

УДК 539.3

DOI 10.33113/mkmk.ras.2021.27.01.031\_046.03

## НЕСТАЦИОНАРНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ С ЗАТУХАЮЩЕЙ ПЛОСКОЙ ВОЛНОЙ В УПРУГОЙ СРЕДЕ\*

Локтева Н.А., Нгуен Зыонг Фунг

*ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия  
НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия*

### АННОТАЦИЯ

Выполнено исследование взаимодействия трехслойной пластины с затухающей плоской волной в грунте. В качестве модели преграды в грунте рассматривается трехслойная пластина, описываемая системой уравнений Паймушина В.Н., помещенная в грунт и делящая его на две части. Рассматривается плоская постановка задачи. Граничные условия соответствуют шарнирному закреплению преграды, а начальные условия являются нулевыми. В качестве внешнего воздействия рассматривается плоская затухающая волна, индуцированная в одной из полусред. Для описания движения грунта используются уравнения теории упругости, соотношения Коши и физический закон или же эквивалентные им перемещения в потенциалах и уравнения Ламе. Задача решается в связанной постановке, где совместно рассматривается движение пластины и окружающих ее сред. Все компоненты уравнений движения пластины и сред раскладываются в тригонометрические ряды, удовлетворяющие граничным условиям, и к ним применяется преобразование Лапласа. Для задания плоской затухающей набегающей волны рассматривается скалярный потенциал поля перемещений, к которому так же применяется преобразование Лапласа по времени и разложение в тригонометрический ряд по координате. В качестве условий контакта пластины и грунта принимается равенство нормальных перемещений и напряжений на границе среды и пластины. Так же считается, что амплитуды давлений и нормальные напряжения совпадают. После определения из условий контакта констант, находятся значения перемещения и значения нормальных и касательных напряжений, после чего находятся их оригиналы. Так как аналитическое определение оригиналов функций невозможное, то применяется метод Дурбина.

**Ключевые слова:** нестационарная динамика; плоская волна; упругая среда; пластина Паймушина В.Н.; интегральные преобразования; метод Дурбина; вибропоглощение

## UNSTATIONARY INTERACTION OF A THREE-LAYER PLATE WITH A DYING PLANE WAVE IN ELASTIC TRANSIENT STRESS-STRAIN

Lokteva N.A., Nguyen Duong Phung

*Moscow Aviation Institute (national research university), Moscow, Russia  
Research Institute of Mechanics MSU by M.V. Lomonosov, Moscow, Russia*

---

\* Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №19-08-00968 А.

## ABSTRACT

A study of the interaction of a three-layer plate with a damped plane wave in the soil has been carried out. As a model of an obstacle in the soil, a three-layer plate is considered, described by the system of equations of V.N. Paimushin, placed in the soil and dividing it into two parts. A flat formulation of the problem is considered. The boundary conditions correspond to the hinge fixation of the obstacle, and the initial conditions are zero. A damped plane wave induced in one of the semi-media is considered as an external influence. To describe the motion of the soil, the equations of the theory of elasticity, the Cauchy relations and the physical law, or their equivalent displacements in potentials and the Lamé equations, are used. The problem is solved in a related setting, where the movement of platinum and its surroundings is considered together. All components of the equations of motion of the plate and media are expanded into trigonometric series that satisfy the boundary conditions, and the Laplace transform is applied to them. To specify a plane damped incident wave, the scalar potentials of the displacement field are considered, to which the Laplace transform in time and the expansion into a trigonometric series in coordinate are also applied. The equality of normal displacements and stresses at the interface between the medium and the plate is taken as the conditions for contact between the plate and the soil. It is also considered that the pressure amplitudes and normal stresses coincide. After determining the constants from the contact conditions, the displacement values and the values of normal and tangential stresses are found, after which their originals are found. Since the analytical determination of the originals of functions is impossible, the Durbin method is applied.

**Keywords:** unsteady dynamics; plane wave; elastic medium; Paimushin V.N. plate; integral transformations; Durbin's method; vibration absorption

## ВВЕДЕНИЕ

Постоянное уплотнение городской застройки и внедрение инфраструктуры в уже существующую городскую среду остро ставит вопрос о защите как населения, так и зданий и сооружений от негативного техногенного воздействия. Не последнюю роль здесь играет и экономическая составляющая, которая вынуждает сокращать зоны отчуждения около путепроводов или веток метро, а соответственно сокращаться расстояние от них до жилых зданий. Основным источником неблагоприятных внешних воздействий на фундаменты зданий становятся источники вибрации техногенного характера. Такими источниками являются инженерное оборудование, промышленные установки, а также транспортные средства (метрополитен мелкого залегания, тяжёлые грузовые автомобили, железнодорожные поезда, трамваи), создающие при работе большие динамические нагрузки [1]. Различают два вида воздействий на фундаменты зданий – это стационарное воздействие, создаваемое регулярными источниками вибраций и импульсное воздействие. Стационарное воздействие, как наиболее распространенное, и методы защиты от него на данный момент хорошо изучены. Импульсное воздействие как правило связано с взрывами, падением оборудования, столкновением транспорта с конструкциями. Однако данные виды воздействия и соответственно расчеты по ним регламентируются гораздо меньшим числом нормативных документов [2]. В силу того, что данные ситуации на практике возникают не часто, данный вопрос изучен в гораздо меньшей степени.

Существуют два подхода в организации виброзащиты фундаментов зданий и сооружений [3]: виброзащита, закладываемая в конструкцию на уровне проектирования и включающая в себя виброгасящие устройства; и подход, основанный на создании вибропоглощающих барьеров [4,5]. В последнем случае в качестве преграды могут рассматриваться как вертикальные виброзащитные

экраны, так и траншеи. Наиболее полно виброзащитные экраны рассмотрены в работе [6]. В случае использования виброзащитных барьеров, волны, воздействующие на препятствие, отражаются либо рассеиваются. Однако данный метод защиты обладает определёнными недостатками, связанными с требованиями, предъявляемыми к материалу, который должен обладать малой жесткостью, но высокой плотностью.

В представленной работе исследуется нестационарное взаимодействие плоской волны, индуцированной в грунте, с вибропоглощающей преградой в виде трехслойной пластины. Стоит отметить, что приведенные выше работы рассматривают в основном непосредственное влияние нагрузки на изучаемый объект, в нашем же случае рассматривается связанная задача, учитывающая положение источника волны в среде, а также колебания, возникающие в грунте. В качестве модели грунта используется упругая среда, что является допустимым при небольших амплитудах колебаний. Выбранная модель пластины позволяет варьировать геометрические параметры и свойства материала несущих слоев и заполнителя, получая таким образом преграду с оптимальными вибропоглощающими свойствами.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В данной работе исследуется нестационарное воздействие плоской волны на преграду сложной конструкции, где учитываются особенности конструкции и форма набегающей волны.

В качестве модели преграды в грунте рассматривается трехслойная пластина, помещенная в грунт и делящая его на две части – среду «1» и «2», описываемая системой уравнений Паймушина В.Н. [7] (рис.1).

