

УДК 539.42

DOI 10.33113/mkmm.ras.2021.27.02.147\_168.01

## МОДЕЛЬ ПЕРЕНОСА ИМПУЛЬСА ПРИ ВЫСОКОСКОРОСТНОМ УДАРЕ

Головешкин В.А.<sup>1,2</sup>, Мягков Н.Н.<sup>2</sup><sup>1</sup>Московский технологический университет, г. Москва, Россия<sup>2</sup>ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

### АННОТАЦИЯ

Построена аналитическая механическая модель эжекции, возникающей при высокоскоростном ударе жесткого ударника по полубесконечной преграде, и дана оценка массы эжекции и эффекта усиления импульса, передаваемого преграде при ударе. Эффект усиления импульса вызван выбросом (эжекцией) фрагментов преграды в направлении, противоположном направлению полета ударника. В настоящее время проявляется устойчивый интерес к исследованию этого эффекта. Это связано, в частности, с возможным применением эффекта для отклонения потенциально опасного объекта (астероида), сближающегося с Землей, посредством ударного космического аппарата, использующего эффект усиления импульса. Модель, представленная в настоящей работе, построена в приближении плоской деформации с использованием минимального числа параметров материалов ударника и преграды. Получены уравнения для массы эжекции и приращения импульса преграды, в зависимости от глубины внедрения ударника. Модель учитывает зависимость угла вылета эжекционных фрагментов от глубины внедрения ударника. Показано, что модель адекватно описывает импульс эжекции, скорость изменения импульса эжекции и массу эжекции в зависимости от глубины проникания ударника. Проверяется возможность представления импульса и массы эжекции скейлинговыми соотношениями как для отношения плотностей ударника и преграды,  $\rho_p/\rho_t$ , так и для динамического параметра  $\gamma = \rho_t V_0^2 / Y_t$  ( $V_0$  – скорость удара,  $Y_t$  – предел текучести преграды), в которых коэффициент пропорциональности зависит только от формы ударника. Найдено, что скейлинг по динамическому параметру  $\gamma$  имеет место при  $\gamma > \gamma_c$ , где  $\gamma_c \approx 330$ , которое, например, для алюминия дает переходное значение  $V_{0c} = 2.5$  км/с.

**Ключевые слова:** высокоскоростной удар; эффект усиления импульса; эжекция; аналитическая модель

## MODEL OF MOMENTUM TRANSFER IN HYPERVELOCITY IMPACT

Goloveshkin V.A.<sup>1,2</sup>, Myagkov N.N.<sup>2</sup><sup>1</sup>MIREA – Russian Technological University, Moscow, Russia<sup>2</sup>Institute of Applied Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

### ABSTRACT

An analytical mechanical model of the ejection arising from a high-velocity impact of a rigid projectile on a semi-infinite target is constructed, and an estimate is given of the ejection mass and the effect of momentum amplification transmitted to the target upon impact. The effect of the momentum amplification is caused by the ejection of target fragments in the

direction opposite to the direction of flight of the projectile. At present, there is a steady interest in the study of this effect. This is due, in particular, to the possible use of the effect for deflecting a potentially dangerous object (asteroid) approaching the Earth by means of an impact spacecraft using the effect of momentum amplification. The model presented in this work is constructed in approximation of plane deformation using the minimum number of parameters of the projectile and target materials. Equations for the mass of the ejection and the increment of the target momentum are obtained, depending on the depth of penetration of the projectile. The model takes into account the dependence of the emission angle of the ejection fragments on the penetration depth of the projectile. It is shown that the model adequately describes the ejection momentum, the rate of change in the ejection momentum, and the ejection mass depending on the penetration depth of the projectile. The possibility of representing the momentum and mass of the ejection by scaling ratios is checked both for the ratio of the densities of the projectile and the target  $\rho_p/\rho_t$ , and for the dynamic parameter  $\gamma = \rho_t V_0^2 / Y_t$  ( $V_0$  – impact velocity,  $Y_t$  – yield stress of the target), in which the proportionality coefficient depends only on the shape of the projectile. It was found that scaling with respect to the dynamic parameter  $\gamma$  takes place at  $\gamma > \gamma_c$ , where  $\gamma_c \approx 330$  that, e.g., for aluminum gives the value  $V_{0c} = 2.5$  km/s.

**Keywords:** high-speed impact; momentum transfer effect; fragments ejection; analytical model

## ВВЕДЕНИЕ

Высокоскоростной удар по твердой преграде обычно характеризуются значительным выбросом фрагментов, как по направлению движения ударника, так и в противоположном направлении [1,2]. Для толстых преград этот процесс вызывает эффект, который состоит в усилении импульса преграды по направлению удара. То есть импульс, передаваемый телу, превышает исходный импульс ударника. Эффект вызван выбросом (эжекцией) фрагментов преграды в направлении, противоположном направлению полета ударника. Явление эжекции наблюдается как для пластичных материалов [2,3,6,7], так и для хрупких материалов [2,4,5]. В настоящее время проявляется устойчивый интерес к исследованию этого эффекта (см., например, недавние работы [3-6]). Это связано, в частности, с возможным применением эффекта для отклонения потенциально опасного объекта (астероида), сближающегося с Землей, посредством ударного космического аппарата, использующего эффект усиления импульса [5].

Эффективность передачи импульса часто в литературе характеризуют безразмерной величиной, которую называют «коэффициентом усиления импульса», обозначающую отношение изменения импульса преграды после удара и импульса ударника

$$B = \frac{\Delta P_t}{P_p} = 1 + \frac{P_e}{P_p} \quad (1)$$

где  $\Delta P_t$  обозначает приращение импульса мишени, а  $P_e$  и  $P_p$  обозначают импульс эжекции и импульс ударника, соответственно. Таким образом, из (1) видим, что для данного  $P_p$ , коэффициент  $B$  зависит от массы и скорости эжектируемого материала.

Измерения передачи импульса посредством высокоскоростных ударных экспериментов было выполнено в ряде работ в прошлом и в настоящее время.

Тестировались металлические мишени [3,6] и мишени из геоматериалов [4,5]. В настоящее время, также, доступно численное моделирование эжекции при ударном взаимодействии тел (см. например, [3]).

Тем не менее, для инженерных приложений представляет интерес построение аналитических механических моделей эжекции, использующих минимальное число параметров материалов ударника и преграды. Попытка построения такой модели сделана в настоящей работе.

Как отмечалось выше, эффект усиления импульса преграды вызывается эжекцией фрагментов преграды. Кроме того, возможное практическое применение эффекта усиления импульса подразумевает, что масса ударного летательного аппарата будет много меньше массы астероида. В связи со сказанным, можно пренебречь фрагментацией ударника, рассматривая его как жесткое тело, и рассматривать только фрагментацию массивной преграды, которая заключается в эжекции фрагментов преграды в направлении, противоположном направлению полета ударника.

В настоящей работе построена аналитическая механическая модель эжекции, возникающей при высокоскоростном ударе жесткого ударника по полубесконечной преграде, и дана оценка массы эжекции и эффекта усиления импульса, передаваемого при ударе. Модель построена в приближении плоской деформации с использованием минимального числа параметров материалов ударника и преграды. Она является модификацией модели, опубликованной авторами ранее в работе [8], поэтому значительная часть материала вынесена в приложения, чтобы избежать повтора довольно громоздких математических выкладок.

## 1. МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЖЕСТКОГО УДАРНИКА С ДЕФОРМИРУЕМОЙ ПРЕГРАДОЙ

### 1.1. Постановка задачи.

Сплошная преграда рассматривается как жестко-идеально-пластичное полупространство, материал которого определяется двумя параметрами – плотностью  $\rho_t$  и пределом текучести  $Y_t$ . Ударник, как полагается, состоит из несжимаемого недеформируемого материала с плотностью  $\rho_p$  и массой на единицу длины  $M$ . Задача рассматривается как двумерная в приближении плоского деформированного состояния (рис.1). Полагаем, что в начальный момент и последующие моменты времени вектор скорости ударника перпендикулярен поверхности преграды. Считаем, что деформация совершается в плоскости  $XU$ . Сечение ударника данной плоскостью имеет форму прямоугольника. Ось  $X$  проходит по начальной недеформированной поверхности. Начало оси  $U$  лежит на той же поверхности. Текущая глубина проникания принимается равной  $h$  (относительно нулевого уровня  $U = 0$ ). В силу плоского характера деформации в дальнейшем все величины будут приводиться на единицу длины в направлении перпендикулярном плоскости  $XU$ . Поперечный размер ударника равен  $2l$ . Массу ударника на единицу длины принимаем равной  $M$ .

