4D-структурой армирования затухают быстрее, чем осцилляции конструкции с 2D-структурой. Сопоставление глобальных максимумов на кривых рис.6а (при $t = 0,5$ мс) свидетельствует о том, что наибольшее значение $\varepsilon_m^{(0)}$ для связующего КМ-оболочки с 4D-структурой армирования в 1,4 раза больше аналогичной величины в конструкции с 2D-структурой. Однако кривая 2 на рис.6б лежит ниже кривой 1, т.е. интенсивность остаточных деформаций связующей матрицы даже в относительно тонкой оболочке с пространственной структурой армирования меньше, чем интенсивность остаточных деформаций того же материала

в конструкции с армированием по эквидистантным поверхностям. Наоборот, расположение кривых $1'$ и $2'$ на рис.6б указывает на то, что остаточные значения $\varepsilon_m^{(1)}$ арматуры первого семейства в оболочке с 4D-структурой вдвое больше аналогичной величины в конструкции с 2D-структурой армирования. Следовательно, замена традиционной «плоско»-перекрестной структуры армирования (рис.2а) на пространственную структуру армирования (рис.2б) при фиксированном расходе волокон может приводить как к уменьшению, так и увеличению интенсивности остаточных деформаций в разных компонентах композиции.

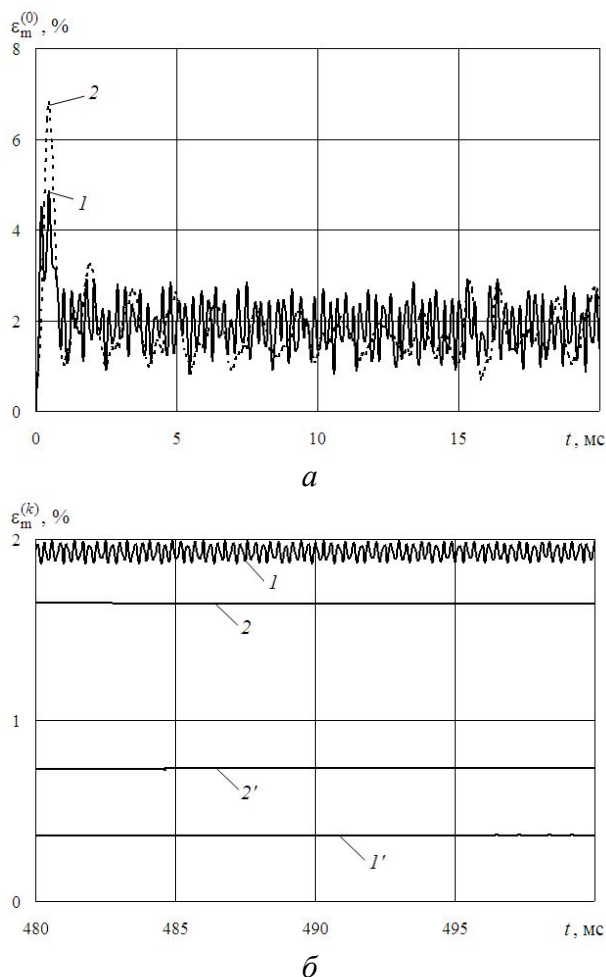


Рис.6. Осцилляции максимальных значений интенсивности деформаций компонентов композиции цилиндрических оболочек: связующего в окрестности начального момента времени (а), связующего и волокон первого семейства в окрестности момента времени $t = 500$ мс (б).

Полученные выше результаты относились к достаточно тонкой длинной цилиндрической оболочке ($2h/\min(R, L) = 1/50$). В случаях относительно толстых КМ-конструкций ($2h/\min(R, L) = 1/10$), особенно коротких цилиндрических оболочек, положительный эффект от замены традиционного армирования по эквидистантным поверхностям на пространственное армирование существенно возрастает. Так, величина максимального по модулю остаточного прогиба может быть уменьшена на несколько десятков процентов. Аналогично

уменьшается (даже в разы) величина интенсивности остаточных деформаций в связующем материале.

