

УДК 539.3

DOI 10.33113/mkmk.ras.2021.27.01.017\_030.02

## НЕОСЕССИМЕТРИЧНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ СВОБОДНО ОПЕРТОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ В СВОЕЙ ПЛОСКОСТИ\*

Старовойтов Э.И., Нестерович А.В.

*Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель, Беларусь*

### АННОТАЦИЯ

Трехслойные элементы конструкций нашли широкое применение в аэрокосмическом и транспортном машиностроении, строительстве, добыче и транспортировке углеводородов. Теория изгиба круговых трехслойных несимметричных по толщине пластин при различного рода внешних силовых воздействиях в настоящее время разработана достаточно полно. Здесь приведена постановка краевой задачи о неосесимметричном деформировании упругой трехслойной круговой пластины в своей плоскости. Центр пластины закреплен, ее контур – свободно оперт. Физические уравнения состояния связывают напряжения и деформации соотношениями линейной теории упругости. Уравнения равновесия получены вариационным методом Лагранжа. Сформулированы силовые граничные условия на контуре пластины. Решение соответствующей краевой задачи сведено к нахождению двух искомых функций – радиального и тангенциального перемещений в слоях пластины. Эти функции удовлетворяют неоднородной системе линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Для ее решения применен метод разложения в тригонометрические ряды Фурье. Для определения искомых амплитудных функций каждого из членов ряда получена система четырех обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Аналитическое решение этой системы выписано в конечном виде в случае воздействия неосесимметричной косинусоидальной радиальной нагрузки с постоянной амплитудой. Нагрузка приложена в срединной плоскости заполнителя. Проведена численная апробация решения при свободно опертом контуре пластины. Численно исследована зависимость радиальных и тангенциальных перемещений от полярных координат. Приведены графики изменения перемещений вдоль радиуса пластины при различных значениях угловой координаты. Проиллюстрирована зависимость перемещений от толщины несущих слоев и заполнителя.

**Ключевые слова:** трехслойная круговая пластина; упругость, свободное опирание; неосесимметричная нагрузка; перемещения

## NON-AXISYMMETRIC DEFORMATION OF A FREELY SUPPORTED THREE-LAYER PLATE IN ITS OWN PLANE

Starovoitov E.I., Nestsiarovich A.V.

*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

### ABSTRACT

Three-layer structural elements are widely used in aerospace and transport engineering, construction, production and transportation of hydrocarbons. The theory of bending of circular

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке БР ФФИ (проект №Т20Р-047).

three-layer plates those are not symmetrical in thickness under external various kinds of force actions is currently developed quite fully. Here we present a statement of the boundary value problem of non-axisymmetric deformation of an elastic three-layer circular plate in its plane. The center of the plate is fixed, its contour is freely supported. The physical equations of state relate stresses and deformations to the relations of the linear theory of elasticity. The equilibrium equations are obtained by the Lagrange variational method. Force boundary conditions on the plate contour are formulated. The solution of the corresponding boundary value problem is reduced to finding two desired functions – radial and tangential displacements in the layers of the plate. These functions satisfy an inhomogeneous system of linear partial differential equations. To solve this problem, the method of decomposition into trigonometric Fourier series is applied. To determine the desired amplitude functions of each of the series members, a system of four ordinary linear differential equations is obtained. The analytical solution of this system is written out in the final form in the case of a non-axisymmetric cosine radial load with constant amplitude. The load is applied in the middle plane of the filler. The numerical approbation of the solution is carried out for a freely open plate contour. The dependence of radial and tangential displacements on polar coordinates is numerically investigated. Graphs of changes in displacements along the radius of the plate for different values of the angular coordinate are given. The dependence of the displacements on the thickness of the bearing layers and the aggregate is illustrated.

**Keywords:** three-layer circular plate; elasticity, free support; non-axisymmetric load; displacements

## ВВЕДЕНИЕ

Впервые слоистые конструкции были применены в строительстве еще в середине 19 века. В 40-х годах прошлого столетия начали появляться первые самолёты с трёхслойными силовыми элементами. В дальнейшем подобные конструкции нашли широкое применение в аэрокосмическом и транспортном машиностроении, строительстве, добыче и транспортировке углеводородов. Резко возрос спрос на слоистые, в том числе трехслойные, элементы конструкций. В связи с этим возникла проблема разработки математических моделей и методов расчета трехслойных элементов конструкций на различные виды и типы нагрузок. Стержни, пластины и оболочки, имеющие слоистую структуру, обычно набраны из материалов с существенно различными физико-механическими свойствами. Несущие слои из материалов высокой прочности и жесткости предназначены для восприятия основной части механической нагрузки. Связующие слои, служащие для образования монолитной конструкции, предназначены для перераспределения усилий между несущими слоями. Такое сочетание слоев позволяет обеспечить надежную работу систем в неблагоприятных условиях окружающей среды (температура, радиация), создавать конструкции, сочетающие высокую прочность и жесткость с относительно малой массой.

В настоящее время разработка общей теории квазистатических деформаций трехслойных конструкций транспортной техники, в том числе и пластин, еще не завершена и интенсивно продолжается. Вопросам построения теорий квазистатических и динамических нагружений слоистых элементов конструкций посвящены монографии [1-5]. В статье [6] рассмотрено косое ударное воздействие на трехслойные пластины. Уточненная теория трехслойных пластин применена при исследовании свободных и вынужденных колебаний в работе [7]. Публикации [8,9] посвящены теории нестационарных нагружений балки Тимошенко и упругой полуплоскости.

Задачи о свободных и вынужденных колебаниях трехслойных пластин, связанных с упругим основанием, рассмотрены в публикациях [10-12]. Исследована динамика пластин под действием гармонических, импульсных и резонансных нагрузок. Кинематика деформирования трехслойного пакета принята соответствующей кинематическим гипотезам ломаной линии, заполнитель легкий. Решения построены в виде разложения в ряд по системе собственных ортонормированных функций. Изучены частоты собственных колебаний при различных граничных условиях. Статьи [13,14] посвящены резонансным колебаниям упругих трехслойных цилиндрических оболочек с упругим наполнителем. Исследован спектр собственных частот и амплитуды колебаний.

