

УДК 531.3

DOI 10.33113/mkmk.ras.2021.27.01.065_072.05

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ КОМПОЗИТНЫХ БАЛОК С УЧЁТОМ ДЕМПФИРОВАНИЯ НЕЛОКАЛЬНОГО ВО ВРЕМЕНИ

Сидоров В.Н.^{1,2}, Бадина Е.С.¹¹*Российский университет транспорта (РУТ (МИИТ)), г. Москва, Россия*²*Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия*

АННОТАЦИЯ

Статья посвящена конечно-элементному моделированию затухающих колебаний изгибаемых стержневых элементов, выполненных из материалов со сложной внутренней структурой. При моделировании методом конечных элементов учитываются внешнее демпфирование (трение о внешнюю среду) и внутреннее демпфирование (внутреннее трение). Внешнее демпфирование принимается локальным, то есть зависящим от скорости перемещения в рассматриваемой точке только в текущий момент времени, а внутреннее демпфирование – нелокальным во времени, то есть зависящим от скоростей перемещений на предыдущих временных шагах. В отличие от модели демпфирования нелокальной по координате, модель демпфирования нелокальная по времени может быть сравнительно легко встроена в алгоритм метода конечных элементов. Для решения уравнения равновесия балочного элемента в движении используется метод центральных разностей. При этом непрерывное ядро оператора внутреннего демпфирования заменяется его дискретным аналогом. Модель колебаний балки с учётом нелокального демпфирования реализована в программном комплексе MATLAB. В качестве численного примера рассматриваются колебания балки, выполненной из терморезистивного винилэфирного стеклопластика. Параметры управляемой нелокальной модели подобраны с использованием метода наименьших квадратов по данным численного эксперимента, выполненного в верифицированном расчётном комплексе SIMULIA Abaqus CAE с учётом ортотропных свойств материала балки. Показано преимущество использования более гибкой нелокальной модели вместо локальной (основанной на гипотезе Фойгта) при моделировании колебаний балки, выполненной из ортотропного материала, в случаях, когда предпочтительным является применение одномерных моделей.

Ключевые слова: нелокальное демпфирование; колебания балок; композитные материалы; нелокальная механика; метод конечных элементов

FINITE ELEMENT MODELLING OF COMPOSITE BEAMS VIBRATION TAKING INTO ACCOUNT DAMPING NONLOCAL IN TIME

Sidorov V.N.^{1,2}, Badina E.S.¹¹*Russian University of Transport (RUT (MIIT), Moscow, Russia*²*Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia*

ABSTRACT

The paper is devoted to finite element modelling of the beam vibration process, taking into account the complex internal structure of the material. In the finite element model of the beam external damping (air damping) and internal damping are taken into account. The external part of the damping forces is considered local, i.e. depending on the velocity of element nodes only at the current moment. Internal damping is considered nonlocal in time, i.e. depending on the velocities on the vibration time history. Unlike the nonlocal in space damping model nonlocal in time model can be easily integrated to the finite element analysis algorithm. The central differences method is used to solve the dynamic equilibrium equation and the continuous internal damping kernel function is replaced by its discrete equivalent. The beam vibration model considering nonlocal damping is implemented in MATLAB. The damping of glass-fiber reinforced plastic beam element vibrations is considered in this paper as the numerical example. The parameters of nonlocal model are determined with the least squares method using numerical simulation data obtained in SIMULIA Abaqus CAE. The advantage of flexible nonlocal damping model over the local one (Kelvin-Voight model) is shown for the orthotropic beam vibration simulation in cases when the one-dimensional models are preferable.

Keywords: nonlocal damping; beam vibrations; composite materials; nonlocal mechanics; finite element analysis

ВВЕДЕНИЕ

Композитные и нано-материалы получают всё более широкое распространение в строительной практике. Основной подход к численному моделированию работы конструкций, выполненных из таких материалов, заключается в построении подробных трёхмерных конечно-элементных моделей, позволяющие задать составляющим композитного материала различные физические характеристики и учесть анизотропные свойства.