Выполним анализ размерности поставленной задачи. Кроме перечисленных выше параметров  $\rho_p$ ,  $\rho_t$ ,  $Y_t$ ,  $2l$  и  $M$ , в задачу входит начальная скорость ударника

$V_0$ . Заметим, что параметры  $\rho_t$ ,  $Y_t$  и  $V_0$  не являются размерно-независимыми и из них нельзя извлечь параметр длины. Тогда решение задачи (например, безразмерный импульс эжекции  $P_e/P_p$ , где  $P_p = MV_0$  – импульс ударника на единицу длины) зависит от безразмерных параметров задачи следующим образом

$$\frac{P_e}{MV_0} = F_e \left( \frac{\rho_t V_0^2}{Y_t}, \frac{\rho_p}{\rho_t}, \frac{M}{\rho_p l^2} \right), \quad (2)$$

т.е. зависимость от скорости удара и предела текучести преграды входит только через безразмерный параметр  $\frac{\rho_t V_0^2}{Y_t}$ . Второй параметр в правой части (2) дает зависимость решения от отношения плотностей ударника и преграды, третий параметр – зависимость от формы ударника. Зависимость аналогичная (2) имеет место также и для безразмерной массы эжекции  $M_R/M$ .

Как отмечалось во введении, эффективность передачи импульса часто в литературе характеризуют «коэффициентом усиления импульса»  $1 + P_e/P_p$  (1). Мы же эффективность передачи импульса будем характеризовать безразмерным импульсом эжекции  $P_e/P_p$ , который является приращением импульса преграды при ударе.

Зависимость (2) можно упростить, если предположить неполную автомодельность (2) по параметрам  $\frac{\rho_t V_0^2}{Y_t}$  и  $\frac{\rho_t}{\rho_p}$  (о неполной и полной автомодельности см. [9]), т.е.

$$\frac{P_e}{P_p} \sim \left( \frac{\rho_t V_0^2}{Y_t} \right)^{\delta_1} \left( \frac{\rho_p}{\rho_t} \right)^{\delta_2}, \quad (3)$$

где  $\delta_i$  – постоянные параметры. Представление импульса эжекции в форме (3) было, по-видимому, впервые дано в работе [5] и использовалось затем для интерпретации экспериментов (например, в работе [4]). Результаты, полученные в настоящей работе, будут проверены на предмет соответствия масштабному соотношению вида (3) как для импульса эжекции, так и для массы эжекции.

## 1.2. Модель.

Схема взаимодействия ударника и преграды, аналогичная, представленной в [8], показана на рис.1.

Рассмотрим следующую схему поля скоростей (поле скоростей симметрично относительно оси  $Y$ ). Скорость ударника принимаем равной  $V$ , в начальный момент  $V = V_0$ .

Зона I. Сегмент круга  $A_1BA$ . Материал преграды «прилипший» к ударнику и движущийся вместе с ним как жесткое тело. Размеры сегмента – угол  $\beta$  и, следовательно, положение центра  $O_1$  определяются в процессе решения. Соответствующие скорости в зоне 1 равны  $u_x = 0$ ,  $u_y = V$ . На границах всех зон предполагается условие непрерывности нормальной составляющей скорости.

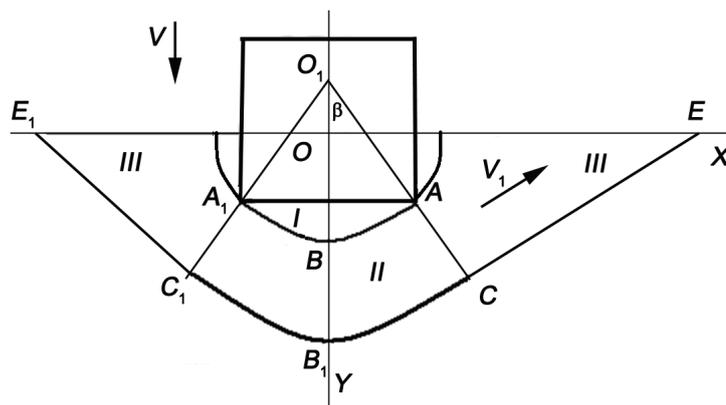


Рис.1. Чертеж к задаче о внедрении ударника в преграду.

Зона II. Сектор кольца  $A_1BAC_1C_1$  с центром в  $O_1$ . Его размеры определяются в процессе решения. Полагаем  $O_1A = a$ ,  $O_1C = b$ . В локальной полярной системе координат  $(r, \varphi)$  с центром в  $O_1$ , (полярная ось совпадает с осью  $Y$ ) принимается гипотеза, что скорость  $u_\varphi$  зависит только от угла  $\varphi$ , то есть  $u_\varphi = f(\varphi)$ . Тогда в силу условия несжимаемости имеем

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = 0.$$

Дальнейшее решение данного уравнения приведено в [8] и там же получены значения скоростей

$$u_r = \frac{Va}{b-a} \frac{b-r}{r} \cos \varphi, \quad u_\varphi = \frac{Va}{b-a} \sin \varphi. \quad (4)$$

Зона III. Двигается как жесткое тело в направлении  $CE$  перпендикулярном  $AC$ , и составляющем угол  $\beta$  с осью  $X$ , со скоростью  $V_1$ . Заметим, что данный угол является углом эжекции фрагментов, выбиваемых ударником из преграды. В силу непрерывности нормальной скорости на  $AC$  имеем

$$V_1 = \frac{Va}{b-a} \sin \beta. \quad (5)$$

Предполагается, что фрагменты, вышедшие за начальный уровень недеформированной поверхности, покидают систему и в дальнейшем процессе не участвуют.

Для решения данной задачи использовалась следующая схема решения. Строится поле течения, которое обеспечивает минимальную потерю кинетической энергии системы, что равносильно минимуму мощности внутренних сил. Далее закон сохранения энергии используется для построения уравнения движения, которое позволяет определять параметры  $x = \frac{b}{a}$  и  $\beta$  как функцию только глубины проникания  $h$ .

Кинетическая энергия системы  $E$  (на единицу длины) состоит из следующих составляющих:  $E_1$  – кинетическая энергия ударника;  $E_2$  – кинетическая энергия сегмента круга  $A_1BA$ ;  $E_3$  – кинетическая энергия сектора кольца  $A_1BAC_1C_1$ ;  $E_4$  – кинетическая энергия зоны 3. При вычислении  $E_4$  мы должны учесть, что часть массы этой зоны, ограниченной линией  $E_1C_1A_1ACE$ ,

ушла на формирование оторвавшихся (эжекционных) фрагментов. Предполагаем, что вся масса преграды, оказавшаяся выше начального уровня  $Y = 0$ , идет на формирование эжекции, которая покидает преграду и в дальнейшем процессе не участвует. Энергию разрушения при вычислении  $E_4$  мы не учитывали.

Полная кинетическая энергия  $E$  равна

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + E_4. \quad (6)$$

Вычисление полной кинетической энергии приведено в приложении 1. Соответствующее выражение имеет вид

$$E = \frac{1}{2} V^2 \left[ M - M_R \frac{\sin^2 \beta}{(x-1)^2} + \rho_l l^2 F(x, \bar{h}, \beta) \right], \quad (7)$$

где  $x = \frac{b}{a}$ ,  $\bar{h} = \frac{h}{l}$  (здесь и далее черту опускаем),  $M_R$  – масса эжекционных фрагментов

$$F(x, h, \beta) = \frac{\left( \beta - \frac{1}{2} \sin 2\beta \right)}{\sin^2 \beta} + \frac{1}{(x-1)^2 \sin^2 \beta} \left\{ \beta \left[ x^2 \ln x - (x-1)^2 \right] + \frac{1}{2} \sin 2\beta \left[ x^2 \ln x - 2x(x-1) \right] \right\} + \frac{\sin^2 \beta}{(x-1)^2} \left\{ 2h + 2h(x-1) + (x-1)^2 \operatorname{ctg} \beta + \left[ h + (x-1) \operatorname{ctg} \beta \right]^2 \operatorname{ctg} \beta \right\}. \quad (8)$$

Мощность внутренних сил  $W$  состоит из следующих составляющих:  $W_1$  – мощность в деформируемой зоне сектора кольца  $A_1 B A C B_1 C_1$ ;  $W_2$  – мощность на разрыве касательной скорости на линии  $A_1 B A$ ;  $W_3$  – мощность на разрыве касательной скорости на линии  $C_1 B_1 C$ ;  $W_4$  – мощность на разрыве касательной скорости на линиях  $C_1 E_1, E C$ ;  $W_5$  – мощность на разрыве касательной скорости на линиях  $C_1 A_1, A C$ . Вычисление полной мощности приведено в приложении 2. Полную мощность

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5$$

представим в виде

$$W = \frac{2Y_l V}{\sqrt{3}} l G(x, h, \beta), \quad (9)$$

где

$$G(x, h, \beta) = \frac{x}{x-1} \ln x \left( \frac{13}{8} \frac{\beta}{\sin \beta} + \frac{3}{8} \cos \beta + \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \right) + \left( \frac{x+1}{x-1} \right) \frac{1 - \cos \beta}{\sin \beta} + \frac{h}{x-1}. \quad (10)$$