Несущая способность волокнистой трехслойной композитной кольцевой пластинки, заземленной по кромкам, рассмотрена в [16]. В работах [17-20] проведено исследование деформации изгиба сэндвич-пластин в зависимости от вида ячеистого заполнителя, наличия упругих опор либо упругого основания, анализ напряженно-деформированного состояния пластин и слоистых материалов с использованием метода Галеркина. Изгиб несимметричных по толщине трехслойных пластин из функционально-градиентных материалов при термосиловом воздействии рассмотрен в [21,22]. Деформирование многослойных пластин рассматривалось также в статьях [23,24].

В публикациях [25-31] разрабатывается теория однократного и переменного нагружения упругопластических трехслойных элементов конструкций. Исследуется влияние теплового воздействия на трехслойные стержни, пластины и оболочки. В несущих слоях предполагается выполнение гипотез Кирхгофа, в относительно толстом заполнителе справедлива гипотеза Тимошенко. Решения получены в функциях Бесселя, проведена их численная апробация.

Следует отметить, что деформирование и колебания трехслойных круговых пластин в указанных работах исследовались только изгибными нагрузками. Работы, посвященные деформированию трехслойной пластины в своей плоскости [32,33], рассматривают нагружение осесимметричной радиальной нагрузкой. Здесь приведена общая постановка и методика решения краевой задачи о деформировании круговой трехслойной пластины под действием неосесимметричных нагрузок, предложено решение конкретной краевой для пластины с закрепленным центром и свободным контуром.

## 1. ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Рассматривается симметричная по толщине круговая трехслойная пластина с закрепленным центром и свободно опертым контуром. Пластина состоит из двух тонких высокопрочных несущих слоев и относительно толстого заполнителя, служащего для образования монолитной конструкции и обеспечения совместной работы всей пластины. Для внешних несущих слоев толщиной  $h_1 = h_2$  принимаются гипотезы Кирхгофа, для жесткого заполнителя ( $h_3 = 2c$ ), воспринимающего нагрузку в тангенциальном направлении, справедлива гипотеза о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали. Предполагается, что на контуре пластины имеется жесткая диафрагма, препятствующая относительному сдвигу слоев. На склейках слоев перемещения непрерывны.

Постановка задачи приводится в полярной системе координат  $r, \varphi$ , связанной со срединной плоскостью заполнителя (рис. 1). В срединной плоскости заполнителя

действует распределённая нагрузка, проекции которой на координатные оси:  $p_r(r, \varphi)$ ,  $p_\varphi(r, \varphi)$ . При деформировании в пластине возникают радиальные  $u_r(r, \varphi)$  и тангенциальные  $u_\varphi(r, \varphi)$  перемещения. Им соответствуют деформации

$$\varepsilon_{rr} = u_{r,r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_{\varphi,\varphi} + u_r}{r}, \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2r}(u_{r,\varphi} - u_{\varphi,r} + u_{\varphi,r} r). \quad (1)$$

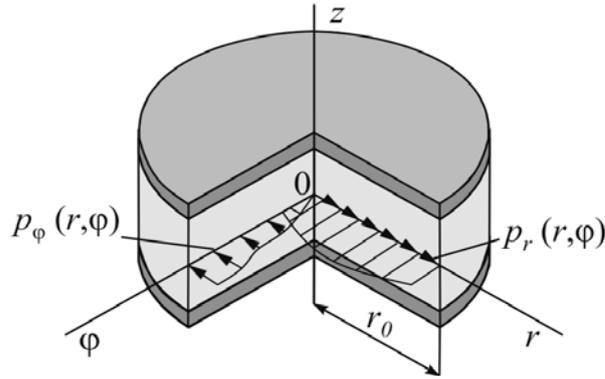


Рис.1. Расчетная схема трехслойной пластины.

Напряжения в слоях следуют из закона Гука

$$s_{\alpha\beta}^{(k)} = 2G_k \varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k \varepsilon^{(k)} \quad (\alpha, \beta = r, \varphi, k = 1, 2, 3), \quad (2)$$

где  $k$  – номер слоя;  $s_{\alpha\beta}^{(k)}$ ,  $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)}$ ,  $\sigma^{(k)}$ ,  $\varepsilon^{(k)}$  – девиаторные и шаровые части тензоров напряжений и деформаций;  $G_k$ ,  $K_k$  – сдвиговой и объемный модули упругости материалов.

Внутренние обобщенные усилия в пластине вводятся с помощью компонентов тензора напряжений  $\sigma_{\alpha\beta}^{(k)}$  ( $\alpha, \beta = r, \varphi$ )

$$T_{\alpha\beta} \equiv \sum_{k=1}^3 T_{\alpha\beta}^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\beta}^{(k)} dz. \quad (3)$$

Уравнения равновесия рассматриваемой пластины в обобщенных усилиях получены с помощью вариационного принципа Лагранжа [31]

$$T_{rr,r} + \frac{1}{r}(T_{r\varphi,\varphi} + T_{rr} - T_{\varphi\varphi}) = -p_r, \quad (4)$$

$$T_{r\varphi,r} + \frac{1}{r}(T_{\varphi\varphi,\varphi} + 2T_{r\varphi}) = -p_\varphi.$$

Выражения внутренних усилий (3) через перемещения получим, используя деформации (1) и напряжения (2)

$$T_{rr} = a_1 u_{r,r} + \frac{a_2}{r}(u_{\varphi,\varphi} + u_r),$$

$$T_{\varphi\varphi} = a_2 u_{r,r} + \frac{a_1}{r}(u_{\varphi,\varphi} + u_r), \quad (5)$$

$$T_{r\varphi} = \frac{a_3}{r}(u_{r,\varphi} + r u_{\varphi,r} - u_\varphi),$$

где

$$a_1 = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \left( K_k + \frac{4}{3} G_k \right) dz, \quad a_2 = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \left( K_k - \frac{2}{3} G_k \right) dz, \quad a_3 = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} G_k dz.$$