Вернемся к рис.5, осциллирующий характер поведения кривых 1 и 2 (особенно кривой 2) на котором свидетельствует о том, что длинная тонкая круговая цилиндрическая КМ-оболочка после вязкоупругопластического динамического деформирования приобретает гофрированный остаточный вид со складками, которые ориентированы в окружном направлении. Дополнительные расчеты показали, что складчатая остаточная форма сохраняется и для тонких пологих оболочек (при $R \gg L$) [14] и даже для прямоугольных удлиненных пластин (при $R \rightarrow \infty$). Так, кривая 3 на рис.5 получена при $p_{\max} = 3$ МПа (см. (15)) и $t = 500$ мс для тонкой прямоугольной удлиненной пластины шириной $L = 1$ м и толщиной $2h = 2$ см ($2h/L = 1/50$), ориентированной вдоль оси x_2 . Конструкция ортогонально армирована двумя семействами волокон (см. рис.2а) с плотностями $\omega_1 = 0,3$ и $\omega_2 = 0,1$ вдоль направлений x_1 и x_2 соответственно.

Как видно, кривая 3 немонотонна, т.е. после вязкоупругопластического деформирования КМ-пластина имеет складчатую форму. Кривая 3' на рис.5 приведена для сравнения и рассчитана при тех же условиях, что и кривая 3, но по модели, приближенной к жесткопластическому телу, т.е. вязкость не учитывалась ($\eta^{(k)} \rightarrow \infty$), а модули упругости компонентов композиции $E^{(k)}$ (см. таблицу) были увеличены: для связующего ($k = 0$) в $15 \cdot 10^6$ раз, а для армирующих волокон ($k = 1, 2$) в 10^6 раз. Шаг по времени при этом был уменьшен в 10^3 раз, чтобы обеспечить устойчивость схемы «крест». Ординаты точек кривой 3' увеличены в 10^4 раз. Сравнение кривых 3 и 3' показывает, что расчеты динамики КМ-пластин по модели жесткопластического тела (см., например, [19]) ни количественно, ни качественно не позволяют определить правильную форму остаточной поверхности, которую приобретает КМ-пластина после ее интенсивного кратковременного нагружения в поперечном направлении.

Для объяснения необычной М-образной формы кривой 3 на рис.5 рассмотрим поперечные колебания центральной точки прямоугольной удлиненной пластины ($w_*(t) = w(t, x_1)$, $x_1 = L/2$), рассчитанные по модели вязкоупругопластического тела (см. таблицу). На рис.7 изображена указанная зависимость $w_*(t)$. Как видно из поведения кривой 3 на рис.7, поперечные осцилляции КМ-пластины затухают и к моменту времени $t = 300$ мс практически полностью прекращаются, причем величина остаточного прогиба центрального сечения ($x_1 = L/2$) имеет значение 1,38 мм (см. кривую 3 на рис.5 при $x \equiv x_1 - L/2 = 0$).

Согласно поведению кривой 3 на рис.7, амплитуды колебаний КМ-пластины в окрестности начального момента времени более чем на порядок превосходят величину остаточного прогиба. Это означает, что высокопрочная арматура при деформировании КМ-конструкции запасает в большом количестве упругую энергию и после снятия нагрузки стремится вернуть пластину в исходное состояние, даже несмотря на то, что компоненты композиции до этого деформировались пластически. Так, в начале осцилляций (в окрестности первого локального максимума на кривой 3) связующее и волокна первого семейства

деформируются пластически. При этом КМ-пластина трансформируется в пологую цилиндрическую оболочку, выпуклую вверх. Но запасенная арматурой упругая энергия стремится вернуть изогнутую панель в исходное состояние, и в случае интенсивного кратковременного нагружения при движении конструкции в обратном направлении (в окрестности первого локального минимума на кривой 3) она локально теряет устойчивость (процелкивает) в центральной части (в окрестности сечения $x_1 = L/2$), причем в компонентах композиции возникает вторичная знакопеременная пластичность. При последующих поперечных осцилляциях материалы композиции приспособляются к знакопеременной пластичности, и в конечном итоге КМ-конструкция деформируется только вязкоупруго. Именно процелкивание конструкции при обратном движении и вторичная пластичность компонентов композиции, проявляющаяся при этом, являются причиной того, что кривая 3 на рис.5 имеет нетрадиционную М-образную форму, не наблюдаемую при расчетах однородных изотропных пластин [20].