Значения  $x, \beta$  определяются из условия минимума мощности внутренних сил. Следовательно, зависимость угла  $\beta$  от глубины проникания  $h$  можно определять независимо от уравнения движения. Согласно (10)

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \left[ \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} \ln x \right] \left( \frac{13}{8} \frac{\beta}{\sin \beta} + \frac{3}{8} \cos \beta + \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \right) - \frac{2}{(x-1)^2} \frac{1 - \cos \beta}{\sin \beta} - \frac{h}{(x-1)^2}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \beta} = \frac{x}{x-1} \ln x \left( \frac{13 \sin \beta - \beta \cos \beta}{8 \sin^2 \beta} - \frac{3}{8} \sin \beta - \frac{1}{\sin^2 \beta} \right) + \left( \frac{x+1}{x-1} \right) \frac{1 - \cos \beta}{\sin^2 \beta}. \quad (12)$$

*Утверждение 1.* Функция  $G(x, h, \beta)$  для каждого значения  $h > 0$  имеет в области  $x > 1$ ,  $0 < \beta < \pi/2$  единственную точку минимума  $x(h)$ ,  $\beta(h)$  и эта точка определяется решением системы уравнений (13, 14) (доказательство приведено в [8])

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \beta} = 0. \quad (14)$$

Система уравнений (13, 14) определяет функции  $x(h)$ ,  $\beta(h)$ . Подставляя эти функции в соотношения (8) и (10), можно рассматривать  $F(x, h, \beta)$  и  $G(x, h, \beta)$  как функции одной переменной  $h$ . Обозначим

$$\Phi(h) = F[x(h); h; \beta(h)], \quad (15)$$

$$\Omega(h) = G[x(h); h; \beta(h)]. \quad (16)$$

Необходимо отметить, что в предложенной модели значения  $x$ ,  $\beta$ ,  $F$ ,  $G$ , зависят только от глубины внедрения  $h$ , что существенно упрощает аналитическое исследование данной модели. Функции  $\Phi(h) = F[x(h); h; \beta(h)]$  и  $\Omega(h) = G[x(h); h; \beta(h)]$  с приемлемой точностью могут быть аппроксимированы соотношениями (приведено в [8])

$$\Phi(h) \approx \Phi_{AP}(h) = 3.1 + 2 \ln(1+h), \quad \Omega(h) \approx \Omega_{AP}(h) = 5.5 + 1.5 \ln(1+h).$$

## 2. ГЛУБИНА ПРОНИКАНИЯ УДАРНИКА

Баланс энергии системы определяется уравнением

$$\frac{dE}{dt} + W + Q_R = 0, \quad (17)$$

где  $Q_R$  – поток энергии покинувших систему эжекционных фрагментов. Предполагается, что все фрагменты, поднявшиеся за начальный уровень преграды (т.е. имеющие ординату  $Y > 0$ ), покидают систему. Исследование процесса проникания ударника, путем соответствующих преобразований (см. приложение 3), сводится к решению системы уравнений

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} V^2 \left[ M - M_R \frac{\sin^2 \beta}{(x-1)^2} + \rho_t l^2 \Phi(h) \right] \right\} + \frac{2Y_t l^2}{\sqrt{3}} \Omega(h) \frac{dh}{dt} + \frac{dM_R}{dt} \frac{V^2}{2} \frac{1}{(x-1)^2} \sin^2 \beta = 0, \quad (18)$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{V}{l}, \quad (19)$$

$$\frac{dM_R}{dh} = 2\rho_t l \Psi_U(h), \quad (20)$$

где  $\Psi_U(h) = (X^+ - X) f_3(h)$ ,  $f_3(h) = \frac{1}{x-1} \sin^2 \beta$ .

Как показано в Приложении 3 функции  $X(h)$ ,  $X^+(h)$  и  $f_3(h)$  хорошо аппроксимируются следующими соотношениями

$$X^+(h) \approx X^+_{AP}(h) = 2.7 + \frac{3}{4}h, \quad X(h) \approx X_{AP}(h) = 1 + \frac{1}{4} \ln(1+h).$$

$$f_3(h) = \frac{1}{x(h)-1} \sin^2 \beta(h) \approx f_{3AP}(h) = 0.6 \frac{1}{1+h} + 0.4 \frac{\ln(1+h)}{1+h}.$$

Введем безразмерные величины скорости ударника  $u$  и времени  $\tau$ , а также параметры  $\mu$ ,  $\alpha$ ,  $m_R$  и  $c^2$  следующим образом

$$u = \frac{V}{V_0}, \quad \tau = \frac{V_0}{l} t, \quad \mu = \frac{\rho_t l^2}{M}, \quad m_R = \frac{M_R}{\rho_t l^2}, \quad \alpha = \frac{4}{\sqrt{3}} \mu \frac{Y_t}{\rho_t V_0^2}, \quad c^2 = \frac{Y_t}{\rho_t}. \quad (21)$$

Тогда уравнения (18, 19) примут вид

$$\frac{d}{d\tau} \left\{ u^2 \left[ 1 - \mu m_R \frac{\sin^2 \beta}{(x-1)^2} + \mu \Phi(h) \right] \right\} + \alpha \Omega(h) \frac{dh}{d\tau} + \mu \frac{dm_R}{d\tau} u^2 \frac{1}{(x-1)^2} \sin^2 \beta = 0, \quad (22)$$

$$\frac{dh}{d\tau} = u. \quad (23)$$

Согласно (20, 21)

$$\frac{dm_R}{d\tau} = 2u (X^+ - X) \frac{1}{x-1} \sin^2 \beta = 2\Psi_U(h)u. \quad (24)$$

Имеем систему

$$\frac{d}{d\tau} \left\{ u^2 \left[ 1 - \mu m_R f_3(h) + \mu \Phi(h) \right] \right\} + \alpha \Omega(h) \frac{dh}{d\tau} + \mu \frac{dm_R}{d\tau} u^2 f_3(h) = 0, \quad (25)$$

$$\frac{dh}{d\tau} = u,$$

$$\frac{dm_R}{d\tau} = 2\Psi_U(h)u$$

с начальным условием  $u = u_0$ , где  $u_0 = \sqrt{\frac{1}{1 + \mu \Phi(0)}}$ . Видно, что значение  $u_0$  меньше единицы. Это происходит вследствие мгновенного перераспределения

начальной кинетической энергии ударника по всей области течения, так как материал преграды несжимаем,  $m_R = 0$ ,  $h = 0$  при  $\tau = 0$ . Поскольку  $\tau$  явно не входит в уравнение, то неизвестные функции  $u$ ,  $m_R$  можно искать как функции от  $h$ . Имеем систему уравнений

$$\frac{d}{dh} \left\{ u^2 \left[ 1 - \mu m_R f_3(h) + \mu \Phi(h) \right] \right\} + \alpha \Omega(h) + \mu \frac{dm_R}{dh} u^2 f_3(h) = 0, \quad (26)$$

$$\frac{dm_R}{dh} = 2\Psi_U(h) \quad (27)$$

с начальным условием

$$u = u_0, \quad m_R = 0 \quad \text{при} \quad h = 0. \quad (28)$$

Преобразуя (26), получаем

$$2 \left[ 1 - \mu m_R f_3(h) + \mu \Phi(h) \right] u \frac{du}{dh} - \mu m_R \frac{df_3(h)}{dh} u^2 + \alpha \Omega(h) = 0. \quad (29)$$

Обозначим

$$u^2 = \Pi. \quad (30)$$

Тогда имеем линейное дифференциальное уравнение, где  $m_R = 2 \int_0^h \Psi_U(s) ds$

$$\left[ 1 - \mu m_R f_3(h) + \mu \Phi(h) \right] \frac{d\Pi}{dh} - \mu m_R \frac{df_3(h)}{dh} \Pi = -\alpha \Omega(h). \quad (31)$$

Решение уравнения (31) с условием  $\Pi = \frac{1}{1 + \mu \Phi(0)}$  при  $h = 0$  имеет вид

$$\Pi = \left\{ \int_0^h \frac{-\alpha \Omega(z)}{\left[ 1 - \mu m_R(z) f_3(z) + \mu \Phi(z) \right]} \exp \left[ - \int_0^z \frac{\mu m_R(s) \frac{df_3(s)}{dh}}{\left[ 1 - \mu m_R(s) f_3(s) + \mu \Phi(s) \right]} ds \right] dz + \frac{1}{1 + \mu \Phi(0)} \right\} \times \exp \left[ \int_0^h \frac{\mu m_R(s) \frac{df_3(s)}{dh}}{\left[ 1 - \mu m_R(s) f_3(s) + \mu \Phi(s) \right]} ds \right] \quad (32)$$

Уравнение для определения полной глубины проникания  $H_p$  получается из (32) при условии  $\Pi = 0$ :

$$\left\{ \int_0^{H_p} \frac{-\alpha \Omega(z)}{\left[ 1 - \mu m_R(z) f_3(z) + \mu \Phi(z) \right]} \exp \left[ - \int_0^z \frac{\mu m_R(s) \frac{df_3(s)}{dh}}{\left[ 1 - \mu m_R(s) f_3(s) + \mu \Phi(s) \right]} ds \right] dz + \frac{1}{1 + \mu \Phi(0)} \right\} = 0. \quad (33)$$

Зависимость  $u(h)$  получается из (30):  $u(h) = \sqrt{\Pi(h)}$ .