Подставив внутренние усилия (5) в уравнения равновесия (4) и проведя замену переменной  $r = xr_0$ , получим систему дифференциальных уравнений в частных производных относительно искомых перемещений

$$\begin{aligned} L_2(u_r) + \frac{a_3}{a_1 x^2} u_{r,\varphi\varphi} + \frac{a_2 + a_3}{a_1 x} u_{\varphi,\varphi x} - \frac{a_1 + a_3}{a_1 x^2} u_{\varphi,\varphi} &= -\frac{p_r r_0^2}{a_1}; \\ L_2(u_\varphi) + \frac{a_2 + a_3}{a_3 x} u_{r,\varphi x} + \frac{a_1}{a_3 x^2} u_{\varphi,\varphi\varphi} + \frac{a_1 + a_3}{a_3 x^2} u_{r,\varphi} &= -\frac{p_\varphi r_0^2}{a_3}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $x$  – безразмерная радиальная координата;  $L_2$  – линейный дифференциальный оператор

$$L_2(g(x)) \equiv g(x)_{,xx} + \frac{g(x)_{,x}}{x} - \frac{g(x)}{x^2}.$$

Добавив к системе (6) силовые или кинематические граничные условия, получим замкнутую краевую задачу для определения искомых перемещений в упругой круговой трехслойной пластине при неосесимметричном деформировании в ее плоскости.

## 2. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ

Для решения системы дифференциальных уравнений (6) перемещения и нагрузки представляются в виде разложения в ряды Фурье

$$\begin{aligned} u_r(x, \varphi) &= u_{r0}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ u_m^{(1)}(x) \cos(n\varphi) + u_m^{(2)}(x) \sin(n\varphi) \right], \\ u_\varphi(x, \varphi) &= u_{\varphi0}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ u_{\varphi n}^{(1)}(x) \cos(n\varphi) + u_{\varphi n}^{(2)}(x) \sin(n\varphi) \right], \\ p_r(x, \varphi) &= p_{r0}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ p_m^{(1)}(x) \cos(n\varphi) + p_m^{(2)}(x) \sin(n\varphi) \right], \\ p_\varphi(x, \varphi) &= p_{\varphi0}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ p_{\varphi n}^{(1)}(x) \cos(n\varphi) + p_{\varphi n}^{(2)}(x) \sin(n\varphi) \right], \end{aligned} \quad (7)$$

где  $u_{r0}(x)$ ,  $u_{\varphi0}(x)$  – перемещения от симметричной части внешней нагрузки;  $u_m^{(1)}(x)$ ,  $u_m^{(2)}(x)$ ,  $u_{\varphi n}^{(1)}(x)$ ,  $u_{\varphi n}^{(2)}(x)$  – составляющие асимметричных перемещений,  $n$  – номер члена ряда;  $p_{r0}(x)$ ,  $p_{\varphi0}(x)$  – симметричные составляющие нагрузки;  $p_m^{(1)}(x)$ ,  $p_m^{(2)}(x)$ ,  $p_{\varphi n}^{(1)}(x)$ ,  $p_{\varphi n}^{(2)}(x)$  – асимметричные составляющие радиальной и тангенциальной внешних нагрузок, которые вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} p_m^{(1)}(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p_r(x, \varphi) \cos(n\varphi) d\varphi, & p_m^{(2)}(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p_r(x, \varphi) \sin(n\varphi) d\varphi, \\ p_{\varphi n}^{(1)}(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p_\varphi(x, \varphi) \cos(n\varphi) d\varphi, & p_{\varphi n}^{(2)}(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p_\varphi(x, \varphi) \sin(n\varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

После подстановки выражений (7) в уравнения (6) и некоторых преобразований получим систему из четырех обыкновенных линейных

дифференциальных уравнений для определения искомых амплитудных функций  $u_m^{(1)}(x)$ ,  $u_m^{(2)}(x)$ ,  $u_{\varphi n}^{(1)}(x)$ ,  $u_{\varphi n}^{(2)}(x)$

$$\begin{aligned}
L_2\left(u_m^{(1)}(x)\right) - \frac{a_3 n^2}{a_1 x^2} u_m^{(1)}(x) + \frac{(a_2 + a_3)n}{a_1 x} u_{\varphi n, x}^{(2)}(x) - \frac{(a_1 + a_3)n}{a_1 x^2} u_{\varphi n}^{(2)}(x) &= \\
= -\frac{r_0^2}{a_1} p_m^{(1)}(x), \\
L_2\left(u_{\varphi n}^{(2)}(x)\right) - \frac{a_1 n^2}{a_3 x^2} u_{\varphi n}^{(2)}(x) - \frac{(a_2 + a_3)n}{a_3 x} u_{m, x}^{(1)}(x) - \frac{(a_1 + a_3)n}{a_3 x^2} u_m^{(1)}(x) &= \\
= -\frac{r_0^2}{a_3} p_{\varphi n}^{(2)}(x), \\
L_2\left(u_m^{(2)}(x)\right) - \frac{a_3 n^2}{a_1 x^2} u_m^{(2)}(x) - \frac{(a_2 + a_3)n}{a_1 x} u_{\varphi n, x}^{(1)}(x) + \frac{(a_1 + a_3)n}{a_1 x^2} u_{\varphi n}^{(1)}(x) &= \\
= -\frac{r_0^2}{a_1} p_m^{(2)}(x), \\
L_2\left(u_{\varphi n}^{(1)}(x)\right) - \frac{a_1 n^2}{a_3 x^2} u_{\varphi n}^{(1)}(x) + \frac{(a_2 + a_3)n}{a_3 x} u_{m, x}^{(2)}(x) + \frac{(a_1 + a_3)n}{a_3 x^2} u_m^{(2)}(x) &= \\
= -\frac{r_0^2}{a_3} p_{\varphi n}^{(1)}(x).
\end{aligned} \tag{8}$$

Нетрудно видеть, что полученная система распадается на две независимые системы дифференциальных уравнений: первые два относительно амплитуд  $u_m^{(1)}(r)$ ,  $u_{\varphi n}^{(2)}(r)$  и оставшиеся два уравнения относительно  $u_m^{(2)}(r)$ ,  $u_{\varphi n}^{(1)}(r)$ .