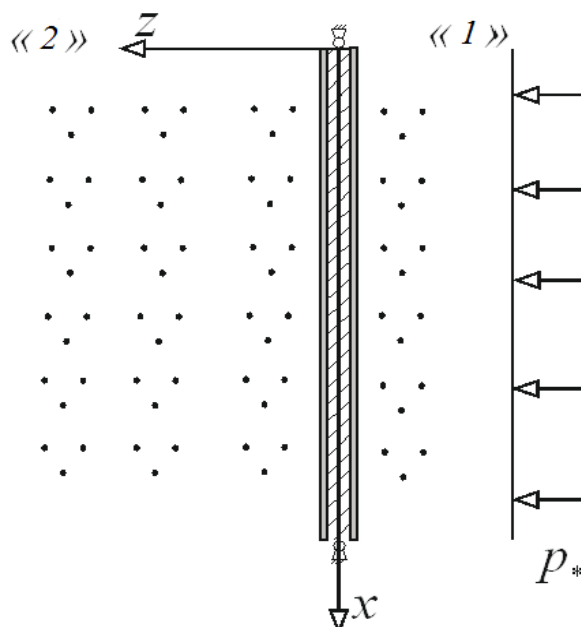


Рис.1. Модель взаимодействия акустических сред с пластиной.

Моделью грунта служит изотропная упругая среда, которая описывается уравнениями теории упругости. Изотропная упругая среда «1» имеет плотность  $\rho$  со скоростью распространения в ней звуковых волн  $c_1$ . Изотропная упругая среда

«2» обладает плотность  $\rho_2$ , а скорость распространения в ней звуковых волн  $c_2$ . Пластина расположена в декартовой системе координат  $Oxuz$ , при этом предполагается, что плоскость  $Oxu$  для пластины является срединной, а ось  $Oz$  направлена в глубину среды «2». Рассматривается плоская постановка задачи. Граничные условия соответствуют шарнирному закреплению преграды, а начальные условия являются нулевыми. Набегающая волна является затухающей плоской с амплитудой давления на фронте  $p_*$ . В результате ее взаимодействия с пластиной в окружающих средах «1» и «2» индуцируется прошедшая и отраженная волны.

Определяются перемещения в средах «1» и «2» на границе с вибропоглощающей преградой. Для решения поставленной задачи используются разложение в ряды Фурье и преобразование Лапласа.

## 2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ

Объектом исследования является трехслойная пластина симметричной структуры, состоящая из двух несущих слоев и заполнителя между ними. Несущие слои пластины являются упругими и изотропными, с модулем упругости первого рода  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$ , имеют толщину  $2t_1$ . Заполнитель ортотропный, сотовой конфигурации, с модулем упругости  $E_z$  и коэффициентом Пуассона  $\nu_z$ , имеет толщину  $2h$ . Заполнитель имеет модуль обжатия  $E_3$  и модули поперечного сдвига  $G_1$  и  $G_2$  в направлениях осей  $Ox$  и  $Oy$  соответственно. Через  $u_1^{(k)}$  и  $u_2^{(k)}$  обозначим амплитуды тангенциальных перемещений вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$  соответственно, а через  $w^{(k)}$  нормальное перемещение  $k$ -го несущего слоя.  $q^1$  и  $q^2$  – амплитуды постоянных по толщине поперечных касательных напряжений в заполнителе, направленным по осям  $Ox$  и  $Oy$ . Тогда уравнения движения пластины имеют вид (1) (наличие координаты после запятой соответствует дифференцированию по ней, а точки – дифференцированию по времени  $\tau$ )

$$\begin{aligned}
 \rho_c \ddot{u}_1^c &= L_{11}(u_1^c) + L_{12}(u_2^c), \\
 \rho_c \ddot{u}_2^c &= L_{21}(u_1^c) + L_{22}(u_2^c), \\
 \rho_a \ddot{u}_1^a &= L_{11}(u_1^a) + L_{12}(u_2^a) + 2q^1, \\
 \rho_a \ddot{u}_2^a &= L_{21}(u_1^a) + L_{22}(u_2^a) + 2q^2, \\
 \rho_c \ddot{w}_c - \underline{m_c \Delta \ddot{w}_c} + \underline{\rho_{wq}} (\ddot{q}_{,x}^1 + \ddot{q}_{,y}^1) &= -D \Delta^2 w_c + 2k_1 (q_{,x}^1 + q_{,y}^1) + p_1 - p_2, \\
 \rho_{aw} \ddot{w}_a - \underline{m_a \Delta \ddot{w}_a} &= -D \Delta^2 w_a - 2c_3 w_a + p_1 + p_2, \\
 \underline{\rho_{q1} \ddot{q}^1} - \underline{\rho_{wq1} \ddot{w}_{c,x}} &= u_1^a - k_1 w_{c,x} - k_2 (q_{,x}^1 + q_{,y}^2)_{,x} + k_{31} q^1, \\
 \underline{\rho_{q2} \ddot{q}^2} - \underline{\rho_{wq2} \ddot{w}_{c,y}} &= u_2^a - k_1 w_{c,y} - k_2 (q_{,x}^1 + q_{,y}^2)_{,y} + k_{32} q^2.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Так как рассматривается плоская постановка задачи система уравнений Паймушина В.Н. приобретает следующий вид

$$\begin{aligned}
 & Bu_{1,xx}^a(x,t) - \rho_a \ddot{u}_1^a(x,t) + 2q_1(x,t) = 0, \\
 & -Dw_{c,xxxx}(x,t) - \rho_c \ddot{w}_c(x,t) + 2k_1 q_{1,x}(x,t) + p_1 - p_2 = 0, \\
 & -Dw_{a,xxxx}(x,t) - \rho_{aw} \ddot{w}_a(x,t) - 2c_3 w_a(x,t) + p_1 + p_2 = 0, \\
 & u_1^a(x,t) - k_1 w_{c,x}(x,t) - k_2 q_{1,xx}(x,t) + k_{31} q_1(x,t) = 0.
 \end{aligned} \tag{2}$$

где  $B = \frac{2Et}{1-\nu^2}$ ,  $D = \frac{Bt^2}{3}$

$$\begin{aligned}
 & u_i^c = u_i^{(1)} + u_i^{(2)}, \quad u_i^a = u_i^{(1)} - u_i^{(2)} \quad (i=1,2), \\
 & w_c = w_0^{(1)} + w_0^{(2)}, \quad w_a = w_0^{(1)} - w_0^{(2)}; \\
 & k_1 = t + h, \quad k_2 = \frac{h^2}{3c_3}, \quad k_{3i} = \frac{2h}{G_i}, \quad (i=1,2), \quad c_3 = \frac{E_3}{2h}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Модуль обжатия заполнителя  $E_3 = \frac{4dE_z}{3(1-\nu_z^2)a \sin(\varphi)}$ .

