УДК 539.3
DOI 10.33113/mkmk.ras.2021.27.02.227_260.06

ЗАДАЧИ О ДИСПЕРСИИ ВОЛН В НЕОДНОРОДНЫХ ВОЛНОВОДАХ: МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ (ОБЗОР). ЧАСТЬ I*

Жаворонок С.И.

ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Представлен краткий обзор современного состояния и тенденций развития методов решения задачи о дисперсии нормальных волн в неоднородных, в первую очередь функционально-градиентных, упругих волноводах. Кратко описаны основные типы функционально-градиентных материалов и конструкций, в том числе тонкостенные элементы с градиентной структурой, и их основные инженерные приложения. Указаны проблемы моделирования напряженно-деформированного состояния функционально-градиентных пластин и оболочек и возможные способы их преодоления. Рассмотрены основные теоретические методы определения эффективных физических постоянных функционально-градиентных материалов и оценки эффективных констант, применяемые на практике. Перечислены основные зависимости эффективных физических постоянных материала от координат, использующиеся в задачах динамики. Кратко описана постановка задачи динамики неоднородного волновода и формулировка задачи о дисперсии нормальных волн. В первой части обзора основное внимание уделено некоторым аналитическим методам решения дисперсионных задач, главным образом матричным методам, опирающимся на формулировку задачи в пространстве изображений в форме системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Приведены определения векторов состояния, соответствующие общепринятым формализмам Штро и Коши, формулировки разрешающих уравнений и краевых условий на поверхностях волновода. Описаны классические методы решения стационарной задачи динамики для слоистого волновода, являющиеся основой для аппроксимации функционально-градиентного материала системой слоев с постоянными свойствами: метод переходных матриц и его основные модификации, обеспечивающие устойчивость вычислений, и метод глобальных матриц. Рассмотрены развивающиеся в последние 15 лет методы реверберационных матриц, матриц жесткости и матриц рассеяния, а также метод рядов Пеано. Приведены некоторые ключевые решения задач о дисперсии волн для неоднородных слоев, повышающие вычислительную эффективность аппроксимации функционально-градиентного волновода слоистой структурой, и метод построения в неявном виде общего решения для волновода с произвольным законом изменения свойств. Кратко описаны ключевые преимущества и основные недостатки описанных методов. Во второй части обзора основное внимание будет уделено методам полуаналитического решения дисперсионных задач, основанным на приближении волновода эквивалентной в некотором смысле системой с конечным числом степеней свободы: методам степенных рядов, обобщенных рядов Фурье, полуаналитических конечных элементов и спектральных элементов, а также методам, основанным на различных теориях пластин и оболочек.

Ключевые слова: материалы функционально-градиентные; волноводы слоистые; волн нормальных дисперсия; матрицы передаточные; матрицы реверберационные; Пеано ряды

* *Работа выполнена в рамках Государственного задания ИПРИМ РАН и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №19-01-00695)*

WAVE DISPERSION IN HETEROGENEOUS WAVEGUIDES: METHODS OF SOLUTION (A REVIEW). PART I

Zhavoronok S.I.

Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

ABSTRACT

A brief review of the modern state-of-the art and tendencies of further development of various methods of solution of wave dispersion problems in heterogeneous functionally graded elastic waveguides is presented. Main types of functionally graded materials and structures, including gradient thon-walled structures, and their main engineering applications is discussed. The main difficulties of modelling of the stress-strain state of functionally graded shells and plates are pointed, as well as the possible ways to overcome such difficulties. The main theoretical bases of definition of effective constitutive constants of functionally graded materials and their possible estimates used in the practice are considered. Main dependencies of the effective constitutive constants of a functionally graded material on coordinates used for the mathematical modelling of the dynamics are also shown. The statement of the dynamics problem for a functionally graded waveguide and the appropriate statement of the normal wave dispersion problem are pointed. The presented Part I of the review consider some analytical methods of solution of dispersion problems, mainly the matrix ones based on the formulation of the steady dynamics problem in the image space as a first-order ordinary differential equations system. The state vectors corresponding to the useful Cauchy and Stroh formalisms are introduced, and the appropriate governing equations and the boundary conditions on waveguide's faces are presented. Classical methods for solving the steady dynamics problem for a laminated waveguide are briefly described, which could be a basis for the further approximation of a functionally graded material by a system of layers with constant properties, i.e. the transfer matrix method, its main modifications developed to ensure the stability of calculations, and the global matrix method. Then, the intensively developed last 15 years reverberation matrix method, stiffness matrix method, and the Peano series method are discussed. Some key solutions of the wave dispersion problems for heterogeneous layers are presented; such solutions improve the efficiency of approximation of a functionally graded structure by a laminated one. The implicit solution of the general problem of steady dynamics for a waveguide with arbitrary gradation law is shown. The key features of the discussed matrix methods are pointed briefly as well as their main drawbacks. In the Part II, the main attention will be paid to methods of semi-analytical solution of dispersion problems based on the approximation of a waveguide by an equivalent system with a finite number of degrees of freedom: power series, generalized Fourier series, semi-analytical finite elements. spectral elements, as well as methods based on various theories of plates and shells.

Keywords: functionally graded materials; laminated waveguides; normal wave dispersion; transfer matrices; reverberation matrices; Peano series

1. ВВЕДЕНИЕ

Обзор посвящен анализу современного состояния методов решения задачи о дисперсии нормальных волн в функционально-градиентных упругих волноводах. Ограниченный объем журнальной статьи не позволяет анализировать детально все опубликованные в последнее время работы, посвященные дисперсии волн в градиентных средах, тем более смежные задачи о стационарной и нестационарной динамике градиентных стержней, пластин и оболочек; основное внимание уделено некоторым аналитическим методам, главным образом матричным (часть I), методам на базе конечно-элементной дискретизации и тем приближенным полуаналитическим методам, которые допускают прямую аналогию с современными вариантами теории оболочек высшего порядка (часть II). Так как многие приведенные ниже результаты, во-первых, являются развитием методов решения дисперсионных задач для слоистых волноводов, во-вторых, некоторые из решений приближенно представляют градиентный материал слоистой структурой, кратко описаны также некоторые ключевые методы, ранее разработанные для традиционных композиционных материалов слоистой структуры. Детальные обзоры основных результатов, достигнутых в области создания функционально-градиентных материалов, современных и перспективных приложений и методов математического моделирования, опубликованных в зарубежной печати, приведены в статьях [1-8], а также в монографии [9]. Следует отметить, что за последние 10 лет в журнале Composite Structures были опубликованы восемь обзоров, непосредственно посвященных ФГМ.

1.1. Функционально-градиентные материалы: основные сведения.

Под функционально-градиентными материалами (далее ФГМ) в современной литературе понимаются материалы на основе композиции двух или более структурных составляющих (металлических, керамических, полимерных) или фаз с непрерывной (кусочно-непрерывной) зависимостью параметров, описывающих распределение структурного либо фазового состава в объеме материала, от пространственных координат [10]. Наиболее часто данный термин применяется к искусственным материалам с предварительно заданным распределением составляющих, отвечающим целевому назначению [2,5-7], созданным на базе того или иного технологического процесса (см., напр., [4]). В то же время под естественными ФГМ могут пониматься некоторые материалы, способные изменять фазовый или структурный состав под действием тепловых или силовых полей, например, бинарные сплавы с памятью, претерпевающие термоупругие фазовые превращения «мартенсит – аустенит» [11]. Перечисленные неоднородные материалы характеризуются физическими постоянными (упругими константами C^{ijkl}, коэффициентами линейного расширения α_{ij} и т.д.), непрерывно зависящими от параметра структурного/фазового состава q, и, следовательно, от пространственных координат $\xi^j \in D_\xi \subset \mathbb{R}^3$

$$\begin{gathered} q \in C^{(M)}\left(D_\xi\right) \Rightarrow C^{ijkl}\left[q\left(\xi^m\right)\right] \in C^{(N)}\left(D_\xi\right), \\ \alpha_{ij}\left[q\left(\xi^m\right)\right] \in C^{(N)}\left(D_\xi\right), \quad M, N \geq 0. \end{gathered} \tag{1.1}$$

Первоначально концепция ФГМ [10,12] была разработана для замены металлического материала или традиционного слоистого композита в элементах конструкций летательных аппаратов [13,14] и энергетических установок [3,15], подверженных интенсивному тепловому воздействию с существенным градиентом температур [16,17], с целью исключить расслоение композиционного пакета, вызванного температурными напряжениями при наличии скачка коэффициента линейного расширения на границе раздела структурных составляющих [2,16]. Первые ФГМ представляли собой композиты на основе металла и тугоплавкой керамики [2,18]. Впоследствии появились ФГМ, предназначенные для деталей машин [19], металлорежущих инструментов [6,8], оптоэлектроники [20], гетерогенной броневой защиты [21,22], а также ФГМ медицинского назначения, сочетающие требуемые механические свойства с биологической совместимостью (см., напр., [23,24]). К особому классу следует отнести градиентно-пористые материалы различного назначения [5,6], в том числе для теплонагруженных элементов камер сгорания энергетических установок [25], костных протезов [26-28], где непрерывно изменяющиеся свойства материала (1.1) обеспечивают существенное снижение концентрации напряжений, и др. (см., напр., обзор [26]). К ФГМ также относятся также и тонкие покрытия с непрерывно изменяющимся по глубине структурным или фазовым составом и физическими свойствами (см. [8]).

Одним из наиболее разработанных типов конструктивных элементов на основе ФГМ являются элементы тонкостенные – оболочки и пластины со структурным и фазовым составом, непрерывно изменяющимся в направлении, нормальном к моделирующей поверхности [29], предназначенные для работы в тепловых полях; «…интеграция системы тепловой защиты (керамика) и несущего механического компонента (металл) в единую конструкцию является желательной особенностью ФГМ[†]» ([29], с.838). Типичным свойством тонкостенных ФГМ раннего поколения является одноосная градиентность свойств по толщине

$$\begin{gathered}\xi^3 \in [h_-, h_+] \subset \mathbb{R}, \quad q = q\left(\xi^3\right) \in C^{(M)}[h_-, h_+];\\ C^{ijkl}(q) = C^{ijkl}\left(\xi^3\right), \quad \alpha_{ij}(q) = \alpha_{ij}\left(\xi^3\right), \quad \rho(q) = \rho\left(\xi^3\right).\end{gathered} \tag{1.2}$$

Неоднородность тонкостенных ФГ элементов приводит к усложнению напряженно-деформированного состояния. Авторы обзора [29] указали на необходимость развития «квазитрехмерных» теорий, учитывающих не только поперечный сдвиг, но и поперечную нормальную деформацию тонкого тела, а также и высших степеней свободы для решения задач термомеханики тонкостенных ФГ конструкций (с. 846). Аналогичные выводы следуют из обзора [30], посвященного различным моделям высшего порядка ФГ пластин, а также из результатов сравнительного обзора аналитических и численных методов описания термоупругого деформирования ФГ пластин [31], кроме того, представляется необходимым развитие методов трехмерного моделирования ФГ оболочек и пластин на основе конечно-элементного и бессеточного подходов к дискретизации задачи. Авторы [31,32] указывают также на потребность в двумерных конечных элементах, опирающихся на теории оболочек высшего порядка при обязательном учете трансверсальной нормальной деформации ε_{33} помимо трансверсальной сдвиговой деформации $\varepsilon_{\alpha 3}$, $\alpha = 1,2$ (следует заметить, что данный вывод относится, согласно [33], ко всякому уточнению теории оболочек). Численно-аналитические методы решения задач для ФГ пластин анализируются также в обзорной работе [34]. Анализу процессов колебаний тонкостенных ФГ элементов и применимости различных моделей в данном классе задач посвящены обзоры [32] и [35]. Обзор [36] посвящен связным задачам пьезоэлектроупругости, термоупругости, гидроупругости и взаимодействия цилиндрических ФГ оболочек с основаниями.

Перспективным направлением развития ФГМ и тонкостенных ФГ конструкций являются материалы с двухосной градиентностью

[†] *The integration of thermal protection system (ceramic) and load bearing mechanical component (metal) into a single construction is a desirable feature of FGMs*

(биградиентностью) свойств – как в направлении нормали к моделирующей поверхности или кривой, так и вдоль оси стержня [37-39], – или в плоскости пластины [40-42]. Концепция биградиентной пластины была предложена, в частности, для оптимизации спектра частот [43]; биградиентная модель также используется для описания динамики стержней со сложными свойствами [44].

1.2. Определение эффективных физических констант ФГМ.

Зависимость (1.1) в искусственных ФГМ предопределяется целевыми характеристиками материала и технологией его производства. Согласно [35], ФГМ условно подразделяются на материалы с быстрым и медленным изменением свойств соотношением наименьшего репрезентативного элемента объема V_R и наибольшего гомогенизированного элемента материала V_H. В случае $V_R \approx V_H$ материал интерпретируется как локально-однородный, но глобально-неоднородный с эффективными физическими константами, определяемыми соотношением (1.1) в соответствии с одним из стандартных методов усреднения.