### 3. ПЛАСТИНА СО СВОБОДНО ОПЕРТЫМ КОНТУРОМ

Рассмотрим деформирование трехслойной круговой пластины с шарнирно закрепленным центром и свободно опертым контуром при радиальной косинусоидальной нагрузке с постоянной амплитудой

$$p_r(x, \varphi) = p_{r1} \cos \varphi, \quad p_{\varphi}(x, \varphi) = 0, \tag{9}$$

где  $p_{r1} = \text{const}$ .

В этом случае  $p_{r1}^{(1)}(x) = p_{r1}$ . Остальные амплитуды нагрузок при  $n \geq 1$  равны нулю. Система уравнений при нагрузке (9) принимает вид

$$\begin{aligned}
L_2\left(u_{r1}^{(1)}(x)\right) - \frac{a_3}{a_1 x^2} u_{r1}^{(1)}(x) + \frac{a_2 + a_3}{a_1 x} u_{\varphi 1, x}^{(2)}(x) - \frac{a_1 + a_3}{a_1 x^2} u_{\varphi 1}^{(2)}(x) &= -\frac{r_0^2}{a_1} p_{r1}, \\
L_2\left(u_{\varphi 1}^{(2)}(x)\right) - \frac{a_1}{a_3 x^2} u_{\varphi 1}^{(2)}(x) - \frac{a_2 + a_3}{a_3 x} u_{r1, x}^{(1)}(x) - \frac{a_1 + a_3}{a_3 x^2} u_{r1}^{(1)}(x) &= 0, \\
L_2\left(u_{r1}^{(2)}(x)\right) - \frac{a_3}{a_1 x^2} u_{r1}^{(2)}(x) - \frac{a_2 + a_3}{a_1 x} u_{\varphi 1, x}^{(1)}(x) + \frac{a_1 + a_3}{a_1 x^2} u_{\varphi 1}^{(1)}(x) &= 0, \\
L_2\left(u_{\varphi 1}^{(1)}(x)\right) - \frac{a_1}{a_3 x^2} u_{\varphi 1}^{(1)}(x) + \frac{a_2 + a_3}{a_3 x} u_{r1, x}^{(2)}(x) + \frac{a_1 + a_3}{a_3 x^2} u_{r1}^{(2)}(x) &= 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Первое и второе уравнения в (10) образуют неоднородную систему, решение которой получено с использованием пакета Maple. В результате получим

$$u_{r1}^{(1)} = -C_{11} + C_{12} \left( \frac{a_1 + a_2}{3a_1 - a_2} - \ln x \right) + C_{13} x^{-2} +$$

$$+ C_{14} \frac{a_1 - 3a_2}{5a_1 + a_2} x^2 - \left[ (51a_1^2 + 14a_1a_2 + 11a_2^2) + \right.$$

$$\left. + 4(a_1 - 3a_2)(5a_1 + a_2) \ln x \right] \frac{p_{r1} r_0^2 x^2}{64a_1(a_1 - a_2)(5a_1 + a_2)}, \quad (11)$$

$$u_{\phi 1}^{(2)} = C_{11} + C_{12} \ln x + C_{13} x^{-2} + C_{14} x^2 + \frac{5a_1 + a_2}{64a_1(a_1 - a_2)} (5 - 4 \ln x) p_{r1} r_0^2 x^2,$$

$$u_{r1}^{(2)} = C_{15} - C_{16} \left( \frac{a_1 + a_2}{3a_1 - a_2} - \ln x \right) - C_{17} x^{-2} - C_{18} \frac{a_1 - 3a_2}{5a_1 + a_2} x^2,$$

$$u_{\phi 1}^{(1)} = C_{15} + C_{16} \ln x + C_{17} x^{-2} + C_{18} x^2.$$

Исходя из условий закрепления центра пластины и ограниченности в нем перемещений, в решении (11) необходимо приравнять нулю следующие константы интегрирования  $C_{12} = C_{13} = C_{15} = C_{16} = C_{17} = 0$ . В результате решение (11) принимает вид

$$u_{r1}^{(1)} = -C_{11} + C_{14} h_{12} x^2 + u_{r1}^{(1)*},$$

$$u_{\phi 1}^{(2)} = C_{11} + C_{14} x^2 + u_{\phi 1}^{(2)*}, \quad (12)$$

$$u_{r1}^{(2)} = -C_{18} h_{12} x^2,$$

$$u_{\phi 1}^{(1)} = C_{18} x^2.$$

Предполагаем, что решение (12) при свободном контуре и закрепленном центре пластины должно удовлетворять граничным условиям

$$u_r = 0 \quad \text{при } x = 0;$$

$$T_{rr} \Big|_{x=1} = \frac{1}{r_0} \left( a_1 u_{r,x} + \frac{a_2}{x} (u_{\phi,\phi} + u_r) \right) = 0 \quad \text{при } x = 1. \quad (13)$$

Радиальная внутренняя сила согласно (3) будет

$$T_{rr} \Big|_{x=1} = \left[ a_1 u_{r1,x}^{(1)}(r_1) + a_2 (u_{\phi 1}^{(2)}(r_1) + u_{r1}^{(1)}(r_1)) \right] \cos \varphi +$$

$$+ \left[ a_1 u_{r1,x}^{(2)}(r_1) + a_2 (-u_{\phi 1}^{(1)}(r_1) + u_{r1}^{(2)}(r_1)) \right] \sin \varphi = 0.$$