Рассматривается случай трансверсально-мягкого заполнителя, где модули поперечного сдвига заполнителя равны между собой –  $G_1 = G_2 = G$ . В этом случае

$$\rho_{wq1} = \rho_{wq2} = \rho_{wq} = \frac{2\rho h^3}{3G}, \quad \rho_{q1} = \rho_{q2} = \rho_q = \frac{2\rho_{wq}}{G}, \quad k_{31} = k_{32} = k_3 = \frac{2h}{G}.$$

Модуль поперечного сдвига заполнителя  $G$  и модуль сдвига материала заполнителя  $G_z$  определяется как:  $G = G_z \frac{2d(1+\cos^2(\varphi))}{3a \sin(\varphi)}$ ,  $G_z = \frac{E_z}{2(1+\nu_z)}$ .

Введём следующие безразмерные величины

$$\begin{aligned}
 \bar{w} &= \frac{w}{l}; \quad \bar{u} = \frac{u}{l}; \quad \bar{\tau} = \frac{c \cdot t}{l}; \quad \bar{x} = \frac{x}{l}; \quad \bar{q}_1 = \frac{l(1-\nu^2)}{Et_1} q_1; \\
 \bar{p}_1 &= \frac{l(1-\nu^2)}{Et_1} p_1; \quad \bar{p}_2 = \frac{l(1-\nu^2)}{Et_1} p_2.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Далее раскладываем все функции, входящие в систему уравнений (2) в тригонометрические ряды, удовлетворяющие граничным условиям, с учетом (4)

$$\begin{aligned}
 M &= \sum_{n=1}^{\infty} M_n \sin \lambda_n \bar{x}, \\
 M &= (\bar{w}_c, \bar{w}_a, \bar{p}_1, \bar{p}_2)^T, \quad M_n = (\bar{w}_{cn}, \bar{w}_{an}, \bar{p}_{1n}, \bar{p}_{2n})^T. \\
 N &= \sum_{n=1}^{\infty} N_n \cos \lambda_n \bar{x}, \\
 N &= (\bar{u}_1^{(2)}, \bar{q}_1)^T, \quad N_n = (\bar{u}_{1n}^{(2)}, \bar{q}_{1n})^T.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Применим к (2) разложение в ряды (5) и преобразование Лапласа по времени

$$\begin{aligned}
 & 2\lambda_n^2 \bar{u}_{1n}^{(2)L} + 2m_6 s^2 \bar{u}_{1n}^{(2)L} + \bar{q}_{1n}^L = 0, \\
 & -m_1 \lambda_n^4 \bar{w}_{cn}^L - (2+m_2) m_6 s^2 \bar{w}_{cn}^L - 2m_3 \lambda_n \bar{q}_{1n}^L + \bar{p}_{1n}^L - \bar{p}_{2n}^L = 0,
 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
& -m_1 \lambda_n^4 \overline{w_{an}^L} - \left(2 + \frac{m_2}{3}\right) m_6 s^2 \overline{w_{an}^L} - \frac{4}{3m_5} \overline{w_{an}^L} + \overline{p_{1n}^L} + \overline{p_{2n}^L} = 0, \\
& -2\overline{u_{1n}^{(2)L}} - m_3 \lambda_n \overline{w_{cn}^L} + (\lambda_n^2 m_4 + m_7) m_5 \overline{q_{1n}^L} = 0,
\end{aligned}$$

Обозначим следующие параметры, включающие в себя физические и геометрические характеристики пластины в выражениях (6) как

$$\begin{aligned}
m_1 &= \frac{2t_1^2}{3l^2}; \quad m_2 = \frac{\rho h}{\rho_b t_1}; \quad m_3 = \frac{t_1 + h}{l}; \quad m_4 = \frac{h^2}{2l^2}; \\
m_7 &= m_7 = \frac{6}{(1-\nu_z)(1+\cos^2(\varphi))}; \\
m_5 &= \frac{E}{E_z} \frac{(1-\nu_z^2)}{(1-\nu^2)} \frac{at_1 h \sin(\varphi)}{dl^2}; \quad m_6 = (1-\nu^2).
\end{aligned} \tag{7}$$

Из системы уравнений (6) определяются нормальные  $\overline{w_{0n}^{(1)L}}$  и  $\overline{w_{0n}^{(2)L}}$  и касательные  $\overline{u_{1n}^L} = -\overline{u_{2n}^L}$  перемещений на границах пластины и слоев «1» и «2»

$$\begin{aligned}
\overline{w_{0n}^{(1)L}} &= \frac{1}{2} (\overline{w_{cn}^L} + \overline{w_{an}^L}) = \frac{1}{2} \frac{-(\overline{p_{2n}^L} - \overline{p_{1n}^L}) I_1(s^2, \lambda_n^4)}{I_2(s^2, \lambda_n^2) I_3(s^2, \lambda_n^6) + I_4(s^2, \lambda_n^4)} + \\
&+ \frac{1}{2} \frac{3m_5 (\overline{p_{1n}^L} + \overline{p_{2n}^L})}{I_5(s^2, \lambda_n^4)}; \\
\overline{w_{0n}^{(2)L}} &= \frac{1}{2} (\overline{w_{cn}^L} - \overline{w_{an}^L}) = \frac{1}{2} \frac{-(\overline{p_{2n}^L} - \overline{p_{1n}^L}) I_1(s^2, \lambda_n^4)}{I_2(s^2, \lambda_n^4) I_3(s^2, \lambda_n^4) + I_4(s^2, \lambda_n^4)} - \\
&- \frac{1}{2} \frac{3m_5 (\overline{p_{1n}^L} + \overline{p_{2n}^L})}{I_5(s^2, \lambda_n^4)}; \\
\overline{u_{1n}^L} &= \frac{m_3 \lambda_n (\overline{p_{2n}^L} - \overline{p_{1n}^L})}{Q_1(s^2, \lambda_n^8) + Q_2(s^4, \lambda_n^2) + Q_3(s^4, \lambda_n^0)};
\end{aligned} \tag{8}$$

где введены следующие обозначения

$$\begin{aligned}
I_1(s^2, \lambda_n^4) &= (m_5 (m_6 s^2 + \lambda_n^2) (\lambda_n^2 m_4 + m_7) + 1); \\
I_2(s^2, \lambda_n^2) &= (m_6 s^2 + \lambda_n^2); \\
I_3(s^2, \lambda_n^6) &= (m_1 \lambda_n^4 + (2 + m_2) m_6 s^2) (\lambda_n^2 m_4 + m_7) m_5; \\
I_4(s^2, \lambda_n^4) &= (2 m_3^2 + m_1) \lambda_n^4 + 2 m_3^2 m_6 \lambda_n^2 s^2 + (2 + m_2) m_6 s^2; \\
I_5(s^2, \lambda_n^4) &= (6 + m_2) m_3 m_6 s^2 + 3 m_3 m_1 \lambda_n^4 + 4; \\
Q_3(s^4, \lambda_n^0) &= 2 s^2 m_6 (1 + s^2 m_7 m_3 m_6) (2 + m_2);
\end{aligned} \tag{9}$$

$$Q_2(s^4, \lambda_n^2) = 2m_6 s^2 \left( 2m_3^2 + (m_4 m_5 m_6 s^2 (2 + m_2) + (2 + m_2) m_5 m_7 + m_1 m_7) \right) \lambda_n^2;$$

$$Q_1(s^2, \lambda_n^8) = 2m_1 m_4 m_5 \lambda_n^8 + 2m_1 m_5 (m_7 + m_4 m_6 s^2) \lambda_n^6 +$$

$$+ (2m_5 m_6 s^2 ((2 + m_2) m_4 + m_1 m_7) + 2m_3^2 + m_1) \lambda_n^4.$$

### 3. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ГРУНТА В БЕЗРАЗМЕРНОМ ВИДЕ

В качестве модели грунта используется изотропная упругая среда, которая описывается уравнениями теории упругости. Замкнутая система уравнений, описывающая ее плоское движение, имеет вид (силами тяжести пренебрегаем) [8]