### 3. ИМПУЛЬС И МАССА ЭЖЕКЦИИ

Теперь мы можем вычислить массу и импульс эжекции в зависимости от глубины внедрения ударника. В соответствии с рассматриваемой задачей, нас

интересует только проекция импульса на вертикальную ось  $Y$  (рис.1), которую обозначим через  $P_e$ . Приращение  $P_e$  имеет вид

$$\frac{dP_e}{dt} = \frac{dM_R}{dt} V_1 \sin \beta = \frac{dM_R}{dt} \frac{V}{x-1} \sin^2 \beta. \quad (34)$$

Введем безразмерный импульс  $\bar{P}_e = \frac{P_e}{MV_0}$ . Далее черту опускаем. С учетом

(24) из (34) и (21) имеем

$$\frac{dP_e}{dh} = 2\mu(X^+ - X) \frac{\sin^4 \beta}{(x-1)^2} u, \quad (35)$$

$$\frac{dm_R}{dh} = 2\Psi_U(h). \quad (36)$$

Из уравнений (35, 36) с учетом (ПЗ.11-ПЗ.15), имеем

$$P_e = 2\mu \int_0^{H_p} \Psi_U(h) f_3(h) u(h) dh, \quad (37)$$

$$M_R^* = 2\mu \left[ 0.15h + 0.115 \ln^2(1+h) - \frac{1}{30} \ln^3(1+h) + 0.3(1+h) \ln(1+h) \right]. \quad (38)$$

В (38)  $M_R^*$  – масса эжекты нормированная на массу ударника,  $M_R^* = \frac{M_R}{M}$

и  $M_R^* = \mu \cdot m_R$ .

#### 4. ОЦЕНКА ИМПУЛЬСА И МАССЫ ЭЖЕКЦИИ НА ОСНОВЕ ПРЕДЛОЖЕННОЙ МОДЕЛИ

На основе предложенной модели мы рассмотрели зависимость массы и импульса эжекции от параметров задачи. Напомним, что величина импульса эжекции  $P_e$  равна приращением импульса, передаваемого ударником преграде при ударе (1). Масса единицы длины ударника принималась равной  $M = \pi \rho_p l^2$ , где  $\rho_p$  – плотность ударника. Таким образом, при ширине прямоугольного ударника  $2l$  (рис.1) его высота составляла  $\frac{1}{2} \pi l$ .

На рис.2(а) показаны зависимости безразмерных квадрата скорости внедрения ударника  $(V/V_0)^2$ , импульса эжекции  $\bar{P}_e = \frac{P_e}{MV_0}$  и интенсивности

импульса эжекции  $\frac{d\bar{P}_e}{d(h/l)}$  от глубины внедрения ударника  $h$  для значений

параметров  $\rho_p = 7.8 \text{ г/см}^3$ ,  $\rho_t = 2.7 \text{ г/см}^3$ ,  $Y_t = 0.05 \text{ ГПа}$ ,  $V_0 = 3.0 \text{ км/сек}$  и  $l = 1.0 \text{ мм}$ . Видно, что скорость внедрения и интенсивность импульса эжекции быстро падают с увеличением глубины внедрения. Такое поведение характерно, также, для других скоростей удара  $V_0$  и является ожидаемым, так как соответствует физическому смыслу задачи.

Скорость удара  $V_0$  в расчетах, представленных на рис.2(б)-рис.4 варьировались в пределах от 1.0 км/с до 10.0 км/с, а предел текучести –

$Y_t = (0.025 \div 2.0)$  ГПа. Все величины с размером длины, входящие в решение, нормированы на характерный размер ударника  $l$ . Поэтому расчеты были проведены только для одного значения  $l = 1.0$  мм.

На рис.2(b) показано приращение импульса преграды, нормированное на импульс ударника,  $P_e/P_p$ , в зависимости от безразмерного параметра  $\rho_t V_0^2/Y_t$  при различном отношении плотностей ударника и преграды,  $\rho_p/\rho_t$ . Обозначено: Fe/Al – удар стального ударника по алюминиевой преграде, аналогичный смысл имеют обозначения Al/Al и Al/Fe. Из рис.2(b) видно, что наибольшее приращение импульса (по отношению к импульсу ударника) имеет место при ударе менее плотного ударника по более плотной преграде. Этот результат качественно подтверждается экспериментами с алюминиевыми преградами, выполненными в работе [6].

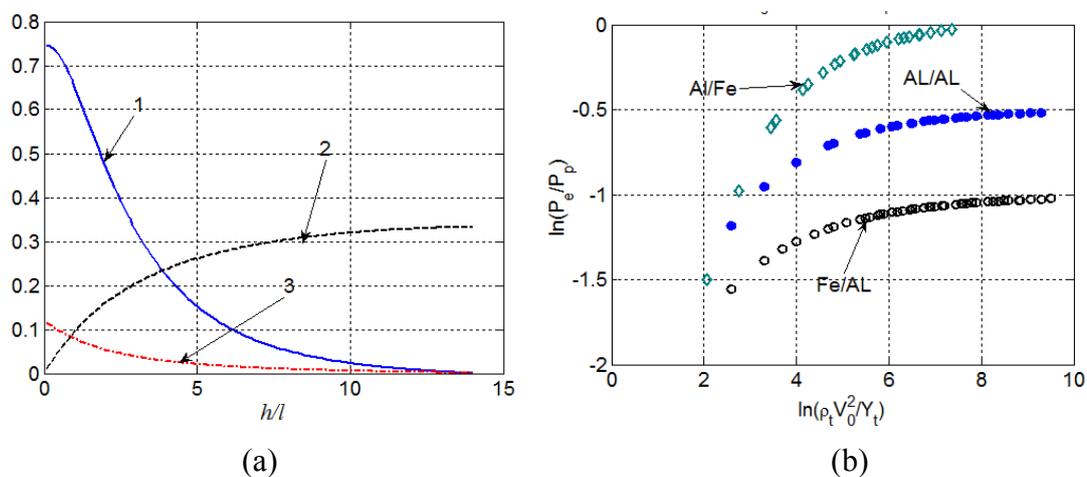


Рис.2. (a) Показаны зависимости безразмерных: квадрата скорости внедрения ударника (1), импульса эжекции (приращения импульса преграды) (2) и интенсивности импульса эжекции (3) от безразмерной глубины внедрения ударника  $h/l$ ; (b) Приращение импульса преграды, нормированное на импульс ударника,  $P_e/P_p$ , в зависимости от безразмерного параметра  $\rho_t V_0^2/Y_t$  при различном отношении плотностей ударника и преграды.

На рис.3(a,b) показаны зависимости приращения импульса преграды  $P_e/P_p$  и массы эжекции  $M_R/M$  от безразмерного параметра  $\gamma = \rho_t V_0^2/Y_t$ . Прямые линии на рисунках построены методом наименьших квадратов для  $\gamma < \gamma_c$  и  $\gamma > \gamma_c$ , где  $\ln(\gamma_c) \approx 5.8$ . Видно, что логарифмические графики могут быть удовлетворительно аппроксимированы прямыми линиями только при  $\gamma > \gamma_c$  с одним переходным значением  $\gamma_c \approx 330$ . Таким образом, эти зависимости могут быть представлены в виде (3)

$$\frac{P_e}{P_p} \sim \left( \frac{\rho_t V_0^2}{Y_t} \right)^{\delta_1} \text{ и } \frac{M_R}{M} \sim \left( \frac{\rho_t V_0^2}{Y_t} \right)^{\lambda}, \tag{39}$$

где  $\delta_1 = 0.02$  и  $\lambda = 0.24$  при  $\gamma > \gamma_c$ .