Большинство задач динамики ФГМ (см. [32,35]) решены на основе эффективных модулей, следующих из оценок Фойхта [45] (1.3) и Ройсса [46] (1.4)

$$E = E_1 q + E_2 \left(1-q\right); \tag{1.3}$$

$$E = E_1 E_2 \left[E_1 q + E_2 \left(1-q\right)\right]^{-1}, \tag{1.4}$$

(1.3) представляет оценку сверху, (1.4) – оценку снизу [47]. Двусторонние оценки [48] эффективного объемного модуля имеют вид (1.5), модуля сдвига – (1.6)

$$\begin{aligned} K^+ &= K_2 + \left(1-q\right)\left[\left(K_1 - K_2\right)^{-1} + 3q\left(3K_2 + 4G_2\right)^{-1}\right], \\ K^- &= K_1 + q\left[\left(K_2 - K_1\right)^{-1} + 3\left(1-q\right)\left(3K_1 + 4G_1\right)^{-1}\right]; \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned} G^+ &= G_2 + \left(1-q\right)\left[\left(G_1 - G_2\right)^{-1} + \tfrac{6}{5}\left(K_2 + 2G_2\right) q G_2^{-1}\left(3K_2 + 4G_2\right)^{-1}\right], \\ G^- &= G_1 + q\left[\left(G_2 - G_1\right) + \tfrac{6}{5}\left(K_1 + 2G_1\right)\left(1-q\right) G_1^{-1}\left(3K_1 + 4G_1\right)^{-1}\right]. \end{aligned} \tag{1.6}$$

В случае ФГМ с непрерывной матрицей и дискретным наполнителем применим метод Мори-Танаки [49], определяющий эффективные объемный модуль и модуль сдвига [50-52] соотношениями (1.7), (1.8), соответственно

$$K = K_1 + q\left(K_2 - K_1\right)\left[1 + \left(1-q\right)\left(K_2 - K_1\right)\left(K_1 + \tfrac{4}{3}G_1\right)^{-1}\right]^{-1}; \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned} G &= G_1 + q\left(G_2 - G_1\right)\left[1 + \left(1-q\right)\left(G_2 - G_1\right)\left(G_1 + F_1\right)^{-1}\right]^{-1}, \\ F_1 &= \tfrac{1}{6} G_1 \left(9K_1 - 8G_1\right)\left(K_1 + 2G_1\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

В общем случае взаимно проникающих структурных составляющих ФГМ для определения эффективных констант используются оценки Хилла [53,54] в виде

$$E = E_2 \frac{1 - qA\left[\left(E_1/E_2 - 1\right)\left(E_1/E_2 + A\right)^{-1}\right]}{1 - q\left[\left(E_1/E_2 - 1\right)\left(E_1/E_2 + A\right)^{-1}\right]}, \quad A \sim 1. \tag{1.9}$$

Точность модели (1.9) в случае ФГМ показана в серии работ [55-57].

Кубическая модель локальных представительных объемов (LVRE, [58]) приводит к определению эффективного модуля Юнга ФГМ соотношением (1.10):

$$E = E_1\left\{1-\sqrt[3]{q}\left[1-\left(1-\sqrt[3]{q}\left(1-E_1/E_2\right)\right)^{-1}\right]\right\}. \tag{1.10}$$

Кроме перечисленных, применяется ряд других методов оценки эффективных постоянных, например, [59-61] и др. (см. [8,29,35]). В работе [62] показано, что для структурных составляющих с существенно различными свойствами модели (1.3) и (1.4) приводят к погрешности вычисления эффективных констант по сравнению с (1.7) и (1.8), что приводит к росту ошибок решений в первую очередь динамических задач. Оценки (1.9) и (1.10) представляются более точными [56,57,63]. Аналогичные выводы сделаны в [63]. Оценки погрешности эффективных констант (1.3) относительно (1.7) и (1.8), приведенные разными авторами (напр. [64] и [65]), существенно различаются. В задачах волновой динамики анализ влияния определений эффективных физических постоянных ФГМ на погрешность решения спектральной задачи отсутствует.

В случае ФГМ с быстро изменяющимися свойствами (в соответствии с классификацией [35]) для определения эффективных физических констант материала применяется микромеханический подход в сочетании с численными методами; см., напр., [3,8,51,66-71]. Как правило, используется конечно-элементная модель ячейки периодичности (см., напр., [72]). Перспективным направлением является метод на базе асимптотического усреднения решений дифференциальных уравнений теории упругости (в том числе и нелинейных) с быстроосциллирующими коэффициентами [73-76].

В рассматриваемом классе задач вводятся зависимости эффективных физических констант (1.1) от координат ξ^m, определяемые объемной долей одной из структурных составляющих в суммарном объеме среды. Как правило, принимаются перечисленные ниже зависимости $q\left(\xi^m\right)\in[0,1]$ [8,35,36] для одноосно (a) и двухосно-градиентных (b) ФГМ:

Степенная зависимость

$$(\mathrm{a}):\quad q\left(\xi^3\right)=q_1+\left(q_2-q_1\right)\left(\tfrac{1}{2}+\xi^3h^{-1}\right)^n,\quad n\in\mathbb{R}; \tag{1.11}$$

$$(\mathrm{b}):\quad q\left(\xi^2,\xi^3\right)=q_1+\left(q_2-q_1\right)\left(\tfrac{1}{2}+\xi^2h^{-1}\right)^{n_2}\left(\xi^3a^{-1}\right)^{n_3},\quad n_{2,3}\in\mathbb{R}. \tag{1.12}$$

Экспоненциальная зависимость

$$(\mathrm{a}):\quad q\left(\xi^3\right)=q_t\exp\left[h^{-1}\ln\left(q_b/q_t\right)\left(\xi^3+h/2\right)\right]; \tag{1.13}$$

$$(\mathrm{b}):\quad q\left(\xi^2,\xi^3\right)=q_{0,0}\exp\left[k_2\beta_2\left(\xi^2\right)+k_3\beta\left(\xi^3\right)\right]. \tag{1.14}$$

Тригонометрическая зависимость:

$$(\mathrm{a}):\quad q\left(\xi^3\right)=C\left[\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\alpha\sin\left(\pi n\xi^3h^{-1}+\phi\right)\right]^{\gamma},\quad \gamma\in\mathbb{R}; \tag{1.15}$$

$$(\mathrm{b}):\quad q\left(\xi^2,\xi^3\right)=\left[1-\sin\left(\pi l_2^{-1}n_2\xi^2+\varphi_2\right)\sin\left(\pi l_3^{-1}n_3\xi^3+\varphi_3\right)\right]^{\gamma},\ l_{2,3}\in\mathbb{R}. \tag{1.16}$$

Сигмоидальная зависимость для одноосного ФГМ:

$$\begin{aligned} q\left(\xi^3\right)&=1-\left[2h^{-1}\left(h/2-\xi^3\right)\right]^n\Big/2,\quad \xi^3\in[0,h/2];\\ q\left(\xi^3\right)&=\left[2h^{-1}\left(h/2-\xi^3\right)\right]^n\Big/2,\quad \xi^3\in[-h/2,0]; \end{aligned} \tag{1.17}$$

Закон Торнабене [77], [78], [8] с тремя (1.18) и четырьмя (1.19) параметрами

$$q\left(\xi^3\right)=\left[1/2-z/h+b\left(1/2+z/h\right)^c\right]^p, \tag{1.18}$$

$$q\left(\xi^3\right)=\left[1-a\left(1/2-z/h\right)+b\left(1/2+z/h\right)^c\right]^p. \tag{1.19}$$

Физические постоянные ФГМ в общем случае температурозависимы [36], особенно при высоких температурах [79,80]. Большинство моделей ФГМ используют аппроксимацию (1.20) [81], или более простое приближение (1.21) [82]

$$P\left(T\right)\approx p_0\left(p_{-1}T^{-1}+1+p_1T+p_2T^2+p_3T^3\right); \tag{1.20}$$

$$P\left(T\right)\approx p_0\left(1+p_1T+p_2T^2+p_3T^3\right). \tag{1.21}$$

1.3. Общие определения и постановки задач динамики.

Рассматриваемые задачи опираются на постановку динамической задачи линейной теории упругости для тела $V\subseteq\mathbb{R}^3$ с границей $\partial V\equiv S=S_u\oplus S_\sigma$ [83]

$$\rho\ddot{u}^i=\nabla_j\left(C^{ijkl}\nabla_k u_l\right)+\rho F^i \quad \forall M\in V, \quad \forall t\in D_t; \tag{1.22}$$

$$\left(C^{ijkl}\nabla_k u_l\right)\nu_j\Big|_{M\in S_\sigma}=q^i, \quad u_i\big|_{M\in S_u}=u_i^* \quad \forall t\in D_t; \tag{1.23}$$

$$u^i\Big|_{t=t_0}=u_0^i, \quad \dot{u}^i\Big|_{t=t_0}=v_0^i, \tag{1.24}$$

$t\in D_t=\left[t_0,t_1\right]\subseteq\mathbb{R}_+\cup\left\{0\right\}$ – время. Область V отнесена к системе криволинейных координат $O\xi^1\xi^2\xi^3$. В случае бесконечной области V краевые условия (1.23) заменяются условиями ограниченности в бесконечно удаленной точке [83]

$$u_i=O\left(1\right) \quad \left(r\to\infty\right), \quad r=\sqrt{g_{mn}\xi^m\xi^n}, \tag{1.25}$$

g_{mn} – компоненты метрического тензора, $C^{ijkl}\left(\xi^m\right)$ – компоненты тензора упругих постоянных среды (в общем случае анизотропной), $\rho\left(\xi^m\right)$ – массовая плотность среды. Соотношения (1.22), (1.23) в операторной форме записи имеют вид [83]

$$\mathrm{A}\left[u_i\right]=F^j \quad \forall M\in D_\xi\times\mathbb{R}, \quad \forall t\in D_t; \tag{1.26}$$

$$\mathrm{B}\left[u_i\right]=\left\{p^j\ u_j^*\right\} \quad \forall M\in S_\sigma\vee M\in S_u, \quad \forall t\in D_t. \tag{1.27}$$

Пусть далее $g_{mn}=\delta_{mn}$, $\exists\xi^1\in\mathbb{R}$, $\xi^\alpha\in D_\xi\subset\mathbb{R}^2$. Под прогрессивной волной понимается следующее установившееся движение упругой среды [83]

$$u_i\left(\xi^m,t\right)=U_i\left(\xi^\alpha,\kappa\right)\exp\left[i\left(\omega t-\kappa\xi^1\right)\right]=U_i\left(\xi^\alpha,\kappa\right)\exp\left[i\kappa\left(ct-\xi^1\right)\right]; \tag{1.28}$$

U_i – амплитуда, κ – волновое число, ω – фазовая частота, c – фазовая скорость волны. В силу линейности операторов A, B (1.26),(1.27) приводятся к виду (1.29)

$$\begin{aligned}\mathrm{A}\left[u_i\right]&\equiv\exp\left[i\left(\omega t-\kappa\xi^1\right)\right]\mathrm{A}_{\omega,\kappa}\left[U_i\right]=F^j,\\ \mathrm{B}\left[u_i\right]&\equiv\exp\left[i\left(\omega t-\kappa\xi^1\right)\right]\mathrm{B}_{\omega,\kappa}\left[U_i\right]=\left\{p^j\ u_j^*\right\}.\end{aligned} \tag{1.29}$$

При $F^j=0$, $p^j=0$ из (1.29) следует однородная линейная краевая задача

$$\mathrm{A}_{\omega,\kappa}\left[U_i\right]=0; \quad \mathrm{B}_{\omega,\kappa}\left[U_i\right]=0. \tag{1.30}$$

Система (1.30) порождает спектральную задачу (1.31)

$$\exists U_i \neq 0 \quad \Leftarrow \quad D(\omega, \kappa) = 0, \tag{1.31}$$

где $D(\omega, \kappa) = 0$ – дисперсионное уравнение [84], следствием которого является зависимость фазовой частоты $\omega = \omega(\kappa)$ или фазовой скорости $c = c(\kappa)$ от волнового числа κ. Установление данных зависимостей является основной целью решения задачи о дисперсии прогрессивных волн в упругой среде [85-87].

Пусть $\xi^3 \in [h_-, h_+] \subset \mathbb{R}$, $h_\pm = \mathrm{Const}$, $h = h_+ - h_- > 0$, т.е. рассматривается слой толщиной h. Прогрессивные волны в слое, порождаемые интерференцией гармонических волн расширения (*p*-волн) и сдвига (*s*-волн), многократно отраженных от лицевых поверхностей, и распространяющиеся без изменения формы, называются нормальными [87]; любое волновое поле в слое может быть описано суперпозицией нормальных волн. Важным частным случаем нормальных волн являются волны Лэмба [88,89], детальное исследование которых для [90] изотропного однородного материала приведено, например, в [85,91,92].

2. МАТРИЧНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О ДИСПЕРСИИ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНЫХ ТОНКИХ ТЕЛАХ

Матричные методы были впервые разработаны для решения задачи о дисперсии сейсмических волн в неоднородной среде [93-95]; см. также [91]. Матричный подход основан на приведении уравнений движения к системе уравнений первого порядка на основе формализма Штро [96,97] или Коши [90].