– уравнения движения

$$\rho \ddot{u}_1 = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z},$$

$$\rho \ddot{u}_2 = \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial z},$$

$$\rho \ddot{w} = \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z}$$
(10)

– соотношения Коши

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right),$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial y}, \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right),$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right), \quad \theta = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$
(11)

– физический закон

$$\sigma_{11} = \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_{11}, \quad \sigma_{13} = 2\mu \varepsilon_{13},$$

$$\sigma_{33} = \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_{33}, \quad \sigma_{22} = \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_{22}, \quad \sigma_{23} = 2\mu \varepsilon_{23}$$
(12)

где  $u$  и  $w$  – перемещения вдоль осей  $Ox$  и  $Oz$  соответственно;  $\sigma_{ij}$  и  $\varepsilon_{ij}$  – компоненты тензоров напряжений и деформаций;  $\theta$  – коэффициент объемного расширения;  $\rho$  и  $\lambda$ ,  $\mu$  – плотность и упругие постоянные Ламе грунта; точками здесь и далее обозначены производные по времени  $t$ .

Системе (10)-(12) эквивалентны уравнения в перемещениях (уравнения Ламе)

$$\rho \ddot{u}_1 = (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta u_1, \quad \rho \ddot{u}_2 = (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \Delta u_2,$$

$$\rho \ddot{w} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \Delta w, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$
(13)

Другой вариант эквивалентной системы относительно скалярного потенциала  $\varphi$  и компонент  $\psi$  векторного потенциала перемещений

$$\ddot{\varphi} = c_1^2 \Delta \varphi, \quad \ddot{\psi} = c_2^2 \Delta \psi,$$

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho},$$
(14)

где  $c_1$  и  $c_2$  – скорости распространения волн растяжения-сжатия и сдвига)

$$u_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad u_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$
(15)

Введём следующие безразмерные величины

$$\bar{u}_1 = \frac{u_1}{l}; \quad \bar{w} = \frac{w}{l}; \quad \bar{x} = \frac{x}{l}; \quad \bar{z} = \frac{z}{l}; \quad \tau = \frac{c \cdot t}{l}; \quad \bar{\sigma}_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E_{sp}}; \quad \bar{\sigma}_{13} = \frac{\sigma_{13}}{E_{sp}};$$

$$\bar{\sigma}_{33} = \frac{\sigma_{33}}{E_{sp}}; \quad \bar{\psi} = \frac{\psi}{l^2}; \quad \bar{\varphi} = \frac{\varphi}{l^2}.$$
(16)

Все функции, входящие в уравнения движения грунта раскладываются в тригонометрические ряды [9]

– потенциалы

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} L_n \sin \lambda_n \bar{x},$$

$$L = \left( \bar{\varphi}^{(-i)}, \varepsilon_{11}^{(i)}, \bar{\sigma}_{11}^{(-i)}, \bar{\sigma}_{33}^{(-i)} \right)^T, \quad L_n = \left( \bar{\varphi}_n^{(-i)}, \varepsilon_{11n}^{(i)}, \bar{\sigma}_{11n}^{(-i)}, \bar{\sigma}_{33n}^{(-i)} \right)^T.$$
(17)

$$K = \sum_{n=0}^{\infty} K_n \cos \lambda_n \bar{x},$$

$$K = \left( \bar{\psi}^{(-i)}, \varepsilon_{13}^{(i)}, \varepsilon_{33}^{(i)}, \theta^{(i)}, \bar{\sigma}_{13}^{(-i)} \right)^T, \quad K_n = \left( \bar{\psi}_n^{(-i)}, \varepsilon_{13n}^{(i)}, \varepsilon_{33n}^{(i)}, \theta_n^{(i)}, \bar{\sigma}_{13n}^{(-i)} \right)^T.$$

С учетом разложений в тригонометрические ряды, удовлетворяющих граничным условиям и выполненного преобразования Лапласа, уравнения движения грунта, соотношений Коши и физический закон в коэффициентах рядов запишутся следующим образом

– уравнения движения

$$s^2 \bar{u}_{1n}^{(-j)L} = \lambda_n \bar{\sigma}_{11n}^{(-j)L} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{13n}^{(-j)L}}{\partial \bar{z}};$$

$$s^2 \bar{w}_n^{(-j)L} = \lambda_n \bar{\sigma}_{13n}^{(-j)L} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{33n}^{(-j)L}}{\partial \bar{z}};$$
(18)

– соотношения Коши

$$\varepsilon_{11n}^{(-j)L} = -\lambda_n \bar{u}_{1n}^{(-j)L}; \quad \varepsilon_{33n}^{(-j)L} = \frac{\partial \bar{w}_n^{(-j)L}}{\partial \bar{z}};$$

$$\varepsilon_{13n}^{(-j)L} =; \quad \theta_n^{(-j)L} = \frac{\partial \bar{\varphi}_n^{(-j)L}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{w}_n^{(-j)L}}{\partial \bar{z}};$$
(19)

– физический закон

$$\bar{\sigma}_{11n}^{(-j)L} = \lambda \frac{\partial \bar{w}_n^{(-j)L}}{\partial \bar{z}}; \quad \bar{\sigma}_{13n}^{(-j)L} = \mu \lambda_n \bar{w}_n^{(-j)L};$$
(20)



$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{33}^{-(j)L} &= \lambda \frac{\partial \bar{u}_1^{-(j)L}}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \bar{w}^{-(j)L}}{\partial z} = \\ &= \frac{\nu_{ep}}{(1 + \nu_{ep})(1 - 2\nu_{ep})} \frac{\partial \bar{u}_1^{-(j)L}}{\partial x} + \frac{(1 - \nu_{ep})}{(1 + \nu_{ep})(1 - 2\nu_{ep})} \frac{\partial \bar{w}^{-(j)L}}{\partial z} = \\ &= -\alpha \lambda_n \bar{u}_{1n}^{-(j)L} + \gamma \frac{\partial \bar{w}_n^{-(j)L}}{\partial z}; \end{aligned}$$

где  $\alpha = \frac{\nu_{ep}}{(1 + \nu_{ep})(1 - 2\nu_{ep})}$ ;  $\gamma = \frac{(1 - \nu_{ep})}{(1 + \nu_{ep})(1 - 2\nu_{ep})}$ .