Отсюда, требуя равенства нулю коэффициентов перед тригонометрическими функциями, и выполнения первого из условий (13), получим

$$C_{11} = 0, \quad C_{14} = \frac{61a_1^2 + 10a_1a_2 - 3a_2^2}{64a_1(a_1^2 - a_2^2)} p_{r1} r_0^2, \quad C_{18} = 0.$$

В результате общий вид перемещений в пластине при нагрузке (9) будет

$$u_r(r, \varphi) = \left[ \frac{(61a_1^2 + 10a_1a_2 - 3a_2^2)(a_1 - 3a_2)}{a_1 + a_2} - 51a_1^2 - 14a_1a_2 - 11a_2^2 - \right. \\ \left. - 4(a_1 - 3a_2)(5a_1 + a_2) \ln x \right] \frac{p_{r1} r_0^2 x^2}{64a_1(a_1 - a_2)(5a_1 + a_2)} \cos \varphi, \\ u_\varphi(r, \varphi) = \left[ \frac{61a_1^2 + 10a_1a_2 - 3a_2^2}{a_1 + a_2} + (5a_1 + a_2)(5 - 4 \ln x) \right] \frac{p_{r1} r_0^2 x^2}{64a_1(a_1 - a_2)} \sin \varphi. \quad (14)$$

Таким образом, радиальные и тангенциальные перемещения в круговой сэндвич-пластине со свободным контуром при деформировании в своей плоскости задаются формулами (14).

#### 4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Численная апробация решения (14) проведена для пластины Д16-Т-фторопласт-4-Д16-Т. Радиус пластины  $r_0 = 1$  м, толщины слоев  $h_1 = h_2 = 0,02$  м,  $h_3 = 0,4$  м. Нагрузка  $p_{r1} = 10$  МПа/м распределена в срединной плоскости заполнителя. Механические характеристики материалов заимствованы из [3].

Рис.2 показывает изменение радиальных перемещений  $u_r(r, \varphi)$  вдоль радиуса пластины при различных значениях угловой координаты: 1 –  $\varphi = 0, 2\pi$ ; 2 –  $\varphi = \pi/4, 7\pi/4$ ; 3 –  $\varphi = 3\pi/4, 5\pi/4$ ; 4 –  $\varphi = \pi$ . Положительный знак перемещений соответствует перемещению точек пластины вдоль радиуса от центра. Радиальные перемещения достигают максимальных значений на контуре.

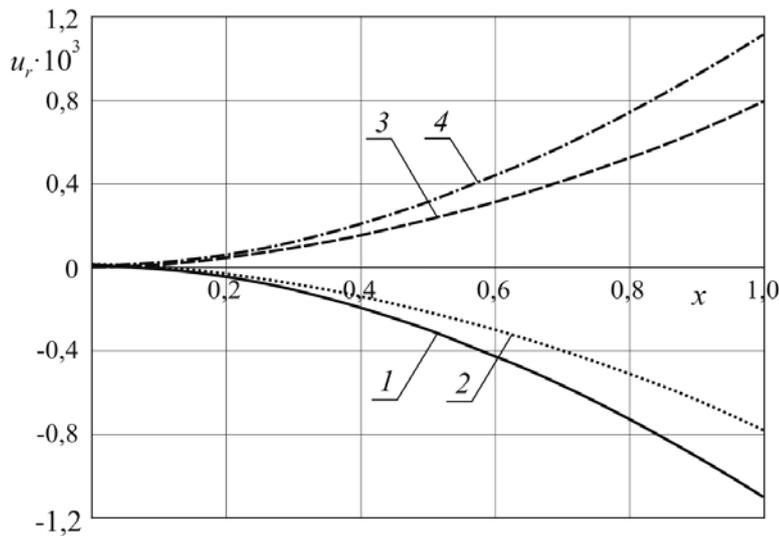


Рис.2. Изменение радиальных перемещений вдоль радиуса пластины.

Аналогичное изменение тангенциальных перемещений  $u_\varphi(r, \varphi)$  иллюстрирует рис.3: 1 –  $\varphi = \pi/4, 3\pi/4$ ; 2 –  $\varphi = \pi/2$ ; 3 –  $\varphi = 5\pi/4, 7\pi/4$ ; 4 –  $\varphi = 3\pi/2$ . Максимальные значения здесь также достигаются на контуре пластины.

Экстремумы соответствуют тригонометрическим функциям, входящим в перемещения (14). Тангенциальные перемещения преобладают и достигают максимальных значений на контуре. Вдоль радиуса перемещения изменяются

нелинейно. Следует отметить, что радиальные и тангенциальные перемещения достигают максимумов на взаимно перпендикулярных направлениях.

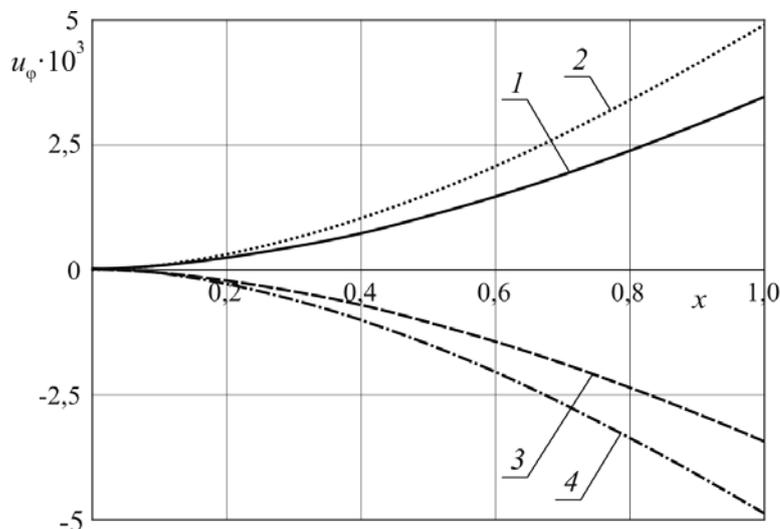


Рис.3. Изменение тангенциальных перемещений вдоль радиуса пластины.