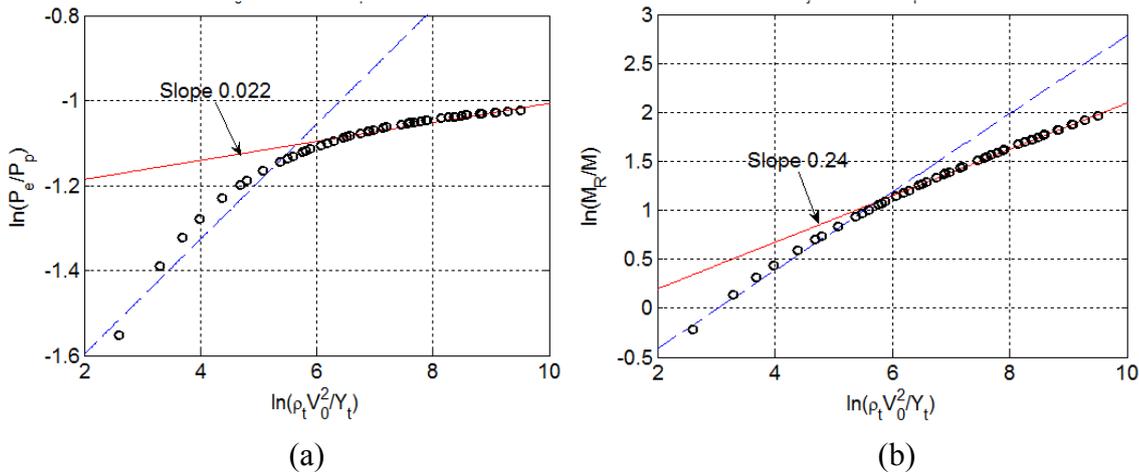


Рис.3. (а) Приращение импульса преграды, нормированное на импульс ударника,  $P_e/P_p$ , в зависимости от безразмерного параметра  $\rho_t V_0^2/Y_t$  при фиксированном отношении плотностей ударника и преграды,  $\rho_p/\rho_t = 2.89$  (удар стального ударника по алюминиевой преграде); (б) То же самое для массы эжекции, нормированной на массу ударника,  $M_R/M$ .

На рис.4(a,b) показаны зависимости приращения импульса преграды  $P_e/P_p$  и массы эжекции  $M_R/M$  от безразмерного параметра  $\rho_p/\rho_t$ , для различных значений безразмерного параметра  $\gamma = \rho_t V_0^2/Y_t$  (показан на рисунке).

На рис.4(a), построенной в логарифмическом масштабе, зависимости с хорошей точностью аппроксимируются прямыми линиями с одинаковым наклоном –  $(0.46 \pm 0.01)$ , который не зависит от параметра  $\gamma$ . Таким образом, для приращения импульса преграды с учетом (2) и (67) имеем

$$\frac{P_e}{P_p} \sim k_e \left( \frac{\rho_t V_0^2}{Y_t} \right)^{\delta_1} \left( \frac{\rho_t}{\rho_p} \right)^{\delta_2}, \quad (40)$$

где  $k_e$  – коэффициент, зависящий только от формы ударника (в нашем случае – это отношение высоты ударника к его ширине),  $\delta_1 = 0.02$  при  $\gamma > \gamma_c$  и  $\delta_2 = 0.46$ .

На рис.4(b), видно, что масса эжекции  $M_R/M$  в рассматриваемом интервале значений  $\rho_p/\rho_t$  не следует степенной зависимости от  $\rho_p/\rho_t$  для всех значений параметра  $\gamma$ . Таким образом, для массы эжекции имеем

$$\frac{M_R}{M} \sim k_R G \left( \frac{\rho_p}{\rho_t} \right) \left( \frac{\rho_t V_0^2}{Y_t} \right)^{\lambda}, \quad (41)$$

где  $G \left( \frac{\rho_p}{\rho_t} \right)$  – функция только от  $\rho_p/\rho_t$  и  $k_R$  – коэффициент, зависящий только от формы ударника;  $\lambda = 0.24$  при  $\gamma > \gamma_c$ .

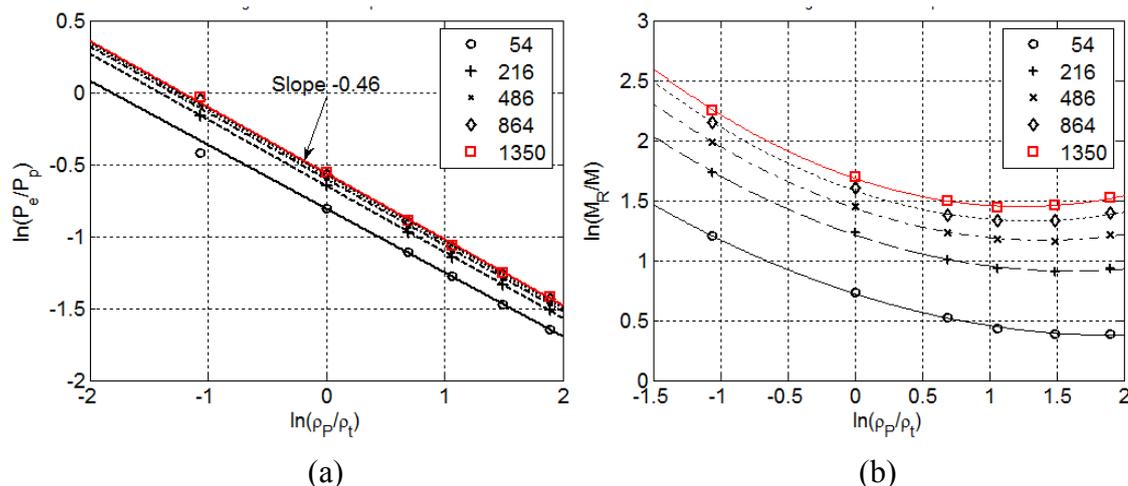


Рис.4. (а) Приращение импульса преграды, нормированное на импульс ударника,  $P_e/P_p$ , в зависимости от отношения плотности ударника к плотности преграды,  $\rho_p/\rho_t$ , для различных значений безразмерного параметра  $\gamma = \rho_t V_0^2 / Y_t$  (показаны на рисунке); (б) Масса эжекции, нормированная на массу ударника, в зависимости от  $\rho_p/\rho_t$  для различных значений  $\gamma$ .

## ВЫВОДЫ

В настоящей работе построена аналитическая механическая модель эжекции, возникающей при высокоскоростном ударе жесткого ударника по полубесконечной преграде, и дана оценка массы эжекты и эффекта усиления импульса, передаваемого при ударе. Модель построена в приближении плоской деформации с использованием минимального числа параметров материалов ударника и преграды. При этом модель учитывает зависимость угла вылета эжекционных фрагментов от глубины внедрения ударника. Для описания механических свойств материала преграды принимается гипотеза о несжимаемости и идеальной пластичности. На основании энергетического баланса получено уравнение движения (проникания) ударника в преграду с учетом движения стенок кратера. Получены уравнения для массы эжекции и приращения импульса преграды, в зависимости от глубины внедрения ударника.

На основе предложенной модели мы выполнили серию расчетов. Показано, что:

- модель адекватно описывает импульс эжекции, скорость изменения импульса эжекции и массу эжекции в зависимости от глубины проникания ударника;

- импульс эжекции (дополнительный импульс, передаваемый преграде при ударе) может быть представлен скейлинговым соотношением (40) как по параметру  $\gamma = \rho_t V_0^2 / Y_t$ , так и по параметру  $\rho_p/\rho_t$ , в котором коэффициент пропорциональности  $k_e$  зависит только от формы ударника;

- масса эжекционных фрагментов может быть представлена соотношением (41), в котором скейлинг имеет место только по параметру  $\gamma = \rho_t V_0^2 / Y_t$ . В (41) коэффициент  $k_R$  зависит только от формы ударника;

– скейлинг по динамическому параметру  $\gamma = \rho_t V_0^2 / Y_t$  имеет место только для  $\gamma > \gamma_c$ , с кроссовером при  $\gamma_c \approx 330$ , что для типичных значений  $\rho_t = 2700 \text{ кг/м}^3$  и  $Y_t = 50 \text{ МПа}$  дает  $V_{0c} = 2.5 \text{ км/с}$ .

### Приложение 1. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ

Кинетическая энергия системы  $E$  (на единицу длины) состоит из следующих составляющих:

$E_1$  – кинетическая энергия ударника

$$E_1 = \frac{1}{2} M V^2. \quad (\text{П1.1})$$

$E_2$  – кинетическая энергия сегмента круга  $A_1 B A$

$$E_2 = \frac{1}{2} \rho_t V^2 a^2 \left( \beta - \frac{1}{2} \sin 2\beta \right). \quad (\text{П1.2})$$

$E_3$  – кинетическая энергия сектора кольца  $A_1 B A C B_1 C_1$ , вычисленная в [8], равна

$$E_3 = \frac{1}{4} \rho_t V^2 \frac{a^2}{(b-a)^2} \left\{ 2\beta \left[ b^2 \ln \frac{b}{a} - (b-a)^2 \right] + \sin 2\beta \left[ b^2 \ln \frac{b}{a} - 2b(b-a) \right] \right\} \quad (\text{П1.3})$$

$E_4$  – кинетическая энергия зоны 3. После вычислений, аналогично работе [8], получаем

$$E_4 = \frac{1}{2} \rho_t V^2 \frac{a^2}{(b-a)^2} \sin^2 \beta \times \left\{ 2lh + 2h(b-a) \sin \beta + \frac{1}{2} (b-a)^2 \sin 2\beta + \frac{[h + (b-a) \cos \beta]^2}{\text{tg} \beta} \right\} - \frac{1}{2} M_R V^2 \frac{a^2}{(b-a)^2} \sin^2 \beta, \quad (\text{П1.4})$$

где  $M_R$  – масса эжекционных фрагментов.