Уравнения движения в потенциалах

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_n^{-L}}{\partial \bar{z}^2} - \beta_{1n}^2 \bar{\varphi}_n^{-L} &= 0; \quad \beta_{1n}^2 = \lambda_n^2 + s^2; \\ \frac{\partial^2 \bar{\psi}_n^{-L}}{\partial \bar{z}^2} - \beta_{2n}^2 \bar{\psi}_n^{-L} &= 0; \quad \beta_{2n}^2 = \lambda_n^2 + \frac{s^2}{\eta}; \\ \bar{u}_{1n} &= \lambda_n \bar{\varphi}_n - \frac{\partial \bar{\psi}_n}{\partial \bar{z}}; \quad \bar{w}_n = \frac{\partial \bar{\varphi}_n}{\partial \bar{z}} - \lambda_n \bar{\psi}_n. \end{aligned} \tag{21}$$

Полученные выражения (18)-(20) позволяют определять значения перемещений, напряжений и деформаций в любой из сред при известных значениях потенциалов.

#### 4. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГРУНТА В ПОТЕНЦИАЛАХ

Для нахождения динамических и кинематических параметров среды необходимо определить значения векторного и скалярного потенциалов. Уравнения движения среды относительно скалярного потенциала  $\varphi$  и компонент  $\psi$  [8] векторного потенциала перемещений после соответствующего разложения в ряды и применения преобразования Лапласа примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_n^{-L}}{\partial \bar{z}^2} - \beta_{1n}^2 \bar{\varphi}_n^{-L} &= 0; \quad \beta_{1n}^2 = \lambda_n^2 + s^2; \\ \frac{\partial^2 \bar{\psi}_n^{-L}}{\partial \bar{z}^2} - \beta_{2n}^2 \bar{\psi}_n^{-L} &= 0; \quad \beta_{2n}^2 = \lambda_n^2 + \frac{s^2}{\eta}; \end{aligned} \tag{22}$$

Условие органичности для грунта на бесконечности можно записать

Для среды «1» при  $z \rightarrow -\infty$

$$\bar{\varphi}_n^{(1)L}(z, s) = O(1), \quad \bar{\psi}_n^{(1)L}(z, s) = O(1). \tag{23}$$

Для среды «2» при  $z \rightarrow +\infty$

$$\bar{\varphi}_n^{(2)L}(\bar{z}, s) = O(1), \quad \bar{\psi}_n^{(2)L}(\bar{z}, s) = O(1). \tag{24}$$

Удовлетворяющие условию (23) и (24) решения уравнений (22) имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_n^{(1)L}(z, s) &= C_{11} e^{\beta_{1n} z}; \quad \bar{\varphi}_n^{(2)L}(\bar{z}, s) = C_{12} e^{-\beta_{1n} \bar{z}}; \\ \bar{\psi}_n^{(1)L}(z, s) &= C_{21} e^{\beta_{2n} z}; \quad \bar{\psi}_n^{(2)L}(\bar{z}, s) = C_{22} e^{-\beta_{2n} \bar{z}}. \end{aligned} \tag{25}$$

## 5. ЗАДАНИЕ НАБЕГАЮЩЕЙ ЗАТУХАЮЩЕЙ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ

Для задания набегающей волны рассмотрим плоскую одномерную волну растяжения-сжатия ( $\psi \equiv 0$ ) [8], распространяющуюся вдоль положительного направления оси  $Oz$ , полагаем  $p_*(x, z, t) = p_{*a}(x, z)e^{-t}$ ,  $\varphi(z, t) = \varphi_a(z)e^{-t}$ . Обозначаем безразмерные величины

$$\bar{\varphi}(\bar{z}, \tau) = \varphi_a(\bar{z})e^{-\tau}. \quad (26)$$

В этом случае из уравнений (22) в результате приходим к следующему уравнению относительно амплитуды потенциала

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}_a}{\partial \bar{z}^2} - \bar{\varphi}_a = 0, \quad \bar{\varphi}_a = \varphi_a(\bar{z}). \quad (27)$$

Его решение, удовлетворяющее соответствующему в условию (23), имеет вид ( $A_\varphi$  – произвольная постоянная)

$$\bar{\varphi}_a = A_\varphi e^{\bar{z}}. \quad (28)$$

Отсюда и из (18), (19) и (21) получаем, что потенциал имеет вид бегущей волны

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_* &= A_\varphi e^{\bar{z}-\tau} = A_\varphi e^{\bar{z}} e^{-\tau}, \quad \bar{u} \equiv 0, \\ \varepsilon_{11} = \varepsilon_{13} &\equiv 0, \quad \varepsilon_{33} = \theta = A_\varphi e^{\bar{z}} e^{-\tau}, \quad \sigma_{11} = \alpha A_\varphi e^{\bar{z}} e^{-\tau}, \quad \sigma_{13} \equiv 0; \\ \bar{w}_* &= A_\varphi e^{\bar{z}} e^{-\tau}, \quad \sigma_{33*} = \gamma A_\varphi e^{\bar{z}} e^{-\tau}. \end{aligned} \quad (29)$$

Отсюда, учитывая, что,  $\sigma_{33*}|_{\tau=0, \bar{z}=0} = \sigma_{33*} = p_*$ , для перемещений и напряжений в набегающей волне получаем такие формулы

$$\begin{aligned} \sigma_{33*}|_{\tau=0, \bar{z}=0} &= \gamma A_\varphi = p_* \Rightarrow A_\varphi = \frac{p_*}{\gamma}; \quad \bar{u}_* \equiv 0, \quad \bar{w} = -\frac{p_*}{\gamma} e^{\bar{z}} e^{-\tau}; \\ \sigma_{13*} &\equiv 0, \quad \sigma_{11} = \alpha A_\varphi e^{\bar{z}} e^{-\tau} = \frac{\alpha p_*}{\gamma} e^{\bar{z}} e^{-\tau}, \quad \sigma_{33*} = p_* e^{\bar{z}} e^{-\tau}. \end{aligned} \quad (30)$$

После выполнения преобразования Лапласа, получаем

$$\begin{aligned} A_\varphi &= \frac{p_*}{\gamma}, \quad \bar{u}_*^L \equiv 0, \quad \sigma_{13}^L \equiv 0, \quad \sigma_{11}^L = \frac{\alpha}{\gamma} \frac{p_*}{s+1} e^{-\bar{z}}; \\ \sigma_{33*}^L &= \frac{p_*}{(s+1)} e^{-\bar{z}}, \quad \bar{w}_*^L = \frac{1}{\gamma} \frac{p_*}{s+1} e^{-\bar{z}}. \end{aligned} \quad (31)$$