Рис.4 показывает изменение радиальных внутренних усилий  $T_{rr}(r, \varphi)$  вдоль радиуса пластины при различных значениях угловой координаты: 1 –  $\varphi = 0, 2\pi$ ; 2 –  $\varphi = \pi/4, 7\pi/4$ ; 3 –  $\varphi = 3\pi/4, 5\pi/4$ ; 4 –  $\varphi = \pi$ . Радиальные усилия на контуре равны нулю, что подтверждает выполнение граничных условий.

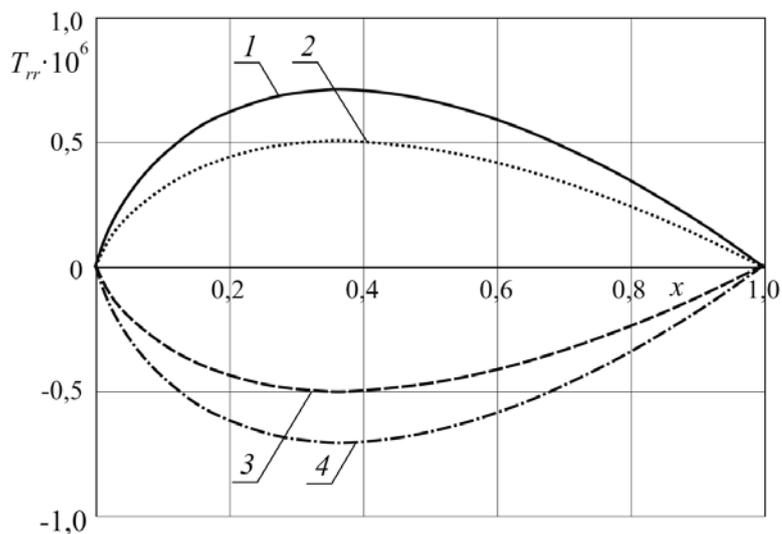


Рис.4. Изменение радиальных силовых усилий вдоль радиуса пластины.

## ВЫВОДЫ

Предложенная модель деформирования трехслойной круговой пластины при неосесимметричных нагрузках в ее плоскости позволяет проводить анализ напряженно-деформированного состояния при различных типах нагрузок и граничных условий, в том числе при свободно опертом контуре в случае заземленного центра пластины.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Головки К.Г., Луговой П.З., Мейш В.Ф. *Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках*. – Киев: Киевский ун-т, 2012. – 541 с.
2. Aghalovyan L. *Asymptotic theory of anisotropic plates and shells*. – Singapore–London: World Scientific Publishing, 2015. – 376 p.
3. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. *Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций*. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576 с.
4. Журавков М.А., Старовойтов Э.И. *Механика сплошных сред. Теория упругости и пластичности*. – Минск: БГУ, 2011. – 540 с.
5. Старовойтов Э.И., Журавков М.А., Леоненко Д.В. *Трехслойные стержни в терморадикационных полях*. – Минск: Беларуская навука, 2017. – 275 с.
6. Ivañez I., Moure M.M., Garcia-Castillo S.K., Sanchez-Saez S. *The oblique impact response of composite sandwich plates* // Composite Structures. – 2015. – No.133. – Pp.1127-1136.
7. Паймушин В.Н., Иванов В.И., Хусаинов В.Р. *Анализ свободных и собственных колебаний трехслойной пластины на основе уравнений уточненной теории* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2002. – Т.8. – №4. – С.543-554.
8. Fedotenkov G.V., Tarlakovsky D.V., Vahterova Y.A. *Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam* // Lobachevskii journal of mathematics. – 2019. – Vol.40. – No.4. – Pp.439-447.
9. Вестяк В.А., Садков А.С., Тарлаковский Д.В. *Распространение нестационарных объемных возмущений в упругой полуплоскости* // Известия российской академии наук. Механика твердого тела. – 2011. – №2. – С.130-140.
10. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В., Яровая А.В. *Колебания круговых трехслойных пластин под действием распределенных локальных нагрузок* // Проблемы прочности. – 2002. – Т.34. – №5. – С.70-79.
11. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В., Тарлаковский Д.В. *Резонансные колебания круговых композитных пластин на упругом основании* // Механика композитных материалов. – 2015. – Т.51. – №5. – С.793-806.
12. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. *Колебания круговых композитных пластин на упругом основании под действием локальных нагрузок* // Механика композитных материалов. – 2016. – Т.52. – №5. – С.943-954.
13. Леоненко Д.В. *Колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании Пастернака* // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2014. – №1. – С.59-63.
14. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. *Исследование спектра частот трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т.21. – №2. – С.162-169.
15. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. *Резонансные колебания трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2016. – Т.22. – №1. – С.60-68.
16. Джагангиров А.А. *Несущая способность трехслойной волокнистой композитной кольцевой пластинки, заземленной по кромкам* // Механика композитных материалов. – 2015. – Т.51. – №2. – С.100-109.
17. Škec L., Jelenić G. *Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection* // Acta Mechanica. – 2014. – Vol.225. – No.2. – Pp.523-541.