В этой работе применён подход, применимый в случаях, когда по сравнению с подробным трёхмерным моделированием более целесообразным оказывается использование более простых, например, плоских расчётных моделей. В таких случаях важно выбрать модель достаточно гибкую и управляемую для того, чтобы адекватно описывать работу конструкций из материалов с развитой внутренней структурой. При моделировании затухающих колебаний в качестве таких моделей могут быть использованы модели нелокального демпфирования.

Модель демпфирования нелокальная по координате рассматривается в работах [1-4]. Предполагается, что демпфирование в некоторой точке стержня с координатой x_1 , отсчитываемой вдоль его оси, зависит не только от локального значения скорости изменения деформаций в той же точке $\dot{\epsilon}(x_1)$, но и от значения скоростей изменения деформаций в соседних точках на некоторой области, прилегающей к рассматриваемой точке.

Несмотря на то, что модель демпфирования нелокальная по координате показывает хорошее соответствие результатам численного эксперимента [4], её затруднительно реализовать в конечно-элементных моделях динамического поведения конструкций из-за того, что функция влияния демпфирующих параметров точек друг на друга может «перешагивать» через границы соседних элементов.

Так как метод конечных элементов является преобладающим при расчёте инженерных сооружений, возникает необходимость поиска управляемой модели

внутреннего трения, которую было бы удобно применять при конечно-элементном моделировании.

Известны эффективные результаты аналитического решения задач о колебаниях элементов строительных конструкций с учетом нелокальности диссипативных свойств во времени [5]. Кроме этого, в [5] отмечается, что наиболее точного соответствия результатов математического моделирования экспериментальным данным позволяет добиться одновременный учёт внешнего и внутреннего демпфирования в модели.

В настоящей работе рассматривается численная динамическая модель демпфирования, где учитываются потери на внутреннее и внешнее трение, причём используется модель внутреннего трения нелокальная по временной координате, встроенная в алгоритм метода конечных элементов, и называемая в дальнейшем «демпфированием с памятью».

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В численной модели динамического поведения конструкции принимается, что внутреннее демпфирование колеблющейся конструкции в текущий момент времени t зависит не только от мгновенного значения скорости движения в этот момент времени $\dot{v}(t)$, но и от значения скоростей в предыдущие моменты времени τ . Причем влияние значения скорости в некоторый момент времени τ тем меньше, чем больше временной промежуток между ним и текущим моментом t .

В алгоритме метода конечных элементов уравнение равновесия конструкции, деформируемой в движении, имеет вид [6]

$$M \cdot \ddot{\bar{V}}(t) + D_{int} \cdot \dot{\bar{V}}(t) + D_{ext} \cdot \dot{\bar{V}}(t) + K \cdot \bar{V}(t) = \bar{F}(t). \quad (1)$$

Здесь t – текущий момент времени, $v(t)$ – перемещения рассматриваемой точки под воздействием внешних сил, точка над именем функции означает операцию производной над этой функцией по времени t , K – матрица жёсткости конечно-элементной расчётной модели, D_{int} и D_{ext} – матрицы внутреннего и внешнего демпфирования расчётной модели соответственно, M – матрица масс расчётной модели, $\bar{F}(t)$ – вектор внешних силовых воздействий.

Матрицы D_{int} и D_{ext} строятся из условий стационарности выражения изменения полной энергии деформируемой системы, включающего функцию рассеяния энергии из-за внутреннего трения в материале $\frac{1}{2} d_{int} \cdot \dot{\varepsilon}^2$ (где ε – деформации материала конструкции), а также функцию рассеяния энергии за счет внешнего трения $\frac{1}{2} d_{ext} \cdot \dot{v}^2$ (диссипативную функцию Рэлея).