Раскладываем полученные функции в (27) в ряд Фурье, коэффициенты рядов определяются то

$$\begin{aligned} w_*^L &= \sum_{n=1}^{\infty} w_{*n}^L \sin(\lambda_n \bar{x}), \quad \sigma_{33*}^L = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{33*n}^L \sin(\lambda_n \bar{x}), \quad \lambda_n = \pi n, \quad n = 1, 2, \dots \\ w_{*n}^L &= 2 \int_0^1 w_*^L \sin(\lambda_n \bar{x}) d\bar{x}, \quad \sigma_{33*n}^L = 2 \int_0^1 \sigma_{33*}^L \sin(\lambda_n \bar{x}) d\bar{x}; \end{aligned} \quad (32)$$

Отсюда следует

$$w_{*n}^L = \frac{2p_*(1 - \cos \lambda_n)}{\gamma \lambda_n (s+1)}, \quad \sigma_{33*n}^L = \frac{2p_*(1 - \cos \lambda_n)}{\lambda_n (s+1)}. \quad (33)$$

## 6. РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПЛОСКОЙ ЗАТУХАЮЩЕЙ ВОЛНЫ С ПЛАСТИНОЙ В ГРУНТЕ

Для определения констант интегрирования в (25), необходимо записать условия контакта пластины и грунта, аналогично [10]

– давления и напряжения на границах со средами «1» и «2»

$$\begin{aligned} \overline{p_{1n}^L}(\bar{z}, s) &= \left( -\overline{\sigma_{33n}^{(1)L}}(\bar{z}, s) + \overline{p_{*n}}(\bar{z}, s) \right) \Big|_{\bar{z}=0}, \\ \overline{\sigma_{33*}} \Big|_{\bar{z}=0} &= \overline{p_{*n}}, \\ \overline{p_{2n}^L}(\bar{z}, s) &= -\overline{\sigma_{33n}^{(2)L}}(\bar{z}, s) \Big|_{\bar{z}=0}, \end{aligned} \quad (34)$$

– нормальные перемещения

$$\begin{aligned} \overline{w_{0n}^{(1)L}}(\bar{z}, s) &= \left( -\overline{w_n^{(1)L}}(\bar{z}, s) + \overline{w_{n*}^L}(\bar{z}, s) \right) \Big|_{\bar{z}=0}, \\ \overline{w_{0n}^{(2)L}}(\bar{z}, s) &= \overline{w_n^{(2)L}}(\bar{z}, s) \Big|_{\bar{z}=0}. \end{aligned} \quad (35)$$

С учетом полученных в (12) констант интегрирования значения нормальный и касательных перемещений, а также напряжений в средах «1» и «2» примут вид

– напряжения в средах «1» и «2»

$$\begin{aligned} \overline{\sigma_{33n}^{(1)L}} &= (-\alpha\lambda_n^2 + \gamma\beta_{1n}^2) C_{11} \cdot e^{\beta_{1n}\bar{z}} + (\alpha - \gamma)\lambda_n\beta_{2n} C_{21} \cdot e^{\beta_{2n}\bar{z}}; \\ \overline{\sigma_{33n}^{(2)L}} &= (-\alpha\lambda_n^2 + \gamma\beta_{1n}^2) C_{12} \cdot e^{-\beta_{1n}\bar{z}} + (\gamma - \alpha)\lambda_n\beta_{2n} C_{22} \cdot e^{-\beta_{2n}\bar{z}}; \\ \overline{\sigma_{13n}^{(1)}} &= \frac{1}{(1 + \nu_{gr})} \left\{ 2\lambda_n\beta_{1n} C_{11} e^{\beta_{1n}\bar{z}} - C_{21} (\beta_{2n}^2 + \lambda_n^2) e^{\beta_{2n}\bar{z}} \right\}; \\ \overline{\sigma_{13n}^{(2)}} &= -\frac{1}{(1 + \nu_{gr})} \left\{ 2\lambda_n\beta_{1n} C_{12} e^{-\beta_{1n}\bar{z}} + C_{22} (\beta_{2n}^2 + \lambda_n^2) e^{-\beta_{2n}\bar{z}} \right\}; \end{aligned} \quad (36)$$

– перемещения в средах «1» и «2»

$$\begin{aligned} \overline{w_n^{(1)L}} &= \beta_{1n} C_{11} \cdot e^{\beta_{1n}\bar{z}} - \lambda_n C_{21} \cdot e^{\beta_{2n}\bar{z}}; \quad \overline{w_n^{(2)L}} = -\beta_{1n} C_{12} \cdot e^{-\beta_{1n}\bar{z}} - \lambda_n C_{22} \cdot e^{-\beta_{2n}\bar{z}}; \\ \overline{u_{1n}^{(1)L}} &= \lambda_n C_{11} \cdot e^{\beta_{1n}\bar{z}} - \beta_{2n} C_{21} \cdot e^{\beta_{2n}\bar{z}}; \quad \overline{u_{1n}^{(2)L}} = \lambda_n C_{12} \cdot e^{-\beta_{1n}\bar{z}} + \beta_{2n} C_{22} \cdot e^{-\beta_{2n}\bar{z}}. \end{aligned} \quad (37)$$

Подставляя в условия контакта (34) и (35) значения перемещений несущих слоев пластины (8) и перемещений и напряжений в средах «1» и «2» (36) и (71), получаем значения констант

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{R_1(s^8)}{R_2(s^{11})}; \quad C_{21} = \frac{R_3(s^7)}{R_4(s^{11})}; \quad C_{12} = \frac{R_5(s^{24})}{R_6(s^{25})}; \quad C_{22} = \frac{R_7(s^{13})}{R_8(s^{14})}; \\ \lambda_n &= \pi n; \quad \beta_{1n}^2 = \lambda_n^2 + s^2; \quad \beta_{2n}^2 = \lambda_n^2 + \frac{s^2}{\eta^2}; \end{aligned} \quad (38)$$

Подставляем (36) в (35), получаем значения нормальный и касательных перемещений в среде «2»

$$\overline{w_n^{(2)L}} = -\beta_{1n}(s) \frac{R_5(s^{24})}{R_6(s^{25})} \cdot e^{-\beta_{1n}\bar{z}} - \lambda_n \frac{R_7(s^{13})}{R_8(s^{14})} \cdot e^{-\beta_{2n}\bar{z}};$$

$$\begin{aligned} \overline{u_{1n}^{(1)L}} &= \lambda_n \frac{R_1(s^8)}{R_2(s^{11})} \cdot e^{\beta_{1n} \bar{z}} - \beta_{2n}(s) \frac{R_3(s^7)}{R_4(s^{11})} \cdot e^{\beta_{2n} \bar{z}}; \\ \overline{u_{1n}^{(2)L}} &= \lambda_n \frac{R_5(s^{24})}{R_6(s^{25})} \cdot e^{-\beta_{1n} \bar{z}} + \beta_{2n}(s) \frac{R_7(s^{13})}{R_8(s^{14})} \cdot e^{-\beta_{2n} \bar{z}}. \end{aligned} \quad (39)$$

Так как решение получается чрезвычайно громоздким то принято следящее обозначения  $R_i(s^k)$  – полиномы, возникающие при нахождении значений перемещений.