Полная кинетическая энергия  $E$  равна

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + E_4. \quad (\text{П1.5})$$

Представим полную кинетическую энергию системы в виде

$$E = \frac{1}{2} V^2 \left[ M - M_R \frac{a^2}{(b-a)^2} \sin^2 \beta + F_1(a, b, h, \beta) \right],$$

где

$$\begin{aligned}
 F_1(a, b, h, \beta) = & \rho_t a^2 \left( \beta - \frac{1}{2} \sin 2\beta \right) + \\
 & + \rho_t \frac{a^2}{2(b-a)^2} \left\{ 2\beta \left[ b^2 \ln \frac{b}{a} - (b-a)^2 \right] + \sin 2\beta \left[ b^2 \ln \frac{b}{a} - 2b(b-a) \right] \right\} + \\
 & + \rho_t \frac{a^2}{(b-a)^2} \sin^2 \beta \times \left\{ 2lh + 2h(b-a) \sin \beta + \frac{1}{2}(b-a)^2 \sin 2\beta + \right. \\
 & \left. + [h + (b-a) \cos \beta]^2 \operatorname{ctg} \beta \right\}.
 \end{aligned}$$

Заметим, что  $a = \frac{l}{\sin \beta}$ . Обозначим  $x = \frac{b}{a}$ ,  $\bar{h} = \frac{h}{l}$ , тогда

$$E = \frac{1}{2} V^2 \left[ M - M_R \frac{\sin^2 \beta}{(x-1)^2} + \rho_t l^2 F(x, \bar{h}, \beta) \right], \quad (\text{П1.6})$$

где (здесь и далее черту опускаем)

$$\begin{aligned}
 F(x, h, \beta) = & \frac{\left( \beta - \frac{1}{2} \sin 2\beta \right)}{\sin^2 \beta} + \\
 & + \frac{1}{(x-1)^2 \sin^2 \beta} \left\{ \beta \left[ x^2 \ln x - (x-1)^2 \right] + \frac{1}{2} \sin 2\beta \left[ x^2 \ln x - 2x(x-1) \right] \right\} + \\
 & + \frac{\sin^2 \beta}{(x-1)^2} \left\{ 2h + 2h(x-1) + (x-1)^2 \operatorname{ctg} \beta + [h + (x-1) \operatorname{ctg} \beta]^2 \operatorname{ctg} \beta \right\}.
 \end{aligned} \quad (\text{П1.7})$$

## Приложение 2. МОЩНОСТЬ ВНУТРЕННИХ СИЛ

Расчеты представлены в [8].

$W_1$  – мощность в деформируемой зоне сектора кольца  $A_1 B A C B_1 C_1$

$$W_1 = Y_t \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{Vab}{b-a} \ln \frac{b}{a} \int_0^\beta \sqrt{1 - \frac{3}{4} \sin^2 \phi} d\phi. \quad (\text{П2.1})$$

$W_2$  – мощность на разрыве касательной скорости на линии  $A_1 B A$

$$W_2 = \frac{2Y_t}{\sqrt{3}} \frac{Va^2}{b-a} (1 - \cos \beta). \quad (\text{П2.2})$$

$W_3$  – мощность на разрыве касательной скорости на линии  $C_1 B_1 C$

$$W_3 = \frac{2Y_t}{\sqrt{3}} \frac{Vab}{b-a} (1 - \cos \beta). \quad (\text{П2.3})$$

$W_4$  – мощность на разрыве касательной скорости на линиях  $C_1 E_1, EC$

$$W_4 = \frac{2Y_t}{\sqrt{3}} \frac{Va}{b-a} [h + (b-a) \cos \beta]. \quad (\text{П2.4})$$

$W_5$  – мощность на разрыве касательной скорости на линиях  $C_1 A_1, AC$

$$W_5 = \frac{2Y_t}{\sqrt{3}} \frac{Va}{b-a} \cos \beta \left[ b \ln \frac{b}{a} - (b-a) \right]. \quad (\text{П2.5})$$

Полная мощность  $W$  равна

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5. \quad (\text{П2.6})$$

Полную мощность  $W$  представим в виде

$$W = \frac{2Y_t V}{\sqrt{3}} G_1(a, b, h, \beta),$$

где

$$G_1(a, b, h, \beta) = \frac{4ab}{b-a} \ln \frac{b}{a} \int_0^\beta \sqrt{1 - \frac{3}{4} \sin^2 \varphi} d\varphi + \frac{a(b+a)}{b-a} (1 - \cos \beta) + \\ + \frac{a}{b-a} [h + (b-a) \cos \beta] + \frac{a}{b-a} \left[ b \ln \frac{b}{a} - (b-a) \right] \cos \beta.$$

Полагая  $a = \frac{l}{\sin \beta}$ ,  $x = \frac{b}{a}$ ,  $\bar{h} = \frac{h}{l}$ , имеем  $G_1(a, b, h, \beta) = lG(x, \bar{h}, \beta)$ , где (черту опускаем)

$$G(x, h, \beta) = \frac{2x}{x-1} \ln x \frac{1}{\sin \beta} \int_0^\beta \sqrt{1 - \frac{3}{4} \sin^2 \varphi} d\varphi + \left( \frac{x+1}{x-1} \right) \frac{1 - \cos \beta}{\sin \beta} + \\ + \frac{1}{x-1} [h + (x-1) \text{ctg} \beta] + \frac{1}{x-1} [x \ln x - (x-1)] \text{ctg} \beta. \quad (\text{П2.7})$$

Заметим, что с приемлемой точностью

$$\int_0^\beta \sqrt{1 - \frac{3}{4} \sin^2 \varphi} d\varphi = \int_0^\beta \left( 1 - \frac{3}{8} \sin^2 \varphi \right) d\varphi = \int_0^\beta \left[ 1 - \frac{3}{16} (1 - \cos 2\varphi) \right] d\varphi = \\ = \frac{13}{16} \beta + \frac{3}{32} \sin 2\beta.$$

Таким образом

$$G(x, h, \beta) = \frac{x}{x-1} \ln x \left( \frac{13}{8} \frac{\beta}{\sin \beta} + \frac{3}{8} \cos \beta + \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \right) + \\ + \left( \frac{x+1}{x-1} \right) \frac{1 - \cos \beta}{\sin \beta} + \frac{h}{x-1}. \quad (\text{П2.8})$$

### Приложение 3. УРАВНЕНИЕ ПРОНИКАНИЯ УДАРНИКА

Баланс энергии системы определяется уравнением (17). Выражение для потока энергии покинувших систему эжекционных фрагментов  $Q_R$  имеет вид

$$Q_R = 2S\rho \frac{1}{2} V_1^2 V_1 \sin \beta = \rho S V_1^3 \sin \beta, \quad (\text{П3.1})$$

где  $S$  размер участка свободной поверхности с каждой стороны от оси симметрии задачи (рис.1), на котором происходит движение противоположное направлению удара. Если обозначить через  $\chi$  – половину поперечного размера кратера

на уровне свободной поверхности, то  $S = l + \frac{(b-a)}{\sin \beta} + h \frac{\cos \beta}{\sin \beta} - \chi$ . Учитывая, что

$$V_1 = \frac{Va}{b-a} \sin \beta, \text{ получаем из (ПЗ.1)}$$

$$Q_R = \rho \left[ \frac{(b-a)}{\sin \beta} + h \frac{\cos \beta}{\sin \beta} - \chi \right] V^3 \frac{a^3}{(b-a)^3} \sin^4 \beta. \quad (\text{ПЗ.2})$$

Рассмотрим величину  $S = l + \left[ \frac{(b-a)}{\sin \beta} + h \frac{\cos \beta}{\sin \beta} - \chi \right]$ . Представим  $S$  в виде

$S = l\bar{S}$  (в дальнейшем черту опускаем) и обозначим  $x = \frac{b}{a}$ , тогда

$$S = 1 + \frac{x-1}{\sin^2 \beta} + h \frac{\cos \beta}{\sin \beta} - \frac{\chi}{l}. \quad (\text{ПЗ.3})$$

Величина  $S$  является функцией  $h$ . Изменение массы эжекции

$$\frac{dM_R}{dt} = 2S\rho V_1 \sin \beta.$$

запишется в виде

$$\frac{dM_R}{dt} = \rho 2lV \left( 1 + \frac{x}{\sin^2 \beta} + h \frac{\cos \beta}{\sin \beta} - \frac{\chi}{l} \right) \frac{1}{x-1} \sin^2 \beta.$$

Поскольку  $x = x(h)$ ,  $\beta = \beta(h)$ , выражение

$\left( 1 + \frac{x}{\sin^2 \beta} + h \frac{\cos \beta}{\sin \beta} - \frac{\chi}{l} \right) \frac{1}{x-1} \sin^2 \beta$  можно рассматривать как функцию  $h$ .