18. Belinha J., Dints L.M. *Nonlinear Analysis of Plates and Laminates Using the Element Free Galerkin Method* // Composite Structures. – 2007. – Vol.78. – No.3. – Pp.337-350.
19. Yang L., Harrysson O., West H., Cormier D.A. *Comparison of Bending Properties for Cellular Core Sandwich Panels* // Materials Sciences and Applications. – 2013. – Vol.4. – No.8. – Pp.471-477.
20. Lee C.R., Sun S.J., Kam T.Y. *System parameters evaluation of flexibly supported laminated composite sandwich plates* // AIAA Journal. – 2007. – Vol.45. – No.9. – Pp.2312-2322.
21. Zenkour A.M., Alghamdi N.A. *Thermomechanical bending response of functionally graded nonsymmetric sandwich plates* // Journal of Sandwich Structures and Materials. – 2009. – Vol.12. – No.1. – Pp.7-46.
22. Zenkour A.M., Alghamdi N.A. *Bending Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates under the Effect of Mechanical and Thermal Loads* // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2010. – Vol.17. – No.6. – Pp.419-432.
23. Julien D., Karam S. *Limit analysis of multi-layered plates. Part II: The Homogenized Love–Kirchhoff Model* // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2008. – Vol.56. – No.2. – Pp.561-580.
24. Thai C.H., Tran L.V., Tran D.T., Nguyen-Thoi T., Nguyen-Xuan U. *Analysis of laminated composite plates using higher-order shear deformation plate theory and mode-based smoother discrete shear gap method* // Applied Mathematical Modeling. – 2012. – Vol.36. – No.11. – Pp.5657-5677.
25. Москвитин В.В., Старовойтов Э.И. *Деформация и переменные нагружения двухслойных металлополимерных пластин* // Механика композитных материалов. – 1985. – № 3. – С.409-416.
26. Плескачевский Ю.М., Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В., Панин С.В. *Термопластический изгиб круговых композитных пластин на основании Винклера* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2011. – Т.17. – №2. – С.209-219.
27. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. *Термоупругопластическое деформирование трехслойного стержня со сжимаемым наполнителем* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2017. – Т.23. – №3. – С.419-434.
28. Старовойтов Э.И., Козел А.Г. *Изгиб упругой круговой трехслойной пластины на основании Пастернака* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т.24. – №3. – С.392-406.
29. Старовойтов Э.И., Захарчук Ю.В. *Изгиб упругопластической круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2020. – Т.26. – №1. – С.58-73.
30. Захарчук Ю.В. *Деформирование круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем* // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – Т.33. – №4. – С.53-57.
31. Козел А.Г. *Уравнения равновесия упругопластической круговой пластины на основании Пастернака* // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – №11. – С.127-133.
32. Нестерович А.В. *Уравнения равновесия трехслойной круговой пластины при неосесимметричном нагружении* // Теоретическая и прикладная механика. – 2019. – №34. – С.154-159.

33. Нестерович А.В. *Напряженное состояние круговой трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости* // Механика. Исследования и инновации. – 2019. – №12. – С.152-157.

## REFERENCES

1. Golovko K.G., Lugovoj P.Z., Mejsch V.F. *Dinamika neodnorodnykh obolochek pri nestatsionarnykh nagruzkakh [The Dynamics of Inhomogeneous Shells under Transient Load Conditions]*. Kiev, Kievskij universitet, 2012, 541 p.
2. Aghalovyan L. *Asymptotic theory of anisotropic plates and shells*. Singapore–London, World Scientific Publ., 2015, 376 p.
3. Gorshkov A.G., Starovoitov E.I., Yarovaya A.V. *Mekhanika sloistykh vyazkouprugoplasticheskikh ehlementov konstruksij [Mechanics of layered viscoelastic structural elements]*. Moskva, FIZMATLIT, 2005, 576 p.
4. Zhuravkov M. A., Starovoitov E. I. *Mekhanika sploshnykh sred. Teoriya uprugosti i plastichnosti [Continuum mechanics. The theory of elasticity and plasticity]*. Minsk, Belorusskij gosudarstvennyj universitet, 2011, 540 p.
5. Starovoytov E.I., Zhuravkov M.A., Leonenko D.V. *Trekslojnye sterzhni v termoradiatsionnykh polyakh [Three-layer bars in thermoradiation fields]*. Minsk, Belaruskaya navuka, 2017, 275 p.
6. Ivañez I., Moure M.M., Garcia-Castillo S.K., Sanchez-Saez S. *The oblique impact response of composite sandwich plates*. Composite Structures, 2015, No.133, Pp.1127-1136.
7. Paimushin V.N., Ivanov V.I., Khusainov V.R *Analiz svobodnykh i sobstvennykh kolebanij trekslojnoj plastiny na osnove uravnenij utochnennoj teorii [Study of free and eigen vibrations of a three-layer plate on the bases of equations of a refined theory]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2002, Vol.8, No.4, Pp.543-554.
8. Fedotenkov G.V., Tarlakovskiy D.V., Vahterova Y.A. *Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam*. Lobachevskii journal of mathematics, 2019, Vol.40, No.4, Pp.439-447.
9. Vestyak V.A., Sadkov A.S., Tarlakovskii D.V. *Propagation of unsteady bulk perturbations in an elastic half-plane*. Mechanics of Solids, 2011, Vol.46, No.2, Pp.266-274.
10. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Yarovaya A.V. *Vibrations of round three-layer plates under the action of distributed local loads*. Strength of Materials, 2002, Vol.34, No.5, Pp.474-481.
11. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Tarlakovskiy D.V. *Resonance vibrations of circular composite plates on an elastic foundation*. Mechanics of Composite Materials, 2015, Vol.51, No.5, Pp.561-570.
12. Starovoitov E.I. *Vibrations of circular composite plates on an elastic foundation under the action of local loads*. Mechanics of Composite Materials, 2016, Vol.52, No5, Pp.665-672.
13. Leonenko D.V. *Kolebaniya krugovykh trekslojnykh plastin na uprugom osnovanii Pasternaka [Vibrations of circular three-layer plates on en Pasternak elastic foundation]*. Ehkologicheskij vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ehkonomicheskogo sotrudnichestva, 2014, No.1, Pp.59-63.
14. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. *Issledovanie spektra chastot trekslojnoj tsilindricheskoy obolochki s uprugim napolnitelem [Investigation of the frequency*