Чтобы построить модель внутреннего демпфирования с памятью, представим уравнение (1) в виде

$$M \cdot \ddot{\bar{V}}(t) + D_{int} \cdot \int_0^t G(t-\tau) \cdot \dot{\bar{V}}(\tau) d\tau + D_{ext} \cdot \dot{\bar{V}}(t) + K \cdot \bar{V}(t) = \bar{F}(t). \quad (2)$$

Здесь $G(t-\tau)$ – ядро оператора внутреннего демпфирования. Эта функция описывает убывание влияния скорости изменения деформаций в предшествующие моменты времени τ на демпфирование в текущий момент t , причём

$$\int_0^t G(t-\tau) d\tau = 1. \quad (3)$$

В качестве ядровой функции в настоящей работе используется функция ошибок, которая, при соблюдении условия (3), имеет вид

$$G(t-\tau) = \frac{2\mu}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\mu^2(t-\tau)^2}, \quad (4)$$

Здесь μ – параметр, характеризующий масштаб нелокальности демпфирования материала.

2. ПРИМЕР ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

В качестве примера рассмотрим динамическое поведение изгибаемой балки длиной 6.0 м прямоугольного поперечного сечения, выполненной из термореактивного винилэфирного стеклопластика I класса. Балка жёстко заделана по концам и загружена мгновенно приложенной равномерно распределённой нагрузкой интенсивностью $q = 10$ кН/м.

Характеристики термореактивного винилэфирного стеклопластика определялись экспериментально в работах [7-9] и приведены в таблице 1.

Таблица 1.

Модуль Юнга в продольном направлении, E_{lw}	17,2 ГПа
Модуль Юнга в поперечном направлении, E_{cw}	12,2 ГПа
Коэффициент Пуассона в продольном направлении, μ_{lw}	0,32
Коэффициент Пуассона в поперечном направлении, μ_{cw}	0,15
Плотность материала, ρ	1,9 кН/м ³
Коэффициент внутреннего демпфирования, d_{int}	0,042
Коэффициент внешнего демпфирования, d_{ext}	0,0009

Коэффициент внешнего демпфирования определялся по формуле Ньюэлла [10].

Для решения уравнения динамического равновесия используем метод центральных разностей [6]. Для этого участвующие в (1) и (2) первую и вторую производные по времени от вектора перемещений $\bar{V}(t)$ аппроксимируем центральными конечными разностями.

Тогда матричное уравнение (1) принимает вид

$$\frac{1}{\Delta t^2} \cdot M \cdot (\bar{V}_{i+1} - 2\bar{V}_i + \bar{V}_{i-1}) + \frac{1}{2 \cdot \Delta t} \cdot (D_{int} + D_{ext}) \cdot (\bar{V}_{i+1} - \bar{V}_{i-1}) + K \cdot \bar{V}(t) = \bar{F}_i. \quad (5)$$

Чтобы заменить классическую модель внутреннего демпфирования на модель «демпфирования с памятью», представим сначала центральную разность во втором слагаемом левой части (5), отвечающем за внутреннее демпфирование, суммой разностей «вперёд» и разности «назад»

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t^2} \cdot M \cdot (\bar{V}_{i+1} - 2\bar{V}_i + \bar{V}_{i-1}) + \frac{1}{2 \cdot \Delta t} \cdot D_{int} \cdot (\bar{V}_i - \bar{V}_{i-1}) + \\ & + \frac{1}{2 \cdot \Delta t} \cdot D_{int} \cdot (\bar{V}_{i+1} - \bar{V}_i) + \frac{1}{2 \cdot \Delta t} \cdot D_{ext} \cdot (\bar{V}_{i+1} - \bar{V}_{i-1}) + K \cdot \bar{V}(t) = \bar{F}_i. \end{aligned} \quad (6)$$