Обозначим

$$\Gamma(h) = \left( 1 + \frac{x}{\sin^2 \beta} + h \frac{\cos \beta}{\sin \beta} - \frac{\chi}{l} \right) \frac{1}{x-1} \sin^2 \beta. \quad (\text{ПЗ.4})$$

Уравнение границы боковой поверхности кратера было получено в [8]. Форма кратера может быть задана в параметрическом виде, где параметр  $z$  изменяется в интервале  $0 < z < h$ .

Пусть  $X(t), Y(t)$  координаты точек боковой поверхности кратера, тогда параметрическое уравнение его боковой поверхности имеет вид

$$X = 1 + \int_0^h \frac{1}{x(s)-1} \sin \beta(s) \cos \beta(s) ds - \int_0^z \frac{1}{x(s)-1} \sin \beta(s) \cos \beta(s) ds,$$

$$Y = -z + \int_0^h \frac{1}{x(s)-1} \sin^2 \beta(s) ds - \int_0^z \frac{1}{x(s)-1} \sin^2 \beta(s) ds.$$

Фактически форма кратера определяется глубиной проникания  $h$ . Если обозначить

$$U(h) = \int_0^h \frac{1}{x(s)-1} \sin \beta(s) \cos \beta(s) ds$$

и

$$V(h) = \int_0^h \frac{1}{x(s)-1} \sin^2 \beta(s) ds. \quad (\text{ПЗ.5})$$

Тогда параметрическое задание формы боковой поверхности кратера ( $z$  – параметр) представляется в виде

$$X = 1 + U(h) - U(z), \quad Y = -z + V(h) - V(z), \quad (\text{ПЗ.6})$$

где  $0 < z < h$ . Функция  $U(h)$  с приемлемой точностью аппроксимируется выражением [8]

$$U(h) = \int_0^h \frac{1}{x(s)-1} \sin \beta(s) \cos \beta(s) ds \approx U_{AP}(h) = 0.45 \ln(1+h). \quad (\text{ПЗ.7})$$

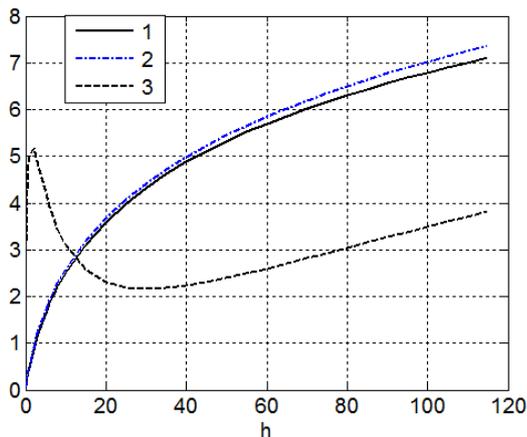
Функция  $V(h)$  аппроксимируется соотношением

$$V(h) = \int_0^h \frac{1}{x(s)-1} \sin^2 \beta(s) ds \approx V_{AP}(h) = 0.6 \ln(1+h) + 0.2 \ln^2(1+h). \quad (\text{ПЗ.8})$$

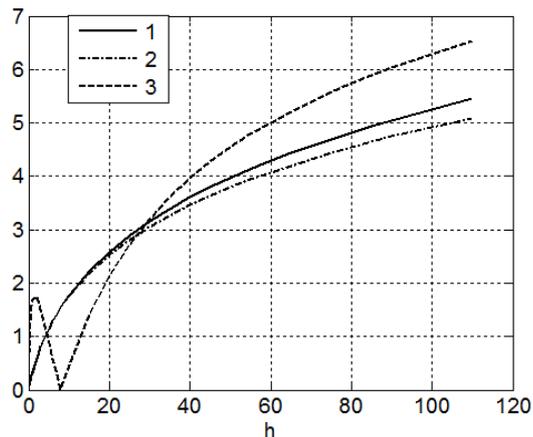
На рис.ПЗ.1(а) приведены результаты расчетов  $V(h)$  по точной и приближенной формулам (ПЗ.8), и относительная погрешность аппроксимации

$\Delta_R = \frac{|V_{AP}(h) - V(h)|}{V(h)} \times 100$ , которая не превышает несколько процентов. Интеграл

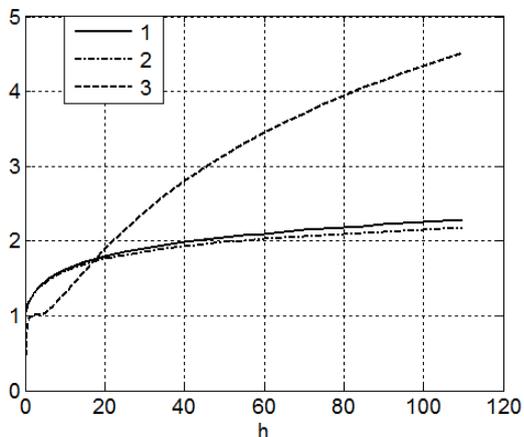
в (ПЗ.8) вычислялся методом трапеций с шагом 0.01. Видно хорошее согласие между  $V(h)$  и  $V_{AP}(h)$ .



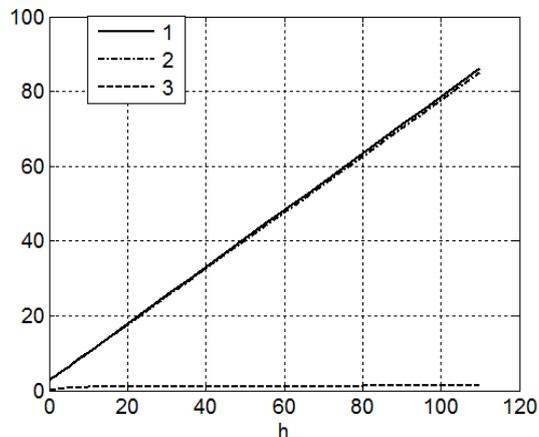
(а)



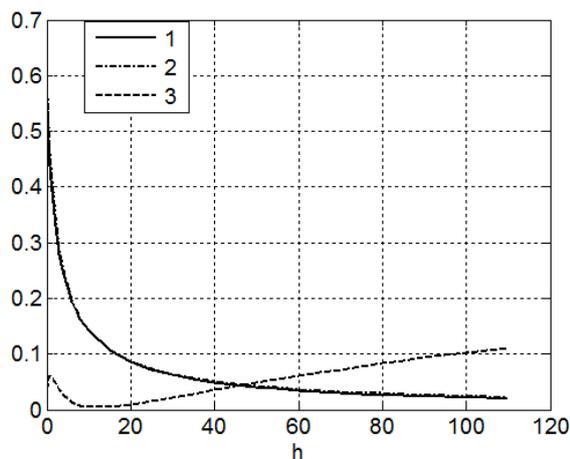
(б)



(в)



(г)



(д)

Рис.ПЗ.1. На рисунках обозначено: (а) 1 –  $V(h)$ , 2 –  $V_{AP}(h)$ , 3 –  $\Delta_R$ ; (б) 1 –  $\mathcal{G}(h)$ , 2 –  $\mathcal{G}_{AP}(h)$ , 3 –  $\Delta_R$ ; (в) 1 –  $X(h)$ , 2 –  $X_{AP}(h)$ , 3 –  $\Delta_R$ ; (г) 1 –  $X^+(h)$ , 2 –  $X_{AP}(h)$ , 3 –  $\Delta_R$ ; (д) 1 –  $f_3(h)$ , 2 –  $f_{3AP}(h)$ , 3 –  $\Delta_R/100$ .

Значению  $\chi$  соответствует такое значение  $X(z)$ , при котором  $Y(z) = 0$ .

Тогда для определения  $z$  имеем уравнение

$$-z + V(h) - V(z) = 0. \tag{ПЗ.9}$$

Используя (ПЗ.8, ПЗ.9), получаем

$$z = \ln\left(\frac{1+h}{1+z}\right) \{0.6 + 0.2 \ln[(1+z)(1+h)]\}. \tag{ПЗ.10}$$

Решение уравнения (ПЗ.10) относительно  $z$  обозначим  $\mathcal{G}(h)$ . Функция  $\mathcal{G}(h)$  неплохо аппроксимируется соотношением  $\mathcal{G}(h) \approx \mathcal{G}_{AP}(h) = \frac{3}{8} \ln(1+h) + 0.15 \ln^2(1+h)$ . Это видно на рис.ПЗ.1(б), где показаны  $\mathcal{G}(h)$ ,  $\mathcal{G}_{AP}(h)$  и относительная погрешность аппроксимации  $\Delta_R = \frac{|\mathcal{G}_{AP}(h) - \mathcal{G}(h)|}{\mathcal{G}(h)} \times 100$ , которая не превышает нескольких процентов.