- spectrum of a three-layered cylindrical shell with an elastic filler]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii*, 2015, Vol.21, No.2, Pp.162-169.
15. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. *Rezonansnye kolebaniya trekhslojnoj tsilindricheskoy obolochki s uprugim napolnitelem [Resonance oscillations of a three-layered cylindrical shell with an elastic filler]*. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii*, 2016, Vol.22, No.1, Pp.60-68.
  16. Dzhagangirov A.A. *Nesushhaya sposobnost' trekhslojnoj voloknistoj kompozitnoj kol'tsevoj plastinki, zashhemlennoj po kromkam [Carrying capacity of a three-layer fibrous composite annular plate, clamped along the edges]*. *Mekhanika kompozitnykh materialov*, 2015, Vol.51, No.2, Pp.100-109.
  17. Škec L., Jelenić G. *Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection*. *Acta Mechanica*, 2014, Vol.225, No.2, Pp.523-541.
  18. Belinha J., Dints L.M.J.S. *Nonlinear Analysis of Plates and Laminates Using the Element Free Galerkin Method*. *Composite Structures*, 2007, Vol.78, No.3, Pp.337-350.
  19. Yang L., Harrysson O., West H., Cormier D.A. *Comparison of Bending Properties for Cellular Core Sandwich Panels*. *Materials Sciences and Applications*, 2013, Vol.4, No.8, Pp.471-477.
  20. Lee C.R., Sun S.J., Kam T.Y. *System parameters evaluation of flexibly supported laminated composite sandwich plates*. *AIAA Journal*, 2007, Vol.45, No.9, Pp.2312-2322.
  21. Zenkour, A.M., Alghamdi N.A. *Thermomechanical bending response of functionally graded nonsymmetric sandwich plates*. *J. of Sandwich Structures and Materials*, 2009, Vol.12, No.1, Pp.7-46.
  22. Zenkour A.M., Alghamdi N.A. *Bending Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates under the Effect of Mechanical and Thermal Loads*. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2010, Vol.17, No.6, Pp.419-432.
  23. Julien D., Karam S. *Limit analysis of multi-layered plates. Part I: The homogenized Love–Kirchhoff*. *J. of the Mechanics and Physics of Solids*, 2008, Vol.56, No.2, Pp.561-580.
  24. Thai C.H., Tran L.V., Tran D.T., Nguyen-Thoi T., Nguyen-Xuan U. *Analysis of laminated composite plates using higherorder shear deformation plate theory and mode-based smoother discrete shear gap method*. *Applied Mathematical Modelling*, 2012, Vol.36, No.11, Pp.5657-5677.
  25. Moskvitin V.V., Starovoitov E.I. *Deformation and variable loading of two-layer metal-polymer plates*. *Mechanics of Composite Materials*, 1985, Vol.21, No.3, Pp.267-273.
  26. Pleskachevskii Y.M., Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Panin S.V. *Termoplasticheskij izgib krugovykh kompozitnykh plastin na osnovanii Vinklera [Thermoplastic bending of circular composite plates based on Winkler]*. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii*, 2011, Vol.17, No.2, Pp.209-219.
  27. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. *Termouprugoplasticheskoe deformirovanie trekhslojnogo sterzhnya so szhimaemym zapolnitelem [Thermoelastoplastic deformation of a three-layer bar with a compressible filler]*. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii*, 2017, Vol.23, No.3, Pp.419-434.
  28. Starovoitov E.I., Kozel A.G. *Izgib uprugoj krugovoj trekhslojnoj plastiny na osnovanii Pasternaka [The bending of an elastic circular sandwich plate on the Pasternak foundation]*. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii*, 2018, Vol.24, No.3, Pp.392-406.

29. Starovoitov E.I., Zakharchuk Yu.V. *Izhib uprugoplasticheskoj krugovoj trekhslojnoj plastiny so szhimaemym zapolnitelem [Bending of an elastoplastic circular three-layer plate with a compressible filler]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2020, Vol.26, No.1, Pp.58-73.
30. Zakharchuk Yu.V. *Deformirovanie krugovoj trekhslojnoj plastiny so szhimaemym zapolnitelem [Deformation of the circular three-layer plate with a compressible filler]*. Problemy fiziki, matematiki i tekhniki, 2017, Vol.33, No.4, Pp.53-57.
31. Kozel A.G. *Uravneniya ravnovesiya uprugoplasticheskoj krugovoj plastiny na osnovanii Pasternaka [Equilibrium equations for an elastoplastic circular plate based on Pasternak]*. Mekhanika. Issledovaniya i innovatsii, 2018, Vol.11, Pp.127-133.
32. Nestsiarovich A.V. *Uravneniya ravnovesiya trekhslojnoj krugovoj plastiny pri neosesimmetrichnom nagruzhenii [Equilibrium equations for a three-layer circular plate under non-axisymmetric loading]*. Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika, 2019, Vol.34, Pp.154-159.
33. Nestsiarovich A.V. *Napryazhennoe sostoyanie krugovoj trekhslojnoj plastiny pri osesimmetrichnom nagruzhenii v svoej ploskosti [Stressed state of a circular three-layer plate under axisymmetric loading in its plane]*. Mekhanika. Issledovaniya i innovatsii, 2019, Vol.12, Pp.152-157.

Поступила в редакцию 09 декабря 2020 года.

---

Сведения об авторах:

Старовойтов Эдуард Иванович – д.ф.-м.н., проф., зав.каф., Кафедра «Строительная механика», Белорусский государственный университет транспорта, Республика Беларусь, г. Гомель; e-mail: [edstar0@yandex.by](mailto:edstar0@yandex.by)

Нестерович Алина Викторовна – магистр техн. наук, асп., Кафедра «Строительная механика», Белорусский государственный университет транспорта, Республика Беларусь, г. Гомель; e-mail: [alina\\_nest92@bk.ru](mailto:alina_nest92@bk.ru)