Второе слагаемое в (6) с разностью «вперёд» оставим без изменений, так как на него функция памяти по понятным причинам не распространяется. Третье слагаемое с разностью «назад» заменим выражением

$$\frac{1}{2 \cdot \Delta t} \cdot D_{int} \cdot (\bar{V}_i - \bar{V}_{i-1}) = \frac{D_{int}}{2} \sum_{j=1}^i \bar{G}(i, j) (\bar{V}_j - \bar{V}_{j-1}), \quad (7)$$

где i – номер шага по времени, соответствующий рассматриваемому моменту времени t , $t = \Delta t \cdot i$, $\tau = \Delta t \cdot j$, $j = 1, 2, \dots$, i – номер шага по времени при вычислении ядра $\bar{G}(i, j)$. При численном интегрировании здесь мы будем использовать шаг $\Delta \tau = \Delta t$.

Слагаемое (7) моделирует «демпфирование с памятью», причём $\bar{G}(i, j)$ – дискретный аналог ядра $G(t - \tau)$ (4), который в случае использования ядра в виде непрерывной функции ошибок вычисляется по формуле

$$\bar{G}(i, j) = \frac{2\mu}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\mu^2 \left(t - \left(\tau - \frac{\Delta t}{2} \right) \right)^2}. \quad (8)$$

В результате таких преобразований выражение (6) примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t^2} \cdot M \cdot (\bar{V}_{i+1} - 2\bar{V}_i + \bar{V}_{i-1}) + \frac{D_{int}}{2} \cdot \bar{Z} + \frac{1}{2 \cdot \Delta t} \cdot D_{int} \cdot (\bar{V}_{i+1} - \bar{V}_i) + \\ & + \frac{1}{2 \cdot \Delta t} \cdot D_{ext} \cdot (\bar{V}_{i+1} - \bar{V}_{i-1}) + K \cdot \bar{V}(t) = \bar{F}_i, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\bar{Z} = \frac{2\mu}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\mu^2 \left(t - \left(\tau - \frac{\Delta t}{2} \right) \right)^2} (\bar{V}_i - \bar{V}_{i-1}). \quad (10)$$

После преобразований (9) получим вычислительную схему для последовательного пошагового вычисления \bar{V}_{i+1} через вектора \bar{V}_i и \bar{V}_{i-1}

$$\bar{V}_{i+1} = Q \cdot \bar{F}_i - Q_1 \cdot \bar{V}_i - Q_2 \cdot \bar{V}_{i-1} - Q_3 \cdot \bar{Z}. \quad (11)$$

Здесь

$$\begin{aligned} Q &= \left(\frac{1}{\Delta t^2} M + \frac{1}{2 \cdot \Delta t} D_{int} + \frac{1}{2 \cdot \Delta t} D_{ext} \right)^{-1}, \quad Q_1 = Q \cdot \left(-\frac{2}{\Delta t^2} M - \frac{1}{2 \cdot \Delta t} D + K \right), \\ Q_2 &= Q \cdot \left(\frac{1}{\Delta t^2} M - \frac{1}{2 \cdot \Delta t} D_{ext} \right), \quad Q_3 = \frac{1}{2} Q \cdot D_{int}. \end{aligned} \quad (12)$$

На первом шаге при $i=1$ примем в качестве начальных условий $\bar{V}_0 = 0$ и $\bar{V}_1 = 0$.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Параметр μ характеризует степень нелокальности демпфирования материала. Чем μ выше, тем ближе модель к локальной, при малых значениях μ материал обладает значительной степенью нелокальности во времени.

Для подбора этого параметра на основании данных численного эксперимента применялась методика с использованием метода наименьших квадратов [4]. Для этого была сформирована трёхмерная конечно-элементная модель рассматриваемого стержневого элемента в верифицированном расчётном программном комплексе SIMULIA Abaqus CAE. Полученные данные были импортированы в программный комплекс MATLAB, где была реализована конечно элементная модель колеблющейся балки с учётом демпфирования с памятью.