Такая форма записи позволят оценить структуру полученных выражений.

## 7. НАХОЖДЕНИЕ ОРИГИНАЛОВ ФУНКЦИЙ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Далее к полученным результатам (37) необходимо применить обратное преобразование Лапласа. Как известно из работ [11-13], обращение преобразования Лапласа легко выполняется в случае ограниченной области и отсутствия точки ветвления, однако, в нашем случае область является неограниченной и функции (28) содержат точки ветвления, таким образом становится очевидным, что аналитическое обращение невозможно.

Для обращения функции применяется метод Дурбина [14], где производится замена переменных, основанный на представлении экспоненциальных функций в виде тригонометрических и учета особенностей данных функций. В результате любая функция обращается по следующей формуле

$$f(t) = \frac{2e^{\sigma t}}{\pi} \int_0^{\Omega} \operatorname{Re} f^L(\sigma + i\omega) \cos \omega t d\omega, \quad (40)$$

где интеграл вычисляется численно.

### ПРИМЕР

В качестве примера рассматривается пластина, имеющая следующие параметры: длина  $l=1$  м толщина несущего слоя  $t=0,15$  мм, толщина заполнителя  $h=1,4$  мм. Материал несущих слоев – сталь 12Х18Н10Т:  $E=1,8 \cdot 10^{10}$  кг/м<sup>2</sup>,  $\rho_b=7900$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu=0,29$ , материал заполнителя – Амг2-Н:  $E_z=7,1 \cdot 10^9$  кг/м<sup>2</sup>,  $\rho_z=2690$  кг/м<sup>3</sup>;  $\nu_z=0,32$ ,  $a_z=6 \cdot 10^{-3}$  м;  $d_z=0,05 \cdot 10^{-3}$  м;  $\varphi=120$ . Где  $a_z$  – длина стенки заполнителя,  $d_z$  – толщина стенки заполнителя,  $\varphi$  – угол между стенками заполнителя. Грунт имеет следующие параметры [15]: плотность –  $\rho_{cp}=1600$  кг/м<sup>3</sup>, модуль упругости  $E_{cp}=10^9$  кг/м<sup>2</sup>. В результате расчетов получен график нормальных перемещений и напряжений на границе пластины со средой «1» и «2» в зависимости от времени  $\tau$ .

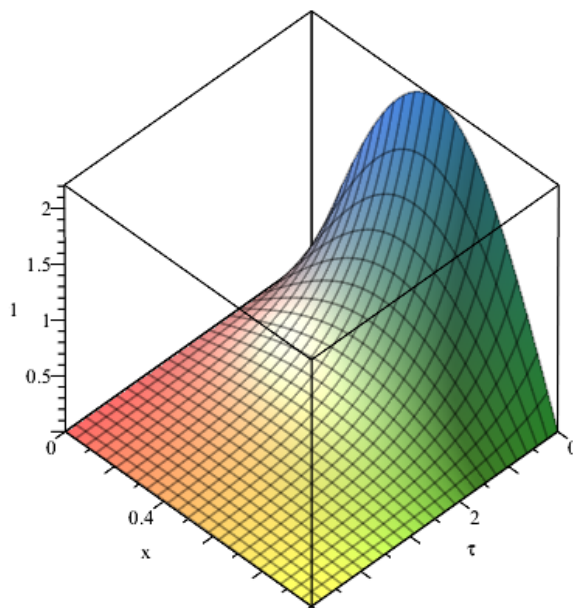


Рис.2. Нормальные перемещения в среде «1»  $w_0^{(1)}$  на границе с несущим слоем пластины.

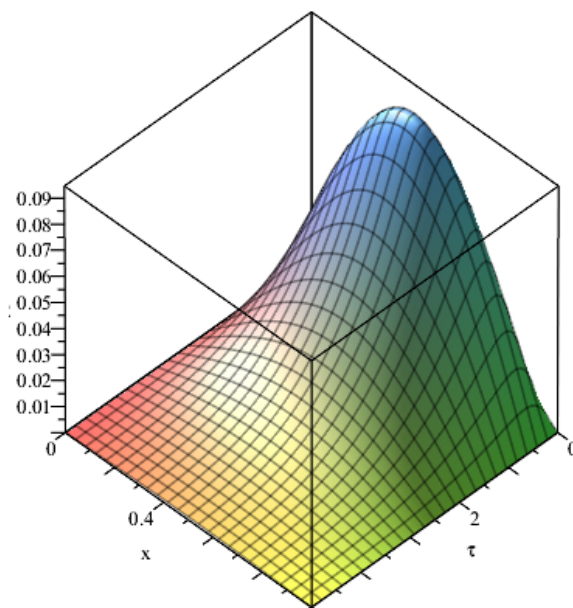


Рис.3. Нормальные перемещения в прошедшей волне в среде «2»  $\overline{w_0^{(2)}}$  на границе с несущим слоем пластины.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполнено исследование взаимодействия трехслойной пластины с затухающей плоской волной в грунте. В качестве модели преграды в грунте рассматривается трехслойная пластина, описываемая системой уравнений Паймушина В.Н., помещенная в грунт и делящая его на две части. Рассматривается плоская постановка задачи. Граничные условия соответствуют шарнирному закреплению преграды, а начальные условия являются нулевыми.

В результате взаимодействия затухающей цилиндрической волны с пластиной в окружающих средах «1» и «2» индуцируется прошедшая и отраженная волны. Преграда представляет из себя трехслойную пластину с упругими изотропными несущими слоями и ортотропным заполнителем. Из системы уравнений движения пластины определяются значения перемещений на границах сред, для чего все входящие в уравнения движения пластины и грунта функции раскладываются в ряды Фурье и выполняется преобразование Лапласа. В пространстве отображений находятся значения перемещений несущих слоев пластины.

Набегающая волна является плоской затухающей. Для описания движения грунта используются уравнения теории упругости, соотношения Коши и физический закон или же эквивалентные им перемещения в потенциалах и уравнения Ламе. Аналогично решению системы уравнений движения пластины, все компоненты данных выражений раскладываются в тригонометрические ряды и к ним применяется преобразование Лапласа. В результате решения уравнений движения в потенциалах, определяются скалярный и векторный потенциалы перемещений в средах «1» и «2». Уравнения потенциалов содержат постоянные интегрирования, для определения которых используются условия контакта. Также, из уравнений движения среды в потенциалах определяются напряжения и перемещения в набегающей цилиндрической волне.

В качестве условий контакта пластины и грунта принимается равенство нормальных перемещений на границе среды и пластины. Так же считается, что амплитуды давлений и нормальные напряжения совпадают.

После определения из условий контакта констант, становится возможным определить значения скалярного и векторного потенциалов поля перемещений, через которые однозначно выражаются перемещения в любой точки среды, расположенной за пластиной, а также значения нормальных и касательных напряжений, возникающих в каждой из полусред. Далее выполнено обратное преобразование Лапласа и найдены суммы рядов Фурье для перемещения напряжений в обеих средах.