В общем случае распространения в ФГМ нормальной волны (1.28) вдоль прямолинейной оси Ox^1 уравнения движения (1.22) и приводятся к операторной форме записи (1.29), причем оператор $\mathrm{A}[u^i]$ имеет следующий вид (2.1) [90,98]

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}^{ij}_{(1)} \frac{d^2}{d\varsigma^2} + \mathrm{A}^{ij}_{(2)} \frac{d}{d\varsigma^2} + \mathrm{A}^{ij}_{(3)}; \quad \mathrm{A}^{ij}_{(1)} = n_k n_l C^{iklj}; \tag{2.1}$$

$$\mathrm{A}^{ij}_{(2)} = n_k n_l \left(dC^{iklj} / d\varsigma \right) + \left(n_k \nu_l + n_l \nu_k \right) C^{iklj}; \quad \mathrm{A}^{ij}_{(3)} = \nu_k \nu_l C^{iklj} - \rho c^2 \delta^{ij}; \tag{2.2}$$

n_k – компоненты вектора единичной нормали на лицевых поверхностях пластины постоянной толщины $2h$, ν_k – компоненты единичного волнового вектора [98], c – характерная скорость распространения волны, $\varsigma = i\kappa\xi^i n_i$ – безразмерная комплексная координата [90,98]. Введение новой векторной неизвестной $\mathbf{Y}_C(\varsigma)$

$$\mathbf{Y} = \left(\mathbf{U} \quad d\mathbf{U}/d\varsigma \right) \tag{2.3}$$

обеспечивает приведение уравнения движения (1.29) с оператором A, определенным соотношениями (2.1) и (2.2), к нормальной форме Коши [90,98]

$$\frac{d}{dx^2} \mathbf{Y}_C = \mathbf{A}_C \cdot \mathbf{Y}_C, \quad \mathbf{A}_C = \begin{pmatrix} 0 & \delta^{ij} \\ -\bar{\mathrm{A}}^{ik}_{(1)} \mathrm{A}^{j}_{k(3)} & -\bar{\mathrm{A}}^{ik}_{(1)} \mathrm{A}^{j}_{k(2)} \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathrm{A}}^{ik}_{(1)} \mathrm{A}^{j}_{k(1)} = \delta^{ij}. \tag{2.4}$$

Однородные силовые краевые условия на поверхностях $\varsigma = \pm i\kappa h$ имеют вид

$$\mathbf{B}_C \cdot \mathbf{Y}_C \big|_{\varsigma = \pm i\kappa h} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{B}_C = \left(\mathrm{A}^{ij}_{(4)} \quad \mathrm{A}^{ij}_{(1)} \right) \Big|_{\varsigma = \pm h}, \quad \mathrm{A}^{ij}_{(4)} = n_k \nu_l C^{iklj}. \tag{2.5}$$

Формализм Штро [96] для ФГМ приводит к вектору состояния системы $\mathbf{Y}_S(\varsigma)$

$$\mathbf{Y}_S = \left(\mathbf{U} \quad \mathbf{S} \right); \quad \mathbf{S} = S^{i3} \mathbf{r}_i, \quad S^{i3} = \left(A^{ij}_{(1)} \, d/d\varsigma + A^{ij}_{(4)} \right) U_j \tag{2.6}$$

и, соответственно, к векторному уравнению первого порядка (1.29) в форме (2.7)

$$\frac{d}{d\varsigma}\mathbf{Y}_S=\mathbf{A}_S\cdot\mathbf{Y}_S,\quad \mathbf{A}_S=\begin{pmatrix}\mathrm{A}^{ij}_{(5)} & \mathrm{A}^{i}_{k(6)}\\ \overline{\mathrm{A}}_{(1)jk}\mathrm{A}^{kj}_{(4)} & \overline{\mathrm{A}}_{(1)jk}\end{pmatrix};\tag{2.7}$$

$$\mathrm{A}^{ij}_{(5)}=\left[n_k n_l\, d/d\varsigma-\nu_k\left(n_l+\nu_l\right)\right]C^{iklj}+\rho c^2\delta^{ij};\quad \mathrm{A}^{i}_{k(6)}=n_k\left(n_l\frac{d}{d\varsigma}+\nu_l\right)C^{klij}\overline{\mathrm{A}}_{jk(1)}.$$

Здесь S^{i3} – вектор напряжения на плоскостях $\varsigma=\mathrm{Const}$. Однородные краевые условия на поверхностях $\varsigma=\pm i\kappa h$ в случае формализма Штро принимают вид

$$\mathbf{B}_S\cdot\mathbf{Y}_S\big|_{\varsigma=\pm i\kappa h}=\mathbf{0},\quad \mathbf{B}_S=\begin{pmatrix}0 & \delta^{ij}\end{pmatrix}.\tag{2.8}$$

Решение уравнений (2.4) или (2.7) записывается так [98,99]

$$\mathbf{Y}_{C,S}=\exp\left(\varsigma\mathbf{A}_{C,S}\right)\cdot\mathbf{C}_{C,S},\tag{2.9}$$

$\mathbf{C}_{C,S}$ – комплексный вектор констант интегрирования, определяемых из (2.5), (2.8).

Дисперсионное уравнение следует при подстановке решения (2.9) из условия существования нетривиального решения (2.5) или (2.8) относительно констант $\mathbf{C}$.

2.1. Неявное решение дисперсионного уравнения для ФГ волновода.

Решение дисперсионного уравнения для ФГМ в неявном виде получено в работе [98]. Автором рассмотрено вспомогательное матричное уравнение (2.10)

$$d\mathbf{E}(\varsigma)/d\varsigma=\mathbf{A}_C(\varsigma)\cdot\mathbf{E}(\varsigma)\ \Rightarrow\ \left(d\mathbf{E}(\varsigma)/d\varsigma\right)\cdot\mathbf{E}^{-1}(\varsigma)=\mathbf{A}_C(\varsigma)\tag{2.10}$$

при $\left|\mathbf{E}_C\right|\neq 0$, имеющее решение $\mathbf{E}_C(\varsigma)=\exp\left[\mathbf{F}(\varsigma)+\mathbf{A}\right]$, где введено обозначение

$$\mathbf{F}(\varsigma)=\int\mathbf{A}_C(\varsigma)\,d\varsigma;\tag{2.11}$$

в силу (2.1) $\left|\mathrm{A}^{ij}_{(1)}\right|\neq 0,\ \left|\mathrm{A}^{ij}_{(3)}\right|\neq 0\ \Rightarrow\ \left|\mathbf{E}(\varsigma)\right|\neq 0$. Решение уравнения (2.4) имеет вид

$$\mathbf{Y}_C(\varsigma)=\mathbf{E}(\varsigma)\cdot\mathbf{C}_C.\tag{2.12}$$

Из краевых условий на поверхностях пластины, т. е. при $\varsigma=\pm i\kappa h$, следует

$$\begin{matrix}\mathbf{E}(ikh)\cdot\mathbf{C}_C=\mathbf{Y}(ikh)\\ \mathbf{E}(-ikh)\cdot\mathbf{C}_C=\mathbf{Y}(-ikh)\end{matrix}\ \Rightarrow\ \mathbf{Y}_C(-i\kappa h)=\mathbf{E}(-i\kappa h)\cdot\mathbf{E}^{-1}(i\kappa h)\cdot\mathbf{Y}_C(ikh).\tag{2.13}$$

С учетом (2.13) и взаимосвязи векторов состояния $\mathbf{Y}_C$ и $\mathbf{Y}_S$ в форме (2.14)

$$\mathbf{Y}_S=\mathbf{Z}\cdot\mathbf{Y}_C,\quad \mathbf{Z}=\begin{pmatrix}\delta^{ij} & 0\\ \mathrm{A}^{ij}_{(4)} & \mathrm{A}^{ij}_{(1)}\end{pmatrix},\quad \left|\mathbf{Z}\right|\neq 0,\tag{2.14}$$

строится передаточная матрица $\mathbf{T}(i\kappa h)=\mathbf{Z}(-ikh)\cdot\mathbf{E}(-ikh)\cdot\mathbf{E}^{-1}(ikh)\cdot\mathbf{Z}(ikh)$ [98]

$$\begin{aligned}&\mathbf{Y}_S(i\kappa h)=\mathbf{T}(i\kappa h)\cdot\mathbf{Y}_S(-i\kappa h),\\ &\mathbf{E}(-i\kappa h)\cdot\mathbf{E}^{-1}(i\kappa h)=\exp\left[-\int_{-i\kappa h}^{i\kappa h}\mathbf{A}_C(\varsigma)\,d\varsigma\right].\end{aligned}\tag{2.15}$$

Уравнение (2.15) связывает переменные Штро при $\varsigma=-i\kappa h,\ \varsigma=i\kappa h$. Следующее из (2.15) и краевых условий (2.8) Дисперсионное уравнение [98] по форме записи совпадает с дисперсионным уравнением для *однородной* пластины

$$\left|\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{I}\end{pmatrix}\cdot\mathbf{T}(i\kappa h)\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\right|=0,\quad \mathbf{I}=\left(\delta^{ij}\right).\tag{2.16}$$

В работе [98] получены неявные решения для экспоненциально-градиентной пластины ($C^{ijkl} = C_0^{ijkl} e^{\lambda x}$, $\rho = \rho_0 e^{\lambda\varsigma}$) в виде $\mathbf{E}(-i\kappa h)\cdot\mathbf{E}^{-1}(i\kappa h) = \exp\left[-2i\kappa h\mathbf{A}_0(\lambda)\right]$ и для линейно-градиентной пластины $C^{ijkl} = (1+\alpha x)C_0^{ijkl}$, $\rho = \rho_0(1+\alpha x)$ в виде $\mathbf{E}(-i\kappa h)\cdot\mathbf{E}^{-1}(i\kappa h) = \exp\left[-i\kappa h\left(\mathbf{A}_0(-i\kappa h) - \mathbf{A}_0(i\kappa h)\right)\right]$. Формализм Коши также применялся к решению дисперсионных задачам для ФГМ в работах [100,101].

Приближенное решение задачи о дисперсии волн может быть получено на основе аппроксимации ФГМ слоистым материалом. Решение (2.15) для изотропного слоя при $\rho = \mathrm{Const}$, $\lambda = (1+\alpha\zeta)^2\lambda_0$, $\mu = (1+\alpha\zeta)^2\mu_0$ получено в [102]

$$\mathbf{T} = \frac{1}{m_1 - m_2}\begin{pmatrix} m_1\eta_2 - m_2\eta_1 & (\eta_1 - \eta_2)/(\rho c_0^2) \\ -\rho c_0^2(1+\alpha h)m_1 m_2(\eta_1 - \eta_2) & (1+\alpha h)(m_1\eta_1 - m_2\eta_2) \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$
$$\eta_{1,2} = \exp\left[m_{1,2}\lg(1+\alpha h)\right], \quad m_{1,2}^2 + m + \omega^2/(\alpha c_0)^2$$

и на его базе получена постановка задачи для ФГМ с произвольным законом $q(\zeta)$. Модель линейно-градиентного слоя принята за основу в [103,104]. Метод градиентных слоев позволяет существенно снизить их число по сравнению с аппроксимацией однородными слоями (см. напр. [102-106]). Метод решения изложен в [105,107-109] на примерах для ФГ цилиндров.

2.2. Метод передаточных матриц.