Значение подобранного параметра $\mu = 0.1$ 1/с. Графики зависимости перемещения среднего сечения стержня от времени приведены на рис.1.

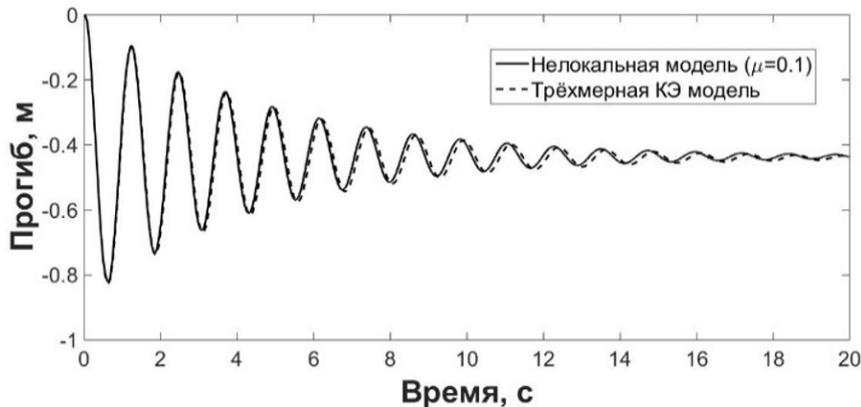


Рис.1. Сравнение с данными численного эксперимента результатов, полученных с использованием откалиброванной нелокальной модели.

Относительно прогиба в момент времени 20 с среднеквадратическая ошибка составила 4%.

На рис.2 приведено сравнение графика перемещения среднего узла, полученного с использованием классической локальной одномерной модели с данными, полученными в Abaqus.

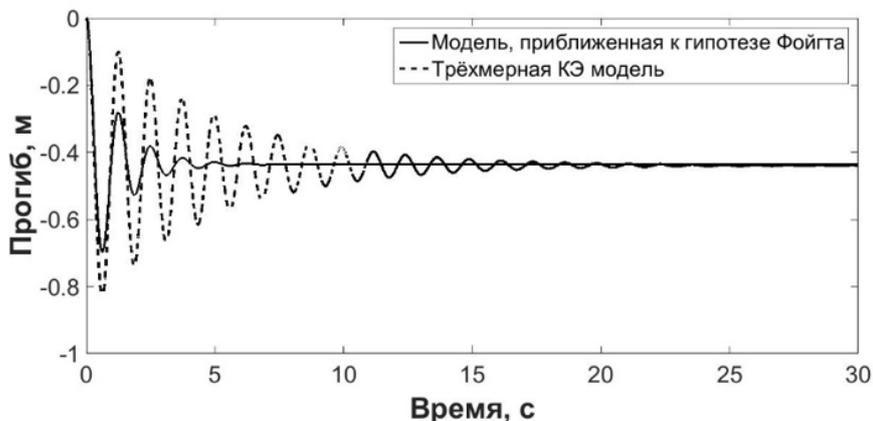


Рис.2. Сравнение с данными численного эксперимента результатов, полученных с использованием классической модели внутреннего трения.

В этом случае относительная среднеквадратическая ошибка составила 16.7%.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленная в статье модель даёт возможность использовать одномерные модели балочных элементов при динамическом расчёте конструкций из современных композитных материалов, обладающих ортотропными свойствами.

Откалиброванная с использованием метода наименьших квадратов модель демпфирования с памятью позволяет с удовлетворительной точностью аппроксимировать данные численного эксперимента.