Левая граница кратера на свободной боковой поверхности определяется соотношением

$$\chi = X(h) = 1 + U(h) - U[\mathcal{G}(h)] = 1 + 0.45 \ln \frac{1+h}{1+\mathcal{G}(h)}. \tag{ПЗ.11}$$

Функция  $X(h)$  неплохо аппроксимируется соотношением

$$X(h) \approx X_{AP}(h) = 1 + \frac{1}{4} \ln(1+h).$$

Это видно на рис.ПЗ.1(в), где показаны  $X(h)$ ,  $X_{AP}(h)$  и относительная погрешность аппроксимации  $\Delta_R = \frac{|X_{AP}(h) - X(h)|}{X(h)} \times 100$ , которая не превышает нескольких процентов.

Правая граница свободной поверхности, на которой происходит движение,  $X^+$  определяется соотношением

$$X^+ = 1 + \frac{x-1}{\sin^2 \beta} + h \frac{\cos \beta}{\sin \beta}. \quad (\text{ПЗ.12})$$

Заметим, что  $X^+$  так же является функцией  $h$ , то есть  $X^+ = X^+(h)$ . Функция  $X^+(h)$  неплохо аппроксимируется соотношением  $X^+(h) \approx X^+_{AP}(h) = 2.7 + \frac{3}{4}h$ . Это видно из рис.ПЗ.1(г), где показаны  $X^+(h)$ ,  $X^+_{AP}(h)$  и относительная погрешность аппроксимации  $\Delta_R = \frac{|X^+_{AP}(h) - X^+(h)|}{X^+(h)} \times 100$ , которая не превышает нескольких процентов.

Используя соответствующие соотношения для кинетической энергии и полной мощности, получаем

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} V^2 \left[ M - M_R \frac{\sin^2 \beta}{(x-1)^2} + \rho_l l^2 F(x, h, \beta) \right] \right\} + \frac{2Y_l V}{\sqrt{3}} l G(x, h, \beta) + Q_R = 0, \quad (\text{ПЗ.13})$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{V}{l}.$$

Заметим, что

$$\frac{dM_R}{dt} = 2l(X^+ - X) \rho_l V_1 \sin \beta. \quad (\text{ПЗ.14})$$

Преобразуя, получаем

$$\frac{dM_R}{dh} = \rho_l 2l(X^+ - X) \frac{1}{x-1} \sin^2 \beta = 2\rho_l l \Psi_U(h), \quad (\text{ПЗ.15})$$

где  $\Psi_U(h) = (X^+ - X) f_3(h)$  и  $f_3(h) = \frac{1}{x-1} \sin^2 \beta$ . Функция  $f_3(h)$  неплохо аппроксимируется соотношением

$f_3(h) = \frac{1}{x(h)-1} \sin^2 \beta(h) \approx f_{3AP}(h) = 0.6 \frac{1}{1+h} + 0.4 \frac{\ln(1+h)}{1+h}$ . Это видно из рис.ПЗ.1(д), где показаны  $f_3(h)$ ,  $f_{3AP}(h)$  и относительная погрешность аппроксимации  $\Delta_R = \frac{|f_{3AP}(h) - f_3(h)|}{f_3(h)} \times 100$ , которая не превышает нескольких процентов. Заметим, что

$$Q_R = \rho_l 2 \left( l + \frac{b}{\sin \beta} + h \frac{\cos \beta}{\sin \beta} - Z \right) \frac{Va}{b-a} \sin^2 \beta \frac{V^2}{2} \frac{a^2}{(b-a)^2} \sin^2 \beta =$$

$$= \frac{dM_R}{dt} \frac{V^2}{2} \frac{a^2}{(b-a)^2} \sin^2 \beta. \quad (\text{ПЗ.16})$$

Тогда уравнение (ПЗ.13) с учетом (15), (16), (ПЗ.16) и того, что  $V = l \frac{dh}{dt}$ , может быть переписано в виде

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} V^2 \left[ M - M_R \frac{\sin^2 \beta}{(x-1)^2} + \rho_l l^2 \Phi(h) \right] \right\} + \frac{2Y_l^2}{\sqrt{3}} \Omega(h) \frac{dh}{dt} +$$

$$+ \frac{dM_R}{dt} \frac{V^2}{2} \frac{1}{(x-1)^2} \sin^2 \beta = 0. \quad (\text{ПЗ.17})$$

### ЛИТЕРАТУРА

1. Francesconi A., Higashide M., Mandeville J.C., Meshcheryakov S. et al. *Characterization of Ejecta from HVI on Spacecraft outer Surfaces/ IADC WG3*, 2013.  
Retrieved from [https://www.iadc-home.org/documents\\_public/view/page/3/id/107#u](https://www.iadc-home.org/documents_public/view/page/3/id/107#u)
2. Shumikhin T.A., Myagkov N.N., Bezrukov L.N. *Properties of ejecta generated at high-velocity perforation of thin bumpers made from different constructional materials // Int. J. Impact Engn.* – 2012. – Vol.50. – Pp.90-98.
3. Walker J.D., Chocron S., Grosch D.J. *Size scaling of hypervelocity-impact ejecta mass and momentum enhancement: Experiments and a nonlocal-shear-band-motivated strain-rate-dependent failure model // Int. J. Impact Engn.* – 2020. – Vol.135. – 103388.
4. Hoerth Tobias, Schäfer Frank, Hupfer Jan, Millon Oliver and Wickert Matthias. *Momentum Transfer in Hypervelocity Impact Experiments on Rock Targets // Procedia Engineering.* – 2015. – Vol.103. – Pp.197-204.
5. Holsapple K.A., Housen K.R. *Momentum transfer in asteroid impacts. I. Theory and scaling // Icarus.* – 2012. – Vol.221. – Pp.875-887.
6. Walker J.D., Chocron S., Durda D.D. et al. *Scale Size Effect in Momentum Enhancement // Procedia Engineering.* – 2013. – Vol.58. – Pp.240-250.
7. Myagkov N.N., Shumikhin T.A. *Modeling of high-velocity impact ejecta by experiments with a water drop impacting on a water surface // Acta Mechanica.* – 2016. – Vol.227. – Pp.2911-2924.
8. Goloveshkin V.A., Myagkov N.N. *Model for the Interaction of a Rigid String with a Deformable Target // Russian Metallurgy (Metally).* – 2019. – Vol.2019. – Iss.4. – Pp.294-300.
9. Баренблатт Г.И. *Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Теория и приложения к геофизической гидродинамике.* – Л.: Гидрометеиздат, 1982. – 257 с.

## REFERENCES

1. Francesconi A., Higashide M., Mandeville J.C., Meshcheryakov S. et al. *Characterization of Ejecta from HVI on Spacecraft outer Surfaces/ IADC WG3*, 2013.  
Retrieved from [https://www.iadc-home.org/documents\\_public/view/page/3/id/107#u](https://www.iadc-home.org/documents_public/view/page/3/id/107#u)
2. Shumikhin T.A., Myagkov N.N., Bezrukov L.N. *Properties of ejecta generated at high-velocity perforation of thin bumpers made from different constructional materials*. Int. J. Impact Engn., 2012, Vol.50, Pp.90-98.
3. Walker J.D., Chocron S., Grosch D.J. *Size scaling of hypervelocity-impact ejecta mass and momentum enhancement: Experiments and a nonlocal-shear-band-motivated strain-rate-dependent failure model*. Int. J. Impact Engn., 2020, Vol.135, 103388.
4. Hoerth Tobias, Schäfer Frank, Hupfer Jan, Millon Oliver and Wickert Matthias. *Momentum Transfer in Hypervelocity Impact Experiments on Rock Targets*. Procedia Engineering, 2015, Vol.103, Pp.197-204.
5. Holsapple K.A., Housen K.R. *Momentum transfer in asteroid impacts. I. Theory and scaling*. Icarus, 2012, Vol.221, Pp.875-887.
6. Walker J.D., Chocron S., Durda D.D. et al. *Scale Size Effect in Momentum Enhancement*. Procedia Engineering, 2013, Vol.58, Pp.240-250.
7. Myagkov N.N., Shumikhin T.A. *Modeling of high-velocity impact ejecta by experiments with a water drop impacting on a water surface*. Acta Mechanica, 2016, Vol.227, Pp.2911-2924.
8. Goloveshkin V.A., Myagkov N.N. *Model for the Interaction of a Rigid String with a Deformable Target*. Russian Metallurgy (Metally), 2019, Vol.2019, Iss.4, Pp.294-300.
9. Barenblatt G.I. *Scaling, Self-similarity, and Intermediate Asymptotics*. Cambridge University Press, 1996, 386 p.

Поступила в редакцию 30 апреля 2021 года.

---

### Сведения об авторах:

Головешкин Василий Адамович – д.т.н., проф., в.н.с., ФГБУН «Институт прикладной механики РАН», г. Москва, Россия

Мягков Николай Николаевич – д.ф.-м.н., зав. лаб., ФГБУН «Институт прикладной механики РАН», г. Москва, Россия; e-mail: [nn\\_myagkov@mail.ru](mailto:nn_myagkov@mail.ru)