Метод [93-95,110,111] опирается на постановку дисперсионной задачи (2.6)-(2.8), дополненной условиями сопряжения на границах раздела слоев

$$\mathbf{Y}^{(k-1)}(h_k) = \mathbf{Y}^{(k)}(h_k), \quad k = 0,1\ldots N-1. \quad (2.18)$$

Рассматривается условный материал, образованный пакетом слоев, т.е.

$$\xi^3 \in \bigcup_{k=0}^{N-1}[h_k, h_{k+1}] \subset \mathbb{R}, \quad \sum_{k=1}^{N} h_k = h; \quad \xi^1 \in \mathbb{R}.$$

Решение (2.9) задачи (2.6)-(2.8) для 1-го слоя может быть представлено в виде

$$\mathbf{Y}^{(1)}(h_1) = \mathbf{T}^{(1)}(h_1)\cdot\mathbf{Y}(0), \quad \mathbf{T}^{(1)}(h_1) = \exp\left(\mathbf{A}_S^{(1)}h_1\right), \ \mathbf{A}_S^{(1)} = \mathbf{A}_S^{(1)}(\omega,\kappa); \quad (2.19)$$

с учетом (2.18), (2.19) уравнение, связывающее значения $\mathbf{Y}$ при $\xi^3 = 0, h$ имеет вид

$$\mathbf{Y}(h) = \prod_{k=0}^{N-1}\mathbf{T}^{(k)}\cdot\mathbf{Y}(0). \quad (2.20)$$

Трансцендентное дисперсионное уравнение (2.21) следует из краевых условий (2.8) как условие существования нетривиального решения $\mathbf{Y}$ [110]

$$\mathbf{B}_S\cdot\mathbf{Y}(0) = 0, \quad \mathbf{B}_S\cdot\left[\prod_{k=0}^{N-1}\mathbf{T}^{(k)}\cdot\mathbf{Y}(0)\right] = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\left|\mathbf{B}_S\cdot\prod_{k=0}^{N-1}\mathbf{T}^{(k)}(\omega,\kappa)\cdot\bar{\mathbf{B}}_S\right| = 0, \quad \bar{\mathbf{B}}_S = \begin{pmatrix}\delta_{ij} & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}. \quad (2.21)$$

В силу (2.20) размерность матрицы в (2.21) не зависит от числа слоев. В то же время метод неустойчив из-за экспонент с действительными положительными показателями в (2.19), вызывающих переполнение [111]; неустойчивость возникает при росте величины $\omega h c^{-1}$ хотя бы для одного слоя (FST, т.е. «frequency-slowness-thickness» проблема, подробно описанная в [111], см. [112-114]); таким образом, метод мало пригоден для высокочастотных волн, а в случае ФГМ переход к модели неоднородных слоев не приводит к существенному улучшению. В ряде современных работ устойчивое решение задачи на базе метода передаточных матриц получено за счет что вычислений на базе алгоритмов, предложенных в [115,116], с мантиссой до ~50…1000 десятичных разрядов [90,99,117,118]. Другой подход состоит в изменении формулировки метода. В ранних работах [112,119-122] устойчивость улучшалась методом дельта-операторов. В [123] повышение устойчивости метода достигнуто путем замены неизвестной $\mathbf{Y}$

$$\left(\sigma^{i3}_{(k-1)} \quad \sigma^{i3}_{(k)}\right)^{\mathrm{T}} = \tilde{\mathbf{T}}^{(k)} \cdot \left(u_i^{(k-1)} \quad u_i^{(k)}\right)^{\mathrm{T}}. \tag{2.22}$$

Здесь $\mathbf{T}^{(k)}$ – блочная матрица 4×4, имеющая смысл жесткости k-го слоя. Рекуррентное соотношение для передаточной матрицы системы K слоев имеет вид

$$\tilde{\mathbf{T}}^{(K)} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{T}}_{11}^{(K-1)} + \tilde{\mathbf{T}}^{(K-1)} \cdot \left(\tilde{\mathbf{T}}_{11}^{(k)} - \tilde{\mathbf{T}}_{22}^{(K-1)}\right)^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{T}}_{21}^{(K-1)} & -\tilde{\mathbf{T}}_{12}^{(K-1)} \cdot \left(\tilde{\mathbf{T}}_{11}^{(k)} - \tilde{\mathbf{T}}_{22}^{(K-1)}\right)^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{T}}_{12}^{(k)} \\ \tilde{\mathbf{T}}_{21}^{(k)} \cdot \left(\tilde{\mathbf{T}}_{11}^{(k)} - \tilde{\mathbf{T}}_{22}^{(K-1)}\right)^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{T}}_{21}^{(K-1)} & \tilde{\mathbf{T}}_{22}^{(k)} - \tilde{\mathbf{T}}_{21}^{(k)} \cdot \left(\tilde{\mathbf{T}}_{11}^{(k)} - \tilde{\mathbf{T}}_{22}^{(K-1)}\right)^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{T}}_{12}^{(k)} \end{pmatrix},$$

где $\tilde{\mathbf{T}}^{(K-1)}$ – матрица для системы $K-1$ слоя, $\tilde{\mathbf{T}}^{(k)}$ – матрица k-слоя. Метод матриц жесткости [123] для системы N слоев приводит к $55(N-1)$ операциям умножения; в случае метода передаточных матриц требуется $64(N-1)$ операция умножения. Асимптотический вариант метода описан в работах [124,125]; см. также [126].

Метод матриц применяется в настоящее время, в том числе для ФГ волноводов. Так, в работе [127] получено решение для волн Лэмба в упругих ФГМ, в [128] – для волн Лява в пьезоэлектроупругих экспоненциальных ФГМ, а в [129] – для волн напряжений в ФГ цилиндрических оболочках с жидкостью. Метод [123] использован для исследования волн Лява в пьезоэлектроупругих ФГМ [130].

2.3. Метод матриц рассеяния.

Метод матриц рассеяния предложен в работе [131] для устранения неустойчивости метода передаточных матриц при больших ωhc^{-1}. Постановка соответствует (2.6)-(2.8), а вектор состояния $\mathbf{Y}$ определен суперпозицией 6 парциальных мод волн, характеризующихся собственными значениями $s = v^{-1}$

$$\mathbf{Y}\left(\xi^3\right) = \mathbf{F}^{(k)} \cdot \boldsymbol{\Delta}^{(k)}\left(\xi^3\right) \cdot \mathbf{a}^{(k)}, \tag{2.23}$$

$$\boldsymbol{\Delta}^{(k)} = \mathrm{diag}\left[\exp\left(-2i\pi\omega s_{2,i}\xi^3\right)\right].$$

Здесь $\mathbf{F}^{(k)}$ – 6×6 матрица собственных векторов, матрица $\boldsymbol{\Delta}^{(k)}$ описывает зависимость компонентов $\mathbf{Y}$ от ξ^3, $\mathbf{a}^{(k)}$ – вектор амплитуд парциальных волн. Передаточная матрица связывает векторы на двух поверхностях раздела $\xi^3_{(k)}$, $\xi^3_{(k-1)}$:

$$\mathbf{Y}\left(\xi^3_{(k)}\right) = \mathbf{T}^{(k-1)}_{(k)} \cdot \mathbf{Y}\left(\xi^3_{(k-1)}\right), \quad \mathbf{T}^{(k-1)}_{(k)} = \mathbf{F}^{(k)} \cdot \boldsymbol{\Delta}^{(k)}\left(h_{(k)}\right)\left[\mathbf{F}^{(k)}\right]^{-1}. \tag{2.24}$$

Для системы слоев передаточная матрица записывается следующим образом

$$\mathbf{Y}\left(\xi^3_{(m)}\right) = \prod\nolimits_{k=0}^{m} \mathbf{T}^{(k-1)}_{(k)}. \tag{2.25}$$

Переходные матрицы слоя (2.24) и системы (2.25) содержат экспоненты, порождающие неустойчивость метода. Идея авторов [131] заключается в явном разделении парциальных мод в слое $\mathbf{\Delta}^{(k)}\left(\xi^3\right)\cdot\mathbf{a}^{(k)}$ на падающие и отраженные моды

$$\mathbf{g}^{(k)}\left(\xi^3\right)\equiv\mathbf{\Delta}^{(k)}\left(\xi^3\right)\cdot\mathbf{a}^{(k)}=\begin{pmatrix}\mathbf{\Delta}^{(k+)}\left(\xi^3\right) & 0\\ 0 & \mathbf{\Delta}^{(k-)}\left(\xi^3\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{a}^{(k+)}\\ \mathbf{a}^{(k-)}\end{pmatrix}. \tag{2.26}$$

Здесь «$+$» обозначает отраженную моду, «$-$» – падающую. В отсутствие источников на поверхностях отраженная от поверхности раздела однозначно определяется падающими волнами в каждом слое. Матрица $\mathbf{R}^{(k)}$, описывающая отражение волн от нижней поверхности k-го слоя, определяется соотношением

$$\mathbf{g}^{(k-)}\left(\xi^3_{(k-1)}\right)=\mathbf{R}^{(k)}\cdot\mathbf{g}^{(k+)}\left(\xi^3_{(k-1)}\right). \tag{2.27}$$

Рекуррентное соотношение, аналогичное (2.25), строится следующим образом. Однородное краевое условие на нижней поверхности пластины имеет вид

$$\mathbf{g}^{(1)}\left(\xi^3_{(0)}\right)=\left[\mathbf{F}^{(1)}\right]^{-1}\cdot\left(\mathbf{I}\quad\mathbf{0}\right)^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{Y}\left(\xi^3_{(0)}\right)\equiv\left(\mathbf{A}\quad\mathbf{B}\right)^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{b}, \tag{2.28}$$

где $\mathbf{A}_{(4\times4)}$, $\mathbf{B}_{(4\times4)}$; отсюда с учетом (2.27) $\mathbf{R}^{(1)}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}^{-1}$. Далее, падающие и отраженные от поверхностей раздела слоев моды связаны соотношением (2.29)

$$\mathbf{g}^{(k-)}\left(\xi^3_{(k)}\right)=\mathbf{\Delta}^{(k-)}\left(-h_k\right)\cdot\mathbf{R}^{(k)}\cdot\mathbf{\Delta}^{(k+)}\left(h_k\right)\cdot\mathbf{g}^{(k+)}\left(\xi^3_{(k)}\right). \tag{2.29}$$

С учетом (2.29) и условия непрерывности вектора состояния на границе ξ^3_k

$$\mathbf{g}^{(k+1)}\left(\xi^3_{(k)}\right)=\left(\mathbf{F}^{(k+1)}\right)^{-1}\cdot\mathbf{F}^{(k)}\cdot\mathbf{g}^{(k)}\left(\xi^3_{(k)}\right) \tag{2.30}$$

матрица отражения для $k+1$-го слоя определяется произведением $\mathbf{R}^{(k+1)}=\mathbf{D}\cdot\mathbf{C}^{-1}$,

$$\left(\mathbf{C}\quad\mathbf{D}\right)^{\mathrm{T}}\equiv\left(\mathbf{F}^{(k+1)}\right)^{-1}\cdot\mathbf{F}^{(k)}\cdot\left(\mathbf{I}\quad\mathbf{\Delta}^{(k-)}\left(-h_k\right)\cdot\mathbf{R}^{(k)}\cdot\mathbf{\Delta}^{(k+)}\left(h_k\right)\right)^{\mathrm{T}} \tag{2.31}$$

и не содержит, в отличие от традиционного метода переходных матриц, больших чисел, так как элементы диагональных матриц $\mathbf{\Delta}^{(k-)}\left(-h_k\right)$ и $\mathbf{\Delta}^{(k+)}\left(h_k\right)$ по модулю не превосходят единицы, что гарантирует устойчивость рекуррентных вычислений.

2.4. Метод реверберационных матриц.

Метод реверберационных матриц был предложен первоначально для задач динамики плоских ферм, рам [132], затем для задач акустики стратифицированных жидкостей [133] и, наконец, для слоистых упругих тел [134,135]. В [136] метод использован для построения дисперсионных кривых ФГ пластины в приближении слоистого материала с однородными изотропными слоями. Задача динамики поставлена в потенциалах [85], [83]: $\partial^2\varphi/\partial t^2=c_1^2\Delta\varphi$, $\partial^2\boldsymbol{\psi}/\partial t^2=c_2^2\Delta\boldsymbol{\psi}$

$$\begin{gathered}\varphi=\varphi_0\left(\xi^3\right)\exp i\left(\kappa\xi^1-\omega t\right),\quad\psi=\psi_0\left(\xi^3\right)\exp i\left(\kappa\xi^1-\omega t\right)\quad\Rightarrow\\ \varphi_0\left(\xi^3\right)=A_1\exp\left(iC_1\xi^3\right)+A_2\exp\left[iC_1\xi^3\right],\quad C_1=\sqrt{\omega^2/c_1^2-\kappa^2};\\ \psi_0\left(\xi^3\right)=B_1\exp\left(iC_2\xi^3\right)+B_2\exp\left(iC_2\xi^3\right),\quad C_2=\sqrt{\omega^2/c_2^2-\kappa^2};\end{gathered} \tag{2.32}$$

$c_1=\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$, $c_2=\sqrt{\mu/\rho}$. Перемещения и напряжения, соответствующие плоской задаче, при учете решения (2.32) записываются следующим образом [136]

$$\begin{aligned}
u_1&=\left[i\kappa\left(A_1e^{iC_1\xi^3}+A_2e^{-iC_1\xi^3}\right)-iC_2\left(B_1e^{iC_2\xi^3}-B_2e^{-iC_2\xi^3}\right)\right]e^{i\left(\kappa\xi^1-\omega t\right)};\\
u_2&=\left[iC_1\left(A_1e^{iC_1\xi^3}+A_2e^{-iC_1\xi^3}\right)+i\kappa\left(B_1e^{iC_2\xi^3}+B_2e^{-iC_2\xi^3}\right)\right]e^{i\left(\kappa\xi^1-\omega t\right)};
\end{aligned}\tag{2.33}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{33}&=\left[-\mu\left(C_2^2-\kappa^2\right)\left(A_1e^{iC_1\xi^3}+A_2e^{iC_2\xi^3}\right)-2\mu\kappa C_2\left(B_1e^{iC_2\xi^3}-B_2e^{-iC_2\xi^3}\right)\right]e^{i\left(\kappa\xi^1-\omega t\right)};\\
\sigma_{13}&=\left[-2\mu\kappa C_1\left(A_1e^{i\kappa\xi^3}-A_2e^{-i\kappa\xi^3}\right)+\mu\left(C_2^2-\kappa^2\right)\left(B_1e^{iC_2\xi^3}-B_2e^{-iC_2\xi^3}\right)\right]e^{i\left(\kappa\xi^1-\omega t\right)}.
\end{aligned}$$

Идея метода [134,136] заключается во введении локальных координат $x^{k(k+1)}$, $z^{k(k+1)}$, связанных с k-й поверхностью раздела слоев материала, а также двухиндексной нумерации слоев: $k(k+1)$-й слой толщиной $h^{k(k+1)}=h^{(k+1)k}$ ограничен k-й и $k+1$-й поверхностями. Так, на поверхности k определены координаты $x^{k(k-1)}=-x^{k(k+1)}$, $z^{k(k+1)}=h^{k(k+1)}-z^{(k+1)k}$. Для физических констант слоя полагаются справедливыми условия симметрии: $\lambda^{k(k-1)}=\lambda^{(k-1)k}$, $\mu^{k(k+1)}=\mu^{(k+1)k}$.