Такое поведение остаточного прогиба не наблюдается при квазистатическом нагружении конструкции. Так, на рис.7 кривая 4 рассчитана для прежней КМ-пластины, но при параметрах нагружения (см. (15)) $p_{\max} = 0,5$ МПа, $t_{\max} = 150$ мс и $t_{\min} = 300$ мс. Кривая 4 практически не осциллирует, а величина остаточного прогиба центрального сечения пластины при этом $w_* = 4,75$ см. На рис.5 кривая 4 характеризует эпюру остаточного прогиба этой КМ-конструкции, полученного при $t = 500$ мс. Ординаты точек кривой 4 на рис.5 уменьшены в 100 раз. Как видно из поведения кривой 4, при квазистатическом нагружении КМ-пластины, остаточный прогиб имеет традиционную форму (без образования складок), качественно схожую с формой кривой 3' (динамический расчет по «жесткопластической» модели).

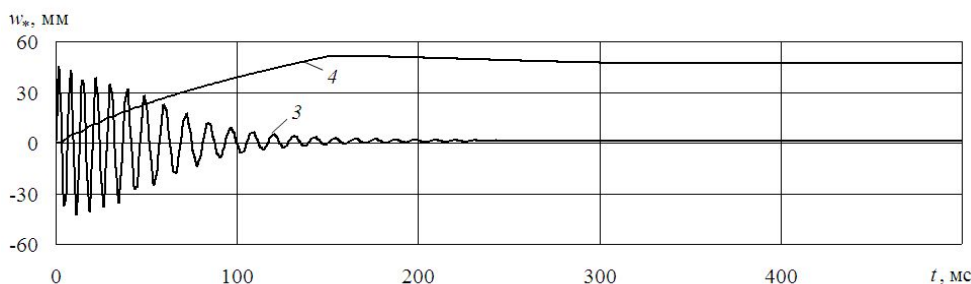


Рис.7. Зависимость от времени прогиба центральной точки прямоугольной удлиненной КМ-пластины при динамическом и квазистатическом нагружении.

Дополнительные расчеты показали, что при вязкоупругопластическом деформировании тонкой удлиненной КМ-пластины складчатая остаточная форма образуется не всегда. Так, если значения вязкостей $\eta^{(k)}$, приведенные в таблице, увеличить вдвое (при этом колебания конструкции затухают медленнее, чем изображено на рис.7), то при прежних условиях динамического нагружения пластины с 2D-структурой армирования остаточный прогиб имеет традиционный вид, качественно схожий с кривой 3' на рис.5. В случаях относительно толстых КМ-пластин (с относительной толщиной порядка 1/10) после их динамического

вязкоупругопластического деформирования складчатая остаточная форма также не образуется.

ВЫВОДЫ

Разработана математическая модель вязкоупругопластического деформирования круговых цилиндрических оболочек, армированных пространственно и традиционно по эквидистантным поверхностям. Эта модель позволяет рассчитывать затухающие осцилляции, вызванные приложением кратковременных высокоинтенсивных нагрузок, а также позволяет определять остаточные перемещения таких конструкций и остаточные напряженно-деформированные состояния в компонентах их композиции.

Расчеты показали, что даже в случае относительно тонкой длинной цилиндрической стеклопластиковой оболочки, нагруженной внутренним давлением взрывного типа, замена рациональной 2D-структуры армирования (рис.2а) на пространственную 4D-структуру (рис.2б) позволяет уменьшить остаточные деформации связующего материала, а также уменьшить на 10-20% прогибы центральной части оболочки. Максимальный остаточный прогиб, возникающий в зонах краевых эффектов, уменьшается при этом пренебрежимо мало. Однако колебания КМ-оболочки с пространственной структурой армирования затухают быстрее, чем конструкции с традиционной 2D-структурой. Для относительно толстых оболочек эффект от замены 2D-структуры на пространственную 4D-структуру армирования существенно увеличивается.

Продемонстрировано, что после вязкоупругопластического динамического деформирования относительно тонкая длинная цилиндрическая КМ-оболочка принимает гофрированную остаточную форму со складками, которые ориентированы в окружном направлении. Такой же складчатый вид остаточной формы конструкции сохраняется и для относительно тонких пологих цилиндрических КМ-панелей [14] и даже для КМ-пластин. Показано, что динамические расчеты, выполненные по модели жесткопластического тела, не позволяют определить складчатую форму остаточного прогиба КМ-пластин, и кроме того, такие расчеты на несколько порядков занижают величину остаточного прогиба по сравнению с расчетами, выполненными по модели вязкоупругопластического тела. Следовательно, модель жесткопластического тела не может быть рекомендована для проведения расчетов динамического поведения тонкостенных КМ-конструкций. Продемонстрировано, что при квазистатическом поперечном нагружении КМ-пластин остаточный прогиб качественно имеет традиционный вид, т.е. остаточная форма складчатого типа не образуется. Кроме того, гофрированная остаточная форма прогиба после динамического нагружения не образуется у относительно толстых КМ-пластин и при некоторых сочетаниях вязкоупругих характеристик компонентов композиции у относительно тонких пластин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. *Общая теория анизотропных оболочек*. – М.: Наука, 1974. – 446 с.
2. Богданович А.Е. *Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек*. – Рига: Зинатне, 1987. – 295 с.