В сравнении с моделью внутреннего трения, нелокального по координате, модель демпфирования с памятью может быть органично встроена в алгоритм метода конечных элементов, что делает сравнительно несложным её применение для численного решения прикладных задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lei Y., Friswell M.I., Adhikari S. *A Galerkin Method for Distributed Systems with Non-local Damping* // Intern. J. of Solids and Structures. – 2006. – Vol.43. – Pp.3381-3400.
2. Потапов В.Д. *Устойчивость стержней при стохастическом нагружении с учетом нелокального демпфирования* // Проблемы машиностроения и теории надежности. – 2012. – №4. – С.25-31.
3. Fyodorov V.S., Sidorov V.N., Shepitko E.S. *Nonlocal damping consideration for the computer modelling of linear and nonlinear systems vibrations under the stochastic loads* / IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering – 2018 – Vol.456. – 012040.
4. Shepitko E.S., Sidorov V.N. *Defining of nonlocal damping model parameters based on composite beam dynamic behaviour numerical simulation results* / IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. – 2019. – Vol.675. – 012056.
5. Banks H.T., Inman D.J. *On damping Mechanisms in Beams* // J. of Applied Mechanics. – 1991. – Vol.58(3). – Pp.716-723.
6. Бате К.-Ю., Вилсон Э.Л. *Численные методы анализа и метод конечных элементов*. – М.: Стройиздат, 1982. – 447 с.
7. Landherr J.C. *Dynamic analysis of a FRP deployable box beam* / Master of Applied Science Thesis. – Kingston: Queen's University, 2008.
8. Lim R.A. *Structural monitoring of a 10m fibre reinforced polymer bridge subjected to severe damage*. – Kingston: Queen's University, 2016.
9. Xie A. *Development of an FRP Deployable Bridge* // Master of Applied Science Thesis, Department of Civil Engineering, Royal Military College of Canada – 2007.
10. Sumali H., Carne T. *Air Damping on Micro-Cantilever Beams* / Proc. of the Intern. Modal Analysis Conference. – 2008.

REFERENCES

1. Lei Y., Friswell M.I., Adhikari S. *A Galerkin Method for Distributed Systems with Non-local Damping*. Intern. J. of Solids and Structures, 2006, Vol.43, Pp3381-3400.

2. Potapov V.D. *On the stability of columns under stochastic loading taking into account nonlocal damping*. J. of machinery manufacture and reliability, 2012, Vol.41, No.4, Pp.284-290.
3. Fyodorov V.S., Sidorov V.N., Shepitko E.S. *Nonlocal damping consideration for the computer modelling of linear and nonlinear systems vibrations under the stochastic loads*. IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering, 2018, Vol.456, 012040.
4. Shepitko E.S., Sidorov V.N. *Defining of nonlocal damping model parameters based on composite beam dynamic behaviour numerical simulation results*. IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering, 2019, Vol.675, 012056.
5. Banks H.T., Inman D.J. *On damping Mechanisms in Beams*. J. of Applied Mechanics, 1991, Vol.58(3), Pp.716-723.
6. Bathe K.-J., Wilson E.L. *Chislennyye metody analiza i metod konechnykh ehlementov [Numerical methods in finite element analysis]*. Moskva, Strojizdat, 1982, 447 p.
7. Landherr J. C. *Dynamic analysis of a FRP deployable box beam*. Master of Applied Science Thesis. Kingston, Queen's University, 2008.
8. Lim R.A. *Structural monitoring of a 10m fibre reinforced polymer bridge subjected to severe damage*. Kingston, Queen's University, 2016.
9. Xie A. *Development of an FRP Deployable Bridge*. Master of Applied Science Thesis. Department of Civil Engineering, Royal Military College of Canada, 2007.
10. Sumali H., Carne T. *Air Damping on Micro-Cantilever Beams*. Proc. of the Intern. Modal Analysis Conference, 2008.

Поступила в редакцию 02 февраля 2021 года.

Сведения об авторах:

Сидоров Владимир Николаевич – д.т.н., проф., Российский университет транспорта (РУТ (МИИТ)), г. Москва, Россия; e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

Бадина Елена Сергеевна – к.т.н., доц., Российский университет транспорта (РУТ (МИИТ)), г. Москва, Россия; e-mail: shepitko-es@mail.ru