Решение (2.33) для $k(k-1)$-го слоя в его локальных координатах имеет вид

$$\begin{aligned}
u_1^{k(k-1)}&=\left[i\kappa\left(A_1^{k(k-1)}e^{iC_1^kz^{k(k-1)}}+A_2^{k(k-1)}e^{-iC_1^kz^{k(k-1)}}\right)-\right.\\
&\left.-iC_2^k\left(B_1^{k(k-1)}e^{iC_2^kz^{k(k-1)}}-B_2^{k(k-1)}e^{-iC_2^kz^{k(k-1)}}\right)\right]e^{i(\kappa x-\omega t)};
\end{aligned}\tag{2.34}$$

$$\begin{aligned}
u_3^{k(k-1)}&=\left[iC_1^k\left(A_1^{k(k-1)}e^{iC_1^kz^{k(k-1)}}-A_2^{k(k-1)}e^{-iC_1^kz^{k(k-1)}}\right)+\right.\\
&\left.+i\kappa\left(B_1^{k(k-1)}e^{iC_2^kz^{k(k-1)}}+B_2^{k(k-1)}e^{-C_2^kz^{k(k-1)}}\right)\right]e^{i(\kappa x-\omega t)};
\end{aligned}\tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{33}^{k(k-1)}&=\left[-\mu_k\left(\left(C_2^k\right)^2-\kappa^2\right)\left(A_1^{k(k-1)}e^{iC_1^kz^{k(k-1)}}+A_2^{k(k-1)}e^{-iC_1^kz^{k(k-1)}}\right)-\right.\\
&\left.-2\mu_k\kappa C_2^k\left(B_1^{k(k-1)}e^{iC_2^kz^{k(k-1)}}-B_2^{k(k-1)}e^{-iC_2^kz^{k(k-1)}}\right)\right]e^{i(\kappa x-\omega t)};
\end{aligned}\tag{2.36}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{13}^{k(k-1)}&=\left[-2\mu_k\kappa C_1^k\left(A_1^{k(k-1)}e^{iC_1^kz^{k(k-1)}}-A_2^{k(k-1)}e^{-iC_1^kz^{k(k-1)}}\right)+\right.\\
&\left.+\mu_k\left(\left(C_2^k\right)^2-\kappa^2\right)\left(B_1^{k(k-1)}e^{iC_2^kz^{k(k-1)}}+B_2^{k(k-1)}e^{-iC_2^kz^{k(k-1)}}\right)\right]e^{i(\kappa x-\omega t)}.
\end{aligned}\tag{2.37}$$

На k-й границе раздела $\left(z^{k(k-1)}=z^{k(k+1)}=0\right)$ ставятся условия непрерывности

$$u_1^{k(k-1)}=u_1^{k(k+1)};\quad -u_3^{k(k-1)}=u_3^{k(k+1)};\quad \sigma_{33}^{k(k-1)}=\sigma_{33}^{k(k+1)};\quad -\sigma_{13}^{k(k-1)}=\sigma_{13}^{k(k+1)}\tag{2.38}$$

с учетом (2.34)-(2.37) условия сопряжения решений (2.38) записываются в виде

$$\mathbf{d}^{(k)}=\mathbf{S}^{(k)}\cdot\mathbf{a}^{(k)},\ \mathbf{S}^{(k)}=\left[\widehat{\mathbf{S}}^{(k)}\right]^{-1}\cdot\breve{\mathbf{S}}^{(k)};\ \widehat{\mathbf{S}}^{(k)}=\left(S_{\alpha\beta}^{(k)}\right)_{4\times4},\ \breve{\mathbf{S}}^{(k)}=\left(S_{\alpha\beta}^{(k)}\right)_{4\times4};\tag{2.39}$$

$$\widehat{S}_{11}^{(k)}=-\breve{S}_{11}^{(k)}=-\widehat{S}_{13}^{(k)}=\breve{S}_{13}^{(k)}=\widehat{S}_{22}^{(k)}=-\breve{S}_{22}^{(k)}=\widehat{S}_{24}^{(k)}=-\breve{S}_{24}^{(k)}=\kappa;$$

$$\widehat{S}_{12}^{(k)}=\breve{S}_{12}^{(k)}=-C_2^k;\quad \widehat{S}_{14}^{(k)}=\widehat{S}_{14}^{(k)}=C_2^{k+1};\quad \widehat{S}_{21}^{(k)}=\breve{S}_{21}^{(k)}=C_1^k;\quad \widehat{S}_{23}^{(k)}=\breve{S}_{23}^{(k)}=C_1^{k+1};$$

$$\widehat{S}_{31}^{(k)}=-\breve{S}_{31}^{(k)}=\widehat{S}_{42}^{(k)}=-\breve{S}_{42}^{(k)}=-\mu_k\left(\left(C_2^k\right)^2-\kappa^2\right);\quad \widehat{S}_{32}^{(k)}=\breve{S}_{32}^{(k)}=-2\mu_kC_2^k;$$

$$\widehat{S}_{33}^{(k)} = -\breve{S}_{33}^{(k)} = \widehat{S}_{44}^{(k)} = -\breve{S}_{44}^{(k)} = -\mu_{k+1}\left(\left(C_2^{k+1}\right)^2 - \kappa^2\right);$$

$$\widehat{S}_{34}^{(k)} = \breve{S}_{34}^{(k)} = \widehat{S}_{41}^{(k)} = \breve{S}_{41}^{(k)} = 2\mu_{k+1}\kappa C_2^{k+1}; \quad \widehat{S}_{43}^{(k)} = \breve{S}_{43}^{(k)} - 2\mu_{k+1}\kappa C_1^{k+1}.$$

Здесь $\mathbf{a}^{(k)} = \left(A_2^{k(k-1)}\ B_2^{k(k-1)}\ A_2^{k(k+1)}\ B_2^{k(k+1)}\right)$ – вектор амплитуд падающих волн, $\mathbf{d}^{(k)} = \left(A_1^{k(k-1)}\ B_1^{k(k-1)}\ A_1^{k(k+1)}\ B_1^{k(k+1)}\right)$ – вектор амплитуд излученных волн. Основное уравнение (2.39) связывает амплитуды волн на *k*-й поверхности раздела слоев. Однородные краевые условия на лицевых поверхностях пластины имеют вид

$$\mathbf{d}^{(0)} = \mathbf{S}^{(0)} \cdot \mathbf{a}^{(0)}, \quad \mathbf{d}^{(N)} = \mathbf{S}^{(N)} \cdot \mathbf{a}^{(N)}; \quad \mathbf{S}^{(0,N)} = \left[\widehat{\mathbf{S}}^{(0,N)}\right]^{-1} \cdot \breve{\mathbf{S}}^{(0,N)}; \qquad (2.40)$$

$$\widehat{\mathbf{S}}^{(0,N)} = \begin{pmatrix} \left(C_2^{1,N}\right)^2 - \kappa^2 & 2\kappa C_2^{1,N} \\ -2\kappa C_1^{1,N} & \left(C_2^{1,N}\right)^2 - \kappa^2 \end{pmatrix}; \quad \breve{\mathbf{S}}^{(0,N)} = \begin{pmatrix} \kappa^2 - \left(C_2^{1,N}\right)^2 & 2\kappa C_2^{1,N} \\ -2\kappa C_1^{1,N} & \kappa^2 - \left(C_2^{1,N}\right)^2 \end{pmatrix}.$$

Ансамблирование матриц (2.39)приводит к системе $4N$ уравнений

$$\mathbf{d} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{a}, \quad \mathbf{S} = \operatorname{diag}\left(\mathbf{S}^{(0)}\ \mathbf{S}^{(1)}\ \ldots\ \mathbf{S}^{(N)}\right), \qquad (2.41)$$

позволяющей исключить амплитуды излученных волн $\mathbf{d} = \left(\mathbf{d}^{(0)} \ldots \mathbf{d}^{(N)}\right)^{\mathrm{T}}$. Так как волна, излученная источником на *k*-й поверхности в системе координат $x, z^{k(k-1)}$, является волной, падающей на *k*-ю поверхность в системе координат $x, z^{(k-1)k}$, то

$$\left(A_2^{(k-1)k}\ B_2^{(k-1)k}\ A_2^{k(k-1)}\ B_2^{k(k-1)}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbf{P}^{(k-1)k} \cdot \left(A_1^{k(k-1)}\ B_1^{k(k-1)}\ A_1^{(k-1)k}\ B_1^{(k-1)k}\right), \quad (2.42)$$

$$\mathbf{P}^{(k-1)k} = \operatorname{diag}\left(e^{iC_1^k h_k}\ -e^{iC_2^k h_k}\ e^{iC_1^k h_k}\ -e^{iC_2^k h_k}\right).$$

Уравнение (2.42) определяет сдвиг фаз при перемене координат, $\mathbf{P}$ – глобальная матрица фаз. Вектор амплитуд падающих волн имеет следующий вид

$$\mathbf{a} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{d}, \quad \mathbf{U} = \operatorname{diag}\left(\mathbf{U}^0\ \mathbf{U}^0 \ldots \mathbf{U}^0\right), \quad \mathbf{U}_{4\times4}^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{2\times2} & \mathbf{I}_{2\times2} \\ \mathbf{I}_{2\times2} & \mathbf{0}_{2\times2} \end{pmatrix}. \qquad (2.43)$$

С учетом (2.41), (2.43) уравнение для амплитуд излученных волн $\mathbf{d}$ имеет вид

$$\left(\mathbf{I} - \mathbf{R}\right) \cdot \mathbf{d} = 0, \quad \mathbf{R} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{U}, \qquad (2.44)$$

условием существования решения $\mathbf{d} \not\equiv 0$ является дисперсионное уравнение (2.45)

$$\left|\mathbf{I} - \mathbf{R}\right| = 0. \qquad (2.45)$$

Так как ни один элемент матриц рассеяния $\mathbf{S}$, фаз $\mathbf{P}$ и перестановок $\mathbf{U}$ не содержит экспоненциально растущих членов, метод [136] безусловно устойчив при больших частотах и волновых числах, но неустойчив при частотах, близких к нулю. В работе [137] модифицированный метод реверберационных матриц с новым определением компонентов вектора состояния применен к решению задачи о динамике пьезоэлектроупругого полого ФГ цилиндра с жидким наполнителем.

2.5. Метод глобальных матриц.

Метод предложен в работах [138-142]; см. также [143]. Задача динамики однородного изотропного слоя формулируется в потенциалах

$$\varphi = A_L \exp i\left(\kappa\xi^1 - \omega t\right), \quad \left|\boldsymbol{\psi}\right| = A_S \exp i\left(\kappa\xi^1 - \omega t\right),$$

A_L, A_S – амплитуды волн дилатации и сдвига; перемещения и напряжения в слое связаны с амплитудными величинами следующим матричным уравнением [111]

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_3 & \sigma_{33} & \sigma_{13} \end{pmatrix} = \mathbf{D}\cdot\begin{pmatrix} A_{L+} & A_{L-} & A_{S+} & A_{S-} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \kappa g_1 & \kappa g_1^{-1} & C_2 g_2 & -C_2 g_2^{-1} \\ C_1 g_1 & -C_1 g_1^{-1} & -\kappa g_2 & -\kappa g_2^{-1} \\ i\rho B g_1 & -i\rho B g_1^{-1} & -2i\rho\kappa c_2^2 C_2 g_2 & 2i\rho\kappa c_2^2 C_2 g_2^{-1} \\ 2i\kappa c_2^2 C_1 g_1 & -2i\rho\kappa c_2^2 C_1 g_1^{-1} & i\rho B g_2 & i\rho B g_2^{-1} \end{pmatrix} \qquad (2.46)$$

$$g_1 = \exp\left(iC_1\xi^3\right), \quad g_2 = \exp\left(iC_2\xi^3\right), \quad B = \omega^2 - 2c_2^2\kappa^2; \qquad (2.47)$$

$A_{L,S+}$, $A_{L,S-}$ – амплитуды волн, набегающих на границу смежных слоев сверху и снизу, соответственно. Условия непрерывности решения на границе имеют вид

$$\mathbf{D}_B^{(k-1)}\cdot\left(A_{L+}^{(k-1)}\ A_{L-}^{(k-1)}\ A_{S+}^{(k-1)}\ A_{S-}^{(k-1)}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbf{D}_T^{(k)}\cdot\left(A_{L+}^{(k)}\ \ A_{L-}^{(k)}\ \ A_{S+}^{(k)}\ \ A_{S-}^{(k)}\right)^{\mathrm{T}} \Rightarrow$$

$$\left(\mathbf{D}_B^{(k-1)}\ \ -\mathbf{D}_T^{(k)}\right)\left(A_{L+}^{(k-1)}\ A_{L-}^{(k-1)}\ A_{S+}^{(k-1)}\ A_{S-}^{(k-1)}\ A_{L+}^{(k)}\ A_{L-}^{(k)}\ A_{S+}^{(k)}\ A_{S-}^{(k)}\right) = 0. \qquad (2.48)$$