3. Mouritz A.P., Gellert E., Burchill P., Challis K. *Review of advanced composite structures for naval ships and submarines* // Compos. Struct. – 2001. – Vol.53. – No.1. – Pp.21-42.
4. Андреев А.Н., Немировский Ю.В. *Многослойные анизотропные оболочки и пластины. Изгиб, устойчивость и колебания.* – Новосибирск: Наука, 2001. – 287 с.
5. Reddy J.N. *Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis. 2nd ed.* – Boca Raton: CRC Press, 2004. – 831 p.
6. Gibson R.F. *Principles of Composite Material Mechanics. 3rd ed.* – N.Y.: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2012. – 686 p.
7. Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П., Недбай А.Я., Андрюшин В.А. *Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек.* – М.: Физматлит, 2014. – 408 с.
8. Гарнопольский Ю.М., Жигун И.Г., Поляков В.А. *Пространственно-армированные композиционные материалы: Справочник.* – М.: Машиностроение, 1987. – 224 с.
9. Янковский А.П. *Моделирование упругопластического поведения гибких цилиндрических оболочек с пространственными структурами армирования* // Конструкции из композиционных материалов. – 2019. – №2. – С.9-21.
10. Янковский А.П. *Моделирование вязкоупругопластического деформирования гибких армированных пластин с учетом слабого сопротивления поперечному сдвигу* // Вычислительная механика сплошных сред. – 2019. – Т.12. – №1. – С.80-97.
11. Фрейденталь А., Гейрингер Х. *Математические теории неупругой сплошной среды.* – М.: Физматгиз, 1962. – 432 с.
12. Houlston R., DesRochers C.G. *Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading* // Computers & Structures. – 1987. – Vol.26. – No.1/2. – Pp.1-15.
13. Kazanci Z. *Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses* // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2011. – Vol.46. – Pp.807-817.
14. Янковский А.П. *Уточненная модель вязкоупругопластического деформирования гибких пологих оболочек с пространственными структурами армирования* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2020. – Т.26. – №1. – С.24-42.
15. Хажинский Г.М. *Модели деформирования и разрушения металлов.* – М.: Научный мир, 2011. – 231 с.
16. Самарский А.А. *Теория разностных схем.* – М.: Наука, 1989. – 616 с.
17. *Композиционные материалы: Справочник* / Под ред. Карпиноса Д.М. – Киев: Наукова думка, 1985. – 592 с.
18. *Справочник по композитным материалам: В 2-х книгах. Книга 1.* / Под ред. Любина Дж.; Пер. с англ. Геллера А.Б., Гельмонта М.М.; Под ред. Геллера Б.Э. – М.: Машиностроение, 1988. – 448 с.
19. Романова Т.П. *Моделирование динамического изгиба жесткопластических гибридных композитных криволинейных пластин с жесткой вставкой* // Прикладная математика и механика. – 2019. – Т.83. – №1. – С.107-125.
20. Абросимов Н.А., Баженов В.Г. *Нелинейные задачи динамики композитных конструкций.* – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. – 400 с.