Решение задачи в связанном виде дает возможность учитывать не только непосредственно вибропоглощающие свойства пластины, но также и поведение грунта, и особенности набегающей плоской волны. Полученные результаты позволили на основании условий контакта определить значения констант интегрирования, зная которые становится возможным определить кинематические и динамические параметры в любой точке сред, окружающих пластину и, соответственно, оценить ее вибропоглощающие свойства.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Umek A. *Dynamic responses of building foundations to incident elastic waves.* – PhD Thesis Illinois Institute of Technology, Dec.1973. ANZECC 1990.
2. *Technical basis for guidelines to minimise annoyance due to blasting overpressure and ground vibration.* Australian and New Zealand Environment Council, Canberra.
3. Djeran-Maigre I., Kuznetsov S.V. *A new principle for protection from seismic waves.*
4. Костров Б.В. *Движение жесткой массивной полосы, впаянной в упругую среду, под действием плоской волны // ПИММ. – 1964. – Т.28. – Вып.1. – С.99-110.*

5. Рылько М.Я. *О движении в упругой среде жесткого прямоугольного включения под действием плоской волны* // МТТ. – 1977. – №1. – С.158-164.
6. Kuznetsov S.V., Nafasov A.E. *Horizontal acoustic barriers for protection from seismic waves* // Advances in Acoustics and Vibration. – 2011. – Vol.2011.
7. Иванов В.А., Паймушин В.Н. *Уточненная постановка динамических задач трехслойных оболочек с трансверсально-мягким заполнителем численно-аналитический метод их решения* // Прикладная механика и техническая физика. – 1995. – Т.36. – №4. – С.147-151.
8. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. *Волны в сплошных средах: Учебное пособие: Для вузов.* – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 472 с.
9. Снеддон И. *Преобразования Фурье.* – М.: ИЛ, 1955. – 667 с.
10. Lokteva N.A. *The vibration insulation properties of a plate in an elastic medium under the influence of different types of waves / Modeling of the Soil-Structure Interaction: Selected Topics. Mechanical Engineering Theory and Applications.* – United States: United States, 2020. – Pp.2.
11. Пшеничников С.Г. *Нестационарные динамические задачи линейной вязкоупругости* // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2013. – №1. – С.84-96.
12. Пшеничников С.Г. *Динамические задачи линейной вязкоупругости для кусочно-однородных тел* // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2016. – №1. – С.79-89.
13. Pshenichnov S.G. *Dynamic linear viscoelasticity problems for piecewise homogeneous bodies* // Mechanics of Solids. – 2016. – Vol.51. – No.1. – Pp.65-74.
14. Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю., Белов А.А. *Численное обращение преобразования Лапласа.* – 2010.
15. *Свод правил по проектированию и строительству СП 23-105-2004 «Оценка вибрации при проектировании и строительстве и эксплуатации объектов метрополитена».* – М.: ГОССТРОЙ РОССИИ, 2014.

## REFERENCES

1. Umek A. *Dynamic responses of building foundations to incident elastic waves.* PhD Thesis Illinois Institute of Technology, Dec.1973.ANZECC, 1990.
2. *Technical basis for guidelines to minimise annoyance due to blasting overpressure and ground vibration.* Australian and New Zealand Environment Council, Canberra.
3. Djeran-Maigre I., Kuznetsov S.V. *A new principle for protection from seismic waves.*
4. Kostrov B.V. *Dvizhenie zhestkoj massivnoj polosy, vpyannoj v upruguyu sredu, pod dejstviem ploskoj volny [Motion of a rigid massive strip soldered into an elastic medium under the action of a plane wave].* PMM, 1964, Vol.28, Iss.1, Pp.99-110.
5. Rylko M.Ya. *O dvizhenii v uprugoj srede zhestkogo pryamougolnogo vklyucheniya pod dejstviem ploskoj volny [On the motion in an elastic medium of a rigid rectangular inclusion under the action of a plane wave].* МТТ, 1977, No.I, Pp.158-164.
6. Kuznetsov S.V., Nafasov A.E. *Horizontal acoustic barriers for protection from seismic waves.* Advances in Acoustics and Vibration, 2011, Vol.2011.
7. Ivanov V.A., Pajmushin V.N. *Utochnennaya postanovka dinamicheskikh zadach trekhslonnykh obolochek s transversalno-myagkim zapolnitelem chislenno-analiticheskij metod ikh resheniya [Refined formulation of dynamic problems for*

*three-layer shells with a transversely soft filler numerical-analytical method for their solution*]. Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika, 1995, Vol.36, No.4, Pp.147-151.

8. Gorshkov A.G., Medvedskij A.L., Rabinskij L.N., Tarlakovskij D.V. *Volny v sploshnykh sredakh [Waves in continuous media]*. Uchebnoe posobie. Dlya vuzov. Moskva, FIZMATLIT, 2004, 472 p.
9. Sneddon I. *Preobrazovaniya Fure [Fourier transforms]*. Moskva, IL, 1955, 667 p.
10. Lokteva N.A. *The vibration insulation properties of a plate in an elastic medium under the influence of different types of waves*. Modeling of the Soil-Structure Interaction: Selected Topics. Mechanical Engineering Theory and Applications. United States, United States, 2020, Pp.2.
11. Pshenichnov S.G. *Nestacionarnye dinamicheskie zadachi linejnoy vyazkouprugosti [Nonstationary dynamic problems of linear viscoelasticity]*. Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela, 2013, No.1, Pp.84-96.
12. Pshenichnov S.G. *Dinamicheskie zadachi linejnoy vyazkouprugosti dlya kusochno-odnorodnykh tel [Dynamical problems of linear viscoelasticity for piecewise homogeneous bodies]*. Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela, 2016, No.1, Pp.79-89.
13. Pshenichnov S.G. *Dynamic linear viscoelasticity problems for piecewise homogeneous bodies*. Mechanics of Solids, 2016, Vol.51, No.1, Pp.65-74.
14. Igumnov L.A., Litvinchuk S.Yu., Belov A.A. *Chislennoe obrashchenie preobrazovaniya Laplasa [Numerical inversion of the Laplace transform]*. 2010.
15. *Svod pravil po proektirovaniyu i stroitelstvu SP 23-105-2004 "Ocenka vibracii pri proektirovanii i stroitelstve i ehkspluatacii ob"ektov metropolitenA" [Set of rules for design and construction SP 23-105-2004 "Vibration assessment in the design and construction and operation of metro facilities"]*. Moskva, GOSSTROJ ROSSII, 2014.

Поступила в редакцию 7 января 2021 года.

---

Сведения об авторах:

Локтева Наталья Александровна – к.т.н., доц., Кафедра «Сопrotивление материалов, динамика и прочность машин», ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия; e-mail: [nlok@rambler.ru](mailto:nlok@rambler.ru)

Нгуен Зьонг Фунг – асп., Кафедра «Сопrotивление материалов, динамика и прочность машин», ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия; e-mail: [nguyenduongphung1993@gmail.com](mailto:nguyenduongphung1993@gmail.com)