При условии движения волн $L+$, $S+$ от верхней поверхности слоя, волн $L-$ и $S-$ – от нижней поверхности слоя, матрицы $\mathbf{D}_B^{(k-1)}$ и $\mathbf{D}_T^{(k)}$, следующие из (2.46) и входящие в краевые условия (2.48) и связывающие вектор состояния на нижней поверхности $k-1$-го слоя и верхней поверхности k-го слоя, записываются так

$$\mathbf{D}_T = \begin{pmatrix} \kappa & \kappa g_1 & C_2 & -C_2 g_2 \\ C_1 & -C_1 g_1 & -\kappa & -\kappa g_2 \\ i\rho B & i\rho B g_1 & -2i\rho\kappa c_2^2 C_2 & 2i\rho\kappa c_2^2 C_2 g_2 \\ 2i\rho\kappa c_2^2 C_1 & -2i\rho\kappa c_2^2 C_1 g_1 & i\rho B & i\rho B g_2 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{D}_B = \begin{pmatrix} \kappa g_1 & \kappa & C_2 g_2 & -C_2 \\ C_1 g_1 & -C_1 & -\kappa g_2 & -\kappa \\ i\rho B g_1 & i\rho B & -2i\rho\kappa c_2^2 C_2 g_2 & 2i\rho\kappa c_2^2 C_2 \\ 2i\rho\kappa c_2^2 C_1 g_1 & -2i\rho\kappa c_2^2 C_1 & i\rho B g_2 & i\rho B \end{pmatrix}.$$

Система условий сопряжения решений (2.48) для всех слоев имеет вид [111]

$$\mathbf{D}^{\Sigma}\cdot\mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{D}^{\Sigma} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_B^{(1)} & -\mathbf{D}_T^{(2)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_B^{(2)} & -\mathbf{D}_T^{(3)} & \mathbf{0} & \ldots \end{pmatrix}. \qquad (2.49)$$

$\mathbf{A} = \left(\mathbf{A}^{(1)}\ \mathbf{A}^{(2)}\ \mathbf{A}^{(3)}\ \ldots\right)$ – ансамблированный вектор амплитуд. Дисперсионное уравнение $\left|\mathbf{D}^{\Sigma}\right| = 0$ – условие существования $\mathbf{A} \not\equiv 0$. Так как $\mathbf{D}^{\Sigma}$ содержит только затухающие экспоненты [111], метод устойчив, однако размерность матрицы $\mathbf{D}^{\Sigma}$ равна $4(N-1)$, где N – число слоев, что требует специальных алгоритмов поиска корней характеристического уравнения [144]. Кроме того, матрица $\mathbf{D}^{\Sigma}$ вырождается при близких волновых числах пластины и k-го слоя, т.е. при отсутствии взаимодействия волн в слое, движущихся вдоль его границ [111].

2.6. Метод рядов Пеано.

Метод предложен в работах [145] и [146]. Рассматривается нормальная волна

$$u_i\left(\xi^1,\xi^3,t\right)=A_i\left(\xi^3\right)e^{i\kappa\left(\xi^1-ct\right)},\quad \sigma_{i3}\left(\xi^1,\xi^3,t\right)=F_i\left(\xi^3\right)e^{i\kappa\left(\xi^1-ct\right)}, \tag{2.50}$$

$c=\omega/\kappa$ – фазовая скорость волны. Аналогично (2.6) вводится вектор состояния $\mathbf{Y}$,

$$\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}\mathbf{A} & i\kappa\mathbf{F}\end{pmatrix} \tag{2.51}$$

причем авторами рассмотрены различные варианты – формализмы Штро (2.51) [96], Томсона-Хаскелла [93], [95], Ингебригтсена-Тоннинга [147] в рамках единой формулировки (см. [145]). Уравнение (2.7) записывается следующим образом

$$\left(\mathbf{Q}-d/d\xi^3\right)\mathbf{Y}=0,\quad \mathbf{Q}=\mathbf{Q}\left(\xi^3,\kappa,\omega\right), \tag{2.52}$$

пара аргументов матричной функции $\mathbf{Q}$ – (κ,ω), $\left(\omega,c^{-1}\right)$ либо (κ,c) определяется применяемой формулировкой [93], [95], [96], [147]. Решение (2.52) имеет вид

$$\mathbf{Y}\left(\xi^3\right)=\mathbf{M}\left(\xi^3,\xi_0^3\right)\cdot\mathbf{Y}\left(\xi_0^3\right);\quad \mathbf{M}\left(\xi^3,\xi_0^3\right)=\mathbf{N}\left(\xi^3\right)\cdot\mathbf{N}^{-1}\left(\xi_0^3\right), \tag{2.53}$$

$\mathbf{N}=\left(\mathbf{Y}_1\ldots\mathbf{Y}_6\right)$ – фундаментальная система решений, $\mathbf{M}\left(\xi^3,\xi_0^3\right)$ – матрицант [148]. В частном случае однородной среды $\mathbf{Y}_\alpha\left(\xi^3\right)=\mathbf{\Psi}_\alpha\exp i\left(\kappa_\alpha\xi^3\right)$, где $\mathbf{\Psi}_\alpha$ – собственные векторы неполупростой матрицы $\mathbf{Q}$ [148], следовательно, $\mathbf{M}\left(\xi^3,\xi_0^3\right)=\exp\left[\left(\xi^3-\xi_0^3\right)\mathbf{Q}\right]$. В случае слоисто-однородной модели ФГМ с N слоями

$$\mathbf{M}_N\left(\xi^3,\xi_0^3\right)=\prod_{k=N}^{1}\exp\left(2h_k\mathbf{Q}^{(k)}\right). \tag{2.54}$$

В общем случае ФГМ матрицант определяется мультипликативным интегралом Вольтерры как $\mathbf{M}\left(\xi^3,\xi_0^3\right)=\lim_{N\to\infty}\mathbf{M}_N\left(\xi^3,\xi_0^3\right)$, т. е. рядом Пеано [148]

$$\mathbf{M}\left(\xi^3,\xi_0^3\right)=\mathbf{I}+\int_{\xi_0^3}^{\xi^3}\mathbf{Q}(\zeta)d\zeta+\int_{\xi_0^3}^{\xi^3}\int_{\xi_0^3}^{\zeta}\mathbf{Q}(\zeta)\cdot\mathbf{Q}(\zeta')d\zeta'd\zeta+\ldots \tag{2.55}$$

Решение (2.55) содержит (2.54) как частный случай и позволяет моделировать нормальные волны в слоистых композиционных материалах с ФГ слоями [145].

В случае задачи для ФГ пластины с однородными краевыми условиями на поверхностях $\xi^3=\xi_-^3$, $\xi^3=\xi_+^3$ матрицант записывается в блочной форме [145]

$$\mathbf{M}\left(\xi^3,\xi_0^3\right)=\begin{pmatrix}\mathbf{M}_1\left(\xi^3,\xi_0^3\right) & \mathbf{M}_3\left(\xi^3,\xi_0^3\right)\\ \mathbf{M}_2\left(\xi^3,\xi_0^3\right) & \mathbf{M}_4\left(\xi^3,\xi_0^3\right)\end{pmatrix} \tag{2.56}$$

и является функцией распространения. В силу (2.53) однородным силовым, кинематическим или смешанным краевым условиям соответствует обращение в нули определителей соответствующих структуре $\mathbf{Y}$ блоков матриц, а именно

$$\sigma_{i3}\big|_{\xi_\pm^3}=0\quad\Rightarrow\quad\left|\mathbf{M}_3\left(\xi_-^3,\xi_+^3\right)\right|=0; \tag{2.57}$$

$$u_i\big|_{\xi_\pm^3}=0\quad\Rightarrow\quad\left|\mathbf{M}_2\left(\xi_-^3,\xi_+^3\right)\right|=0; \tag{2.58}$$

$$u_i\big|_{\xi_+^3}=0,\quad\sigma_{i3}\big|_{\xi_-^3}=0\quad\Rightarrow\quad\left|\mathbf{M}_4\left(\xi_-^3,\xi_+^3\right)\right|=0; \tag{2.59}$$

$$\sigma_{i3}\Big|_{\xi_+^3}=0,\quad u_i\Big|_{\xi_-^3}=0\quad\Rightarrow\quad\left|\mathbf{M}_1\left(\xi_-^3,\xi_+^3\right)\right|=0. \tag{2.60}$$

Уравнения (2.57)-(2.60) являются дисперсионными соотношениями. Авторами [145] рассмотрен общий случай симметрии матрицы $\mathbf{Q}$. В работах [149] и [150] метод рядов Пеано обобщен на случай пьезоэлектроупругих ФГ пластин, а в [146] – на случай анизотропных пьезоэлектроупругих ФГ волноводов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Преимуществом матричных методов решения задачи о дисперсии нормальных волн является возможность принять за основу точное решение задачи не только для однородного элементарного слоя, но и для некоторых специальных случаев градиентных слоев при дискретном моделировании ФГ волновода, что позволяет достичь необходимой точности решения при относительно малом количестве слоев. При этом подходы на базе наиболее простого метода передаточных матриц, приводят к результирующей матрице задачи, размерность которой не зависит от числа слоев модели. С другой стороны, проблема неустойчивости вычислений метода передаточных матриц до сих пор не имеет исчерпывающего решения и требует вычислений с мантиссой до 100…1000 десятичных разрядов при высоких частотах. Метод реверберационных матриц обеспечивает устойчивость при высоких частотах, однако неустойчив при низких, кроме того, размерность матрицы зависит от числа слоев. Метод глобальных матриц также обеспечивает устойчивость вычислений при высоких частотах, однако размерность матрицы также зависит от числа слоев, кроме того, при определенных условиях матрица близка к вырожденной, что усложняет поиск корней характеристического уравнения. Перспективными направлениями развития матричных методов решения задач о дисперсии волн представляются метод рядов Пеано, обеспечивающий решение задачи для волновода с произвольной неоднородностью. Общей проблемой матричных методов является необходимость поиска корней характеристического уравнения, требующих сложных итерационных алгоритмов, особенно в случае вязкоупругих волноводов с диссипацией. Метод матриц жесткости также перспективен, так как сочетается с асимптотическим подходом и методами рекурсивного интегрирования [151] для ФГМ с произвольной зависимостью изменения физических констант от координат, кроме того, не требует итерационных алгоритмов, поскольку решение дисперсионной задачи сводится к классической проблеме собственных значений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Birman V., Byrd L.W. *Modeling and analysis of functionally graded materials and structures* // ASME Applied Mechanics Reviews. – 2007. – Vol.60. – Pp.195-216.
2. Udupa G., Shrikantha Rao S., Gangadharan R.V. *Functionally graded composite materials: An overview* // Procedia Materials Science. – 2014. – Vol.5. – Pp.1291-1299.
3. Gupta A., Talha M. *Recent development in modeling and analysis of functionally graded materials and structures* // Progress in Aerospace Science. – 2015. – Vol.79. – Pp.1-14.
4. Naebe M., Shrivanimoghaddam K. *Functionally Graded Mateirals: a review*

of fabrication and properties // Applied Materials Today. –2016. – Vol.5. –Pp.223-245.
5. Mahmood R.M., Aktinlabi E.T. *Functionally graded materials*. – Springer International Publishing, 2017.
6. Bhavar V., Kattire P., Patil S., Singh R.K.P. *A review of functionally gradient materials (FGM's) and their applications* // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. – 2017. – Vol.229. – 012021.
7. Birman V. *Functionally graded materials and structures* / In: Encyclopaedia of Thermal Stresses, 2014.
8. Boggarapu V., Gujjala R., Ojha S., Acharya S., Venkateswara babu P., Chowdary S., Gara D.K. *State of the art in functionally graded materials* // Composite Structures. – 2021. – Vol.262. – 113596.
9. Suresh S., Mortensen A. *Fundamentals of Functionally Graded Materials.* – London: IOM Communications, 1998.
10. Koizumi M. *The concept of FGM* // Ceramics Transactions: Functionally Graded Materials. – 1993. – Vol.34. – Pp.3-10.
11. Мовчан А.А., Казарина С.А. *Материалы с памятью формы как объект механики деформируемого твердого тела: экспериментальные исследования, определяющие соотношения, решение краевых задач* // Физическая мезомеханика. – 2012. – Т.15. – №1. – С.105-116.
12. Niino M., Hirai T., Watanabe R. *The functionally gradient materials* // J. of the Japanese Society for Composite Materials. – 1987. – Vol.13. – Pp.257-264.
13. *Metallic Materials and Element for Aerospace Vehicles*, Wright-Patterson Air Force Base: Department of Defence, AFRL/MLSC, MIL-HDBK-5J, 2003.
14. Aerospace Specification Metals, Inc. Titanium Ti-6Al-2Sn-4Zr-2Mo, Duplex Annealed, 2003.
15. Qian X. *Design of heterogeneous turbine blade* // Computer Aided Design. – 2003. – Vol.35. – Pp.319-329.
16. Birman V. *Stability of functionally graded shape memory alloy sandwich structures* // Smart Materials and Structures. – 1997. – Vol.6. – Pp.278-286.
17. Noda N. *Thermal stresses in materials with temperature-dependent properties* // Applied Mechanics Reviews. – 1991. – Vol.44. – Pp.383-397.
18. Kaysser W.A., Ilsener B. *FGM research activities in Europe* // MRS Bulleltin. – 1995. – Vol.20. – Pp.22-26.
19. Maciejewski G., Mroz Z. *Optimization of functionally gradient materials in valve design under cyclic thermal and mechanical loading* // CAMES. – 2013. – Vol.20. – Pp.99-112.
20. Bharti I., Gupta N., Gupta K. *Novel applications of functionally graded nano, optoelectronic and thermoelastic materials* // Int. J. of Materials, Mechanics and Manufacturing. – 2013. – Vol.1. – No.3. – Pp.221-224.
21. Liu L.S., Zhang Q.J., Zhai P.C. *The optimization design on Metal/Ceramic, FGM armor with neutral net and conjugate gradient method* / Functionally Graded Materials: VII Proceedings of 7th International Symposium on Functionally Graded Materials "FGM2000", Materials Science Forum. – 2000. – Pp.423-435.
22. Chin E.S.C. *Army focused research on functionally graded armor composites* // Materials Science and Engineering. – 1999. – Vol.A259. – Pp.155-161.
23. Mehrali M., Shirazi F.S., Mehrali M., Metselaar H.S.C. *Dental implants from functionally graded materials* // J. Biomed. Mater. Res. Part A. – 2013. – Vol.101(10). – Pp.3046-3057.