REFERENCES

1. Ambarcumian S.A. *Obshhaya teoriya anizotropnykh obolochek [The general theory of anisotropic shells]*. Moskva, Nauka, 1974, 446 p.
2. Bogdanovich A.E. *Nelinejnye zadachi dinamiki tsilindricheskikh kompozitnykh obolochek [Nonlinear problems of the dynamics of cylindrical composite shells]*. Riga, Zinatne, 1987, 295 p.
3. Mouritz A.P., Gellert E., Burchill P., Challis K. *Review of advanced composite structures for naval ships and submarines*. Compos. Struct., 2001, Vol.53, No.1, Pp.21-42.
4. Andreev A.N., Nemirovskii Yu.V. *Mnogoslojnye anizotropnye obolochki i plastiny. Izgib, ustojchivost' i kolebaniya [Multilayered anisotropic shells and plates. Bending, stability and vibration]*. Novosibirsk, Nauka, 2001, 287 p.
5. Reddy J.N. *Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis / 2nd ed.* Boca Raton, CRC Press, 2004, 831 p.
6. Gibson R.F. *Principles of Composite Material Mechanics. 3rd ed.* N.Y., CRC Press, Taylor & Francis Group, 2012, 686 p.
7. Solomonov Yu.S., Georgievskii V.P., Nedbai A.Ya., Andriushin V.A. *Prikladnye zadachi mekhaniki kompozitnykh tsilindricheskikh obolochek [Applied Problems of Mechanics of Composite Cylindrical Shells]*. Moskva, Fizmatlit, 2014, 408 p.
8. Tarnopol'skii Yu.M., Zhigun I.G., Poliakov V.A. *Prostranstvenno-armirovannye kompozitsionnye materialy: Spravochnik [Spatially reinforced composite materials: Handbook]*. Moskva, Mashinostroenie, 1987, 224 p.
9. Yankovskii A.P. *Modelirovanie uprugoplasticheskogo povedeniya gibkikh tsilindricheskikh obolochek s prostranstvennymi strukturami armirovaniya [Modeling of elastic-plastic behavior of flexible cylindrical shells with spatial reinforcement structures]*. Konstruktsii iz kompozitsionnykh materialov, 2019, No.2, Pp.9-21.
10. Yankovskii A.P. *Modelirovanie vyazkouprugoplasticheskogo deformirovaniya gibkikh armirovannykh plastin s uchetom slabogo soprotivleniya poperechnomu sdvigu [Modelling the viscoelastic-plastic deformation of flexible reinforced plates with account of weak resistance to transverse shear]*. Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred, 2019, Vol.12, No.1, Pp.80-97.
11. Freudental A.M., Geiringer H. *The mathematical theories of the inelastic continuum*. Berlin-Gottingen-Heidelberg, Springer-Verlag, 1958.
12. Houlston R., DesRochers C.G. *Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading*. Computers & Structures, 1987, Vol.26, No.1/2, Pp.1-15.
13. Kazanci Z. *Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses*. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2011, Vol.46, Pp.807-817.
14. Yankovskii A.P. *Utochnennaya model' vyazkouprugoplasticheskogo deformirovaniya gibkikh plogikh obolochek s prostranstvennymi strukturami armirovaniya [Refined model of viscoelastic-plastic deformation of flexible shallow shells with spatial reinforcement structures]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2020, Vol.26, No.1, Pp.24-42.
15. Khazhinskii G.M. *Modeli deformirovaniya i razrusheniya metallov [Model of deformation and fracture of metals]*. Moskva, Nauchnyj mir, 2011, 231 p.
16. Samarakii A.A. *Teoriya raznostnykh skhem [The theory of finite difference schemes]*. Moskva, Nauka, 1989, 616 p.

17. Karpinos D.M. *Kompozitsionnye materialy: Spravochnik [Composite materials. Reference Book]*. Kiev, Naukova dumka, 1985, 592 p.
18. Lubin G. *Handbook of composites*. New York, Van Nostrand Reinhold Company Inc., 1982, 442 p.
19. Romanova T.P. *Modelirovanie dinamicheskogo izgiba zhestkoplasticheskikh gibridnykh kompozitnykh krivolinejnykh plastin s zhestkoj vstavkoj [Modelling of dynamic bending of rigid-plastic hybrid composite curvilinear plates with rigid insert]*. Prikladnaya matematika i mekhanika, 2019, Vol.83, No.1, Pp.107-125.
20. Abrosimov N.A., Bazhenov V.G. *Nelinejnye zadachi dinamiki kompozitnykh konstruktsij [Nonlinear problems of dynamics composites designs]*. Nizhnij Novgorod, Izdatel'stvo Nizhegorodskogo gosudarstvennogo universiteta, 2002, 400 p.

Поступила в редакцию 29 сентября 2020 года.

Сведения об авторе:

Янковский Андрей Петрович – д.ф.-м.н., в.н.с., Лаборатория «Физики быстропротекающих процессов», ФГБУН Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия; e-mail: lab4nemir@rambler.ru, yankovsky_ap@rambler.ru