24. Schweizer E., Holtzhausen S., Scheithauer U., Ortmann C., Oberbach T., Moritz T., Michaelis A. *Process development for additive manufacturing of functionally graded alumina toughened zirconia components intended for medical implant application* // J. European Ceramic Society. – 2019. – Vol.39. – Nos.2-3. – Pp.522-530.
25. Droschel M., Hoffmann M.J., Oberacher R., Both H.Y., Shaller W., Yang Y.Y., Munz D. *SiC-ceramics with porosity gradient for combustion chambers* // Key Engineering Materials. – 2000. – Vol.175-176. – Pp.149-162.
26. Bahraminasab M. *Challenges on optimization of 3D-printed bone scaffolds* // BioMedical Engineering Online. – 2020. – Vol.19. – Pp.69-102.
27. Tampieri A., Cellotti G., Sprio S., Delcogliano A., Francese S. *Porosity-graded hydroxyapatite ceramics to replace natural bone* // Biomaterials. – 2001. – Vol.22. – Pp.1365-1370.
28. Miao X., Sun D. *Graded / gradient porous biomaterials* // Materials. – 2010. – Vol.3. – Pp.26-47.
29. Jha D.K., Kant T., Singh R.K. *A critical review of recent researches n functionally graded plates* // Composite Structures. – 2013. – Vol.96. – Pp.833-849.
30. Thai H.T., Kim S.E. *A review of theories for the modelling and analysis of functionally graded plates and shells* // Composite Structures. – 2015. – Vol.128. – Pp.70-80.
31. Swaminathan K., Sangeetha D.M. *Thermal analysis of FGM plates – A critical review of various modeling techniques and solution methods* // Composite Structures. – 2017. – Vol.160. – Pp.43-60.
32. Swaminathan K., Naveenkumar D.T., Zenkour A.M., Carrera E. *Stress, free vibration and buckling analyses of FGM plates – a state-of-the-art review* // Composite Structures. – 2013. – Vol.120. – Pp.10-31.
33. Koiter W.T. *A consistent first approximations in the general theory of thin elastic shells* / Proc. of the First Symposium on the Theory of Thin Elastic Shells. Amsterdam, 1960.
34. Wu C.P., Liu Y.C. *A review of semi-analytical numerical methods for laminated composite and multilayered functionally graded elastic / piezoelectric plates and shells* // Composite Structures. – 2016. – Vol.147. – Pp. -15.
35. Punera D., Kant T. *A critical review of stress and vibration analysis of functionally graded shell structures* // Composite Structures. – 2019. – Vol.210. – Pp.787-809.
36. Dai H.L., Rao Y.N., Dai T. *A review of recent researches on FGM cylindrical structures under coupled physical interactions, 2000-2015* // Composite Structures. – 2016. – Vol.152. – Pp.199-225.
37. Hao D., Wei C. *Dynamic characteristics of bi-directional functionally graded Timoshenko beams* // Composite Structures. – 2016. – Vol.141. – Pp.253-263.
38. Simsek M. *Bi-directional functionally graded materials (BDFGM's) for free and forced vibration of Timoshenko beams with various boundary conditions* // Composite Structures. – 2015. – Vol.133. – Pp.968-978.
39. Simsek M. *Buckling of Timoshenko beams composed of two-dimensional functionally graded material (2D-FGM) having different boundary conditions* // Composite Structures. – 2016. – Vol.149. – Pp.304-314.
40. Kumari P., Singh A., Rajapakse P.R.N.D., Kapuria S. *Three-dimensional static analysis of Levy-type functionally graded plate with in-plane stiffness variation* //

Composite Structures. – 2017. – Vol.168. – Pp.780-791.
41. Singh A., Kumari P. *Three-dimensional free vibration analysis of composite FGM rectangular plates with in-plane heterogeneity: an EKM solution* // International Journal of Mechanical Sciences. – 2020. – Vol.180. – 105771.
42. Huang Y., Zhao Y., Cao D. *Bending and free vibration analysis of orthotropic in-plane functionally graded plates using a Chebyshev spectral approach* // Composite Structures. – 2021. – Vol.255. – 112938.
43. Qian L.F., Batra R.C. *Design of bidirectional functionally graded plate for optimal mormal frequencies* // J. Sound and Vibration. – 2005. – Vol.280. – Pp.415-424.
44. Attia M.A., Shanab R.A. *Vibration characteristics of two-dimensional FGM nanobeams with couple stress and surface energy under general boundary conditions* // Aerospace Science and Technology. – 2021. – Vol.111. – 106552.
45. Voigt W. *Über die Beziehung zwischen den beiden Elastizitaetskonstanten isotroper Körper* // Annalen der Physik. – 1889. – Vol.274. – Pp.573-587.
46. Reuss A. *Berechnung der Hiessgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitaetbediengung für Einkristalle* // ZAMM – Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. – 1929. – Vol.9. – Pp.49-58.
47. Hill R. *Theory of mechanical properties of fibre-strengthened materials: I Elastic behaviour* // J. of Mechanics and Physics of Solids. – 1964. – Vol.12. – Pp.199-212.
48. Hashin Z., Strikmann S. *A variational approach to the theory of elastic behavior of multiphase materials* // J. Mechanics and Physics of Solids. – 1964. – Vol.11. – Pp.223-232.
49. Mori T., Tanaka T. *Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions* // Acta Metallurgica. – 1973. – Vol.21. – Pp.571-574.
50. Benveniste Y. *A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials* // Mehanics of Materials. – 1987. – Vol.6. – No.2. – Pp.147-157.
51. Reiter T., Dvorak G.J., Tvergaard V. *Micromechanical models for graded composite materials* // J. of the Mechanics and Physics of Solids. – 1997. – Vol.45. – Pp.1281-1302.
52. Reiter T., Dvorak G.J. *Micromechanical models for graded composite materials II: Thermomechanical loading* // J. of the Mechanics and Physics of Solids. – 1998. – Vol.46. – Pp.1655-1673.
53. Hill R. *Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles* // J. of Mechanics and Physics of Solids. – 1963. – Vol.11. – Pp.357-372.
54. Hill R. *A self-consistent mechanics of composite materials* // J. Mechanics and Physics of Solids. – 1965. – Vol.13. – Pp.213-222.
55. Bhattacharyya M., Kapuria S., Kumar A.N. *On the stress to strain transfer ratio and elastic deflection behavior for Al/SiC functionally graded material* // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2007. – Vol.14. – Pp.295-302.
56. Kapuria S., Bhattacharyya M., Kumar A.N. *Bending and free vibration response of layered functionally graded beams: a theoretical model and its experimental validation* // Composite Structures. – 2008. – Vol.82. – Pp.390-402.
57. Kapuria S., Bhattacharyya M., Kumar A.N. *Theoretical modeling and experimental validation of thermal response of metal-ceramic functionally graded beams* // J. Thermal Stresses. – 2008. – Vol.31. – Pp.759-787.
58. Gasik M.M., Lilius R.R. *Evaluation of properties of W/Cu functional gradient*

materials by micromechanical model // Computer Materials Science. – 1994. – Vol.3. – No.1. – Pp.41-49.
59. Hashin Z., Rosen B.W. *The elastic moduli of fiber-reinforced materials* // ASME J. of Applied Mechanics. – 1964. – Vol.4. – Pp.223-232.
60. Hashin Z. *The elastic moduli if heterogeneous materials* // ASME J. of Applied Mechanics. – 1962. – Vol.29. – Pp.143-150.
61. Hashin Z. *Analysis of properties of fiber composites with anisotropic constituents* // ASME J. of Applied Mechanics. – 1979. – Vol.46. – Pp.543-550.
62. Kapuria S., Patni M., Yasin M.A. *A quadrilateral shallow shell element based on the third-order theory for functionally graded plates and shells and the inaccuracy of the rule of mixtures* // European J. of Mechanics A. Solids. – 2015. – Vol.49. – Pp.268-282.
63. Karami B., Shahsavari D., Janghorban M., Li L. *Influence of homogenization schemes on vibration of functionally graded curved microbeams* // Composite Structures. – 2019. – Vol.216. – Pp.67-79.
64. Huang C.S., McGee III G., Chang M.J. *Vibrations of cracked rectangular FGM thick plates* // Composite Structures. – 2011. – Vol.93. – Pp.1747-1764.
65. Shen H.S., Wang Z.X. *Assessment of Voight and Mori-Tanaka models for vibration analysis of functionally graded plates* // Composite Structures. – 2012. – Vol.94. – Pp.2197-2208.
66. Caruso J.J., Charnis C.C. *Assessment of simplified composite micromechanics using three-dimensional finite element analysis* // J. of Composites, Technology and Research. – 1986. – Vol.8. – No.3. – Pp.77-83.
67. Aboudi J., Pindera M.J., Arnold S.M. *Higher-order theory for functionally graded materials* // Composites Part B: Engineering. – 1999. – Vol.30. – Pp.777-832.
68. Yin H., Sun L., Paulino G. *Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions* // Acta Materialia. – 2004. – Vol.52. – Pp.3535-3543.
69. Bansal Y., Pindera M.J. *Efficient reformulation of functionally graded materials* // J. of Thermal Stresses. – 2003. – Vol.26. – Pp.1055-1092.
70. Kluseman B., Svendsen B. *Homogenization methods for multi-phase elastic composites: comparisons and benchmarks* // Technische Mechanik. – 2010. – Vol.30. – Pp.374-386.
71. Anthoine A. *Second-order homogenization of functionally graded materials* // Int. J. of Solids and Structures. – 2010. – Vol.47. – Pp.1477-1489.
72. Власов А.Н., Волков-Богородский Д.Б., Карнет Ю.Н., Гамлицкий Ю.А., Мудрук В.И. *Оценка механических свойств гиперупругих композитных материалов с малыми добавками минеральных наполнителей. Часть II. Реализация задачи на ячейке методом конечных элементов* // Каучук и резина. – 2017. – Т.76. – №1. – С.58-63.
73. Vlasov A.N., Volkov-Bogorodskiy D.B. *Method of asymptotic homogenization of thermoelasticity equations in parametric space: part I (theoretical)* // Composites: Mechanics, Computations, Applications: An Int. J. – 2018. – Vol.9. – No.4. – Pp.331-343.
74. Vlasov A.N., Volkov-Bogorodskiy D.B. *Method of asymptotic homogenization of thermoviscoelasticity equations in parametric space* // Participation & Environment. – 2018. – Vol.9. – No.4. – Pp.331-334.
75. Власов А.Н. *Усреднение механических свойств структурно-неоднородных сред* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2004. – Т.10.

– №3. – С.424-441.
76. Власов А.Н. *Усреднение характеристик деформационных свойств структурно-неоднородных сред с неидеальными условиями на контактах* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2006. – Т.12. – №2. – С.200-218.
77. Tornabene F., Fantuzzi N., Bacciocchi M., Viola E. *Effect of agglomeration on the natural frequencies of functionally graded carbon nanotube-reinforced laminated composite doubly-curved shells* // Composites: Pt. B. – 2016. – Vol.89. – Pp.187-218.
78. Tornabene F., Fantuzzi N., Bacciocchi M. *Linear static response of nanocomposite plates and shells reinforced by agglomerated carbon nanotubes* // Composites: Pt. B. – 2017. – Vol.115. – Pp.449-476.
79. Azadi M., Azadi M. *Nonlinear transient heat transfer and thermoelastic analysis of thick-walled FGM cylinders with temperature-dependent material properties using Hermitian finite element* // J. Mechanical Science and Technology. – 2009. – Vol.23. – Iss.10. – Pp.2635-2644.
80. Azadi M., Shariyat M. *Nonlinear transient transfinite element thermal analysis of thick-walled FGM cylinders with temperature-dependent material properties* // Meccanica. – 2010. – Vol.45. – Pp.305-318.
81. Zhang L., Li X.F. *Buckling and vibration analysis of functionally graded thermo-electro-thermo-elastic circular cylindrical shells* // Applied Mathematical Modeling. – 2013. – Vol.37. – Pp.2279-2292.
82. Dai H.L., Rao Y.N. *Nonlinear dynamic behavior of a long temperature-dependent FGM hollow cylinder subjected to thermal loading* // Science and Engineering of Composite Materials. – 2014. – Vol.21. – Pp.267-280.
83. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. *Волны в сплошных средах*. – М.: Физматлит, 2004.
84. Островский Л.А., Потапов А.И. *Введение в теорию модулированных волн*. – М.: Физматлит, 2003.
85. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. *Гармонические колебания и волны в упругих телах.* – Киев: Наукова думка, 1981.
86. Ерофеев В.И. *Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой*. – М.: МГУ, 1999.
87. Ерофеев В.И., Кажаев В.В., Семерикова Н.П. *Волны в стержнях. Дисперсия, диссипация, нелинейность*. – М.: Физматлит, 2002.
88. Lamb H. *On flexure of an elastic plate* // Proc. of the Mathematical Society of London. – 1889/1890. – Vol.21. – No.360. – Pp.70-90.
89. Lamb H. *On waves in an elastic plate* // Proc. of the Royal Society of London A. – 1917. – Vol.93. – No.648. – Pp.114-128.
90. Гольдштейн Р.В., Ильяшенко А.В., Кузнецов С.В. *Волны Лэмба в анизотропных средах: шестимерный формализм Коши* // Математическое моделирование. – 2017. – Т.29. – №10. – С.86-94.
91. Викторов И.А. *Ультразвуковые волны Лэмба* // Акустический журнал. – 1965. – Т.11. – №1. – С.1-18.
92. Генкин М.Д., Бобровницкий Ю.И. *Колебания упругой полосы* / В книге Методы виброизоляции машин и присоединенных конструкций. – М.: Наука, 1975. – С.12-42.
93. Thomson W.T. *Transmission of elastic waves through a stratified solid medium* // J. of Applied Physics. – 1950. – Vol.21. – Pp.89-93.

94. Burg K.E., Ewing M., Press F., Stalken E.J. *A seismic wave guide phenomenon* // Geophysics. – 1951. – Vol.16. – Pp.594-612.
95. Haskell N.A. *The dispersion of surface waves on multilayered media* // Bulletin of the Seismic Society of America. – 1953. – Vol.43. – Pp.17-34.
96. Stroh A.N. *Steady state problems in anisotropic elasticity* // J. of Mathem. Physics. – 1962. – Vol.41. – Pp.77-103.
97. Ting T.C.T. *A modified Lekhnitskii formalism a la Stroh for anisotropic elasticity and classification of the 6x6 matrix N* // Proc. Royal Society of London. – 1999. – Vol.A455. – Pp.69-89.
98. Kuznetsov S.V. *Lamb waves in anisotropic functionally graded plates: a closed form dispersion solution* // J. of Mechanics. – 2020. – Vol.36. – No.1. – Pp.1-6.
99. Кузнецов С.В. *Волны Лэмба в анизотропных пластинах* // Акустический журнал. – 2014. – Т.60. – №1. – С.90-100.
100. Ilyashenko A., Kuznetsov S. *Dispersive waves in functionally graded plates* // MATEC Web of Conferences. – 2018. – Vol.251. – 04052.
101. Kuznetsov S.V. *Lamb waves in functionally graded plates with transverse inhomogeneity* // Acta Mecanica. – 2018. – Vol.229. – Pp.4131-4139.
102. Ohyoshi T. *New stacking layer elements for analyses of reflection for transmission of elastic waves to inhomogeneous layers* // Mechanics Research Communication. – 1993. – Vol.20. – No.4. – Pp.353-359.
103. Ohyoshi T. *Linearly inhomogeneous layer elements for reflectance evaluation of inhomogeneous layers* // ASME Dynamics Response and Behavior of Composites. – 1995. – Vol.46. – Pp.121-126.
104. Ohyoshi T., Sui G.J., Miuro K. *Use of stacking model of the linearly inhomogeneous layer elements* // Proc. Of the ASME. Aerospace Division. – 1996. – Vol.52. – Pp.101-106.
105. Han X., Liu G.R., Lam K.Y., Ohyoshi T. *A quadratic layer element for analyzing stress waves in FGMs and its application in material characterization* // J. of Sound and Vibration. – 2000. – Vol.236. – Pp.307-321.
106. Han X., Liu G.R. *Effects of SH waves in a functionally graded plate* // Mechanics Research Communication. – 2002. – Vol.29. – Pp.327-338.
107. Han X., Liu G.R., Xi Z.C., Lam K.Y. *Transient waves in functionally graded cylinder* // Int. J. of Solids and Structures. – 2001. – Vol.38. – Pp.3021-3037.
108. Han X., Liu G.R., Xi Z.C., Lam K.Y. *Characteristics of waves in a functionally graded cylinder* // Int. J. of Numerical Methods in Engineering. – 2002. – Vol.53. – Pp.653-676.
109. Xi Z.C., Liu G.R., Lam K.Y., Shang H.M. *Strip element method for analyzing wave scattering by a crack in an immersed laminated composite cylinder* // J. of the Acoustical Society of America. – 2000. – Vol.108. – Pp.175-183.
110. Fahmy A.H., Adler E.L. *Propagation of acoustic surface waves in multilayers: a matrix description* // Applied Physics Letters. – 1973. – Vol.22. – Pp.495-497.
111. Lowe M.J.S. *Matrix techniques for modeling ultrasonic waves in multilayered media* // IEEE Transact. Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control. – 1995. – Vol.42. – Pp.525-542.
112. Dunkin J.W. *Computation of modal solutions in layered elastic media at high frequencies* // Bull. of the Seismic Society of America. – 1965. – Vol.55. – Pp.335-358.
113. Levesque D., Piche L. *A robust transfer matrix formula tion for the ultrasonic response of multilayered absorbing media* // J. of the Acoustical Society

of America. – 1992. – Vol.92. – Pp.452-467.
114.Castaings M., Hosten B. *Delta operator technique to improve the Thomson–Haskell method stability for propagation in multilayered anisotropic absorbing plate* // J. of the Acoustical Society of America. – 1994. – Vol.95. – Pp.1931-1941.
115.Bailey D.H. *Automatic translation of Fortran programs to multiprecision.* – NASA RNR, Tech. Report RNR-91-025, 1993.
116.Bailey D.H. *A portable high performance multiprecision package.* – NASA RNR, Tech. Report RNR-90-022, 1993.
117.Kuznetsov S.V. *Surface waves of Non-Rayleigh type* // Quarterly Applied Mathematics. – 2003. – Vol.61. – Pp.575-582.
118.Кузнецов С.В. *Волны Лэмба в защемленном и частично защемленном упругом слое* // Изв. РАН. МТТ. – 2015– №1. – С.96-113.
119.Abo-Zena R. *Dispersion function computations for unlimited frequency values* // Geophys. J. of the Royal Astronom. Society. – 1979. – Vol.58. – Pp.91-105.
120.Kenneth B.L.N. *Seismic wave propagation in stratified media*. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1983.
121.Evans R.B. *The decoupling of seismic waves* // Wave Motion. – 1986. – Vol.8. – Pp.321-328.
122.Chin R.C.Y., Hedstrom G.W., Thigpen L. *Matrix methods in synthetic seismograms* // Geophys. J. of the Royal Astronom. Society. – 1984. – Vol.77. – Pp.483-502.
123.Wang L., Rokhlin S.I. *Stable reformulation of transfer matrix method for wave propagation in layered anisotropic media* // Ultrasonics. – 2001. – Vol.39. – Pp.413-424.
124.Wang L., Rokhlin S.I. *Recursive asymptotic stiffness matrix method for analysis of surface acoustic wave devices on layered piezoelectric media* // AIP Applied Physics Letters. – 2002. – Vol.81. – Pp.4049-4051.
125.Wang L., Rokhlin S.I. *Modeling of wave propagation in layered piezoelectric media by a recursive asymptotic method* // IEEE Transact. Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency control. – 2004. – Vol.51. – Pp.1060-1071.
126.Wang L., Rokhlin S.I. *A compliance/stiffness matrix formulation of general Green's function and effective permittivity for piezoelectric multilayers* // IEEE Transact. Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control. – 2004. – Vol.51. – Pp.453-463.
127.Kiełczynski P., Szalewski M., Balcerzak A., Wieja K. *Propagation of ultrasonic Love waves in nonhomogeneous elastic functionally graded materials* // Ultrasonics. – 2016. – Vol.65. – Pp.220-227.
128.Ezzin H., Wang B., Qian Z. *Propagation behavior of ultrasonic Love waves in functionally graded piezoelectric-piezomagnetic materials with exponential variation* // Mechanics of Materials. – 2020. – Vol.148. – 103492.
129.Bakhtiari M., Tarkashvand A., Daneshjou K. *Plane-strain wave propagation of an impulse-excited fluid-filled functionally graded cylinder containing an internally clamped shell* // Thin-Walled Structures. – 2020. – Vol.149. – 106482.
130.Ben Salah I., Wali Y., Ben Ghozlen M.H. *Love waves in functionally graded piezoelectric materials by stiffness matrix method* // Ultrasonics. – 2011. – Vol.51. – Pp.310-316.
131.Pasteraud T., Laude V., Ballandras S. *Stable scattering-matric method for surface acoustic waves in piezoelectric multilayers* // Applied Physics Letters. – 2002. – Vol. 80–, No. 14. – Pp. 2544-2546.

132.Pao Y.H., Keh D.C., Howard S.M. *Dynamic response and wave propagation in plane trusses and frames* // AIAA Journal. – 1999. – Vol.37. – Pp.594-603.
133.Pao Y.H., Su X.Y., Tian J.Y. *Reverberation matrix method for propagation of sound in a multilayered liquid* // J. of Sound and Vibration. – 2000. – Vol.230. – Pp.743-760.
134.Su X.Y., Tian J.Y., Pao Y.H. *Application of the reverberation-ray matrix to the propagation of elastic waves in a layered solid* // International J. of Solids and Structures. – 2002. – Vol.39. – Pp.5447-5463.
135.Guo Y.Q., Chen W.Q., Zhang Y.L. *Guided wave propagation in multilayered piezoelectric structures* // Science in China Series G: Physics, Mechanics & Astronomy. – 2009. – Vol.52. – No.7. – Pp.1094-1104.
136.Chen W.Q., Wang H.M., Bao R.H. *On calculating dispersion curves of waves in a functionally graded elastic plate* // Composite Structures. – 2007. – Vol.81. – Pp.233-242.
137.Zhu J., Chen W.Q., Ye G.R., Fu J.Z. *Waves in fluid-filled functionally graded piezoelectric hollow cylinders: A restudy based on the reverberation-ray matrix formulation* // Wave Motion. – 2013. – Vol.50. – Pp.415-427.
138.Knopoff L. *A matrix method for elastic wave problems* // Bull. of the Seismic. Society of America. – 1964. – Vol.54. – Pp.431-438.
139.Randall M.J. *Fast programs for layered half-space problems* // Bull. of the Seismic. Society of America. – 1967. – Vol.57. – Pp.1299-1316.
140.Schwab F.A. *Surface-wave dispersion computation: Knopoff's method* // Bull. of the Seismic. Society of America. – 1970. – Vol.60. – Pp.1491-1520.
141.Schmidt H., Jensen F.B. *Efficient numerical solution technique for wave propagation in horizontally stratified environments* // Comp. & Mathematics with Applications. – 1985. – Vol.11. – Pp.699-715.
142.Mal A.K. *Guided waves in layered solids with interface zones* // Int. J. of Engineering Sciences. – 1988. – Vol.26. – Pp.873-881.
143.Liu C., Yu J., Zhang B., Zhang X., Elmaimouni L. *Analysis of Lamb waves propagation in a functionally graded piezoelectric small-scale plate based on the modified couple stress theory* // Composite Structures. – 2021. – Vol.265. – 113733.
144.Lowe M.J.S. *Plate waves for the NDT of diffusion bonded titanium*. – Ph. D. Dissertation. London: Univ. of London, 1992.
145.Shuvalov A.L., Poncelet O., Deschamps M. *General formalism for plane guided waves in transversely inhomogeneous anisotropic plates* // Wave Motion. – 2004. – Vol.40. – Pp.413-426.
146.Shuvalov A.L., Le Clezio E., Feuillard G. *The state-vector formalism and the Peano series solution for modelling guided waves in functionally graded anisotropic piezoelectric plates* // Int. J. of Engineering Sciences. – 2008. – Vol.46. – Pp.929-947.
147.Ingebrigtsen K.A., Tonning A. *Elastic surface waves in crystals* // Physical Reviews. – 1969. – Vol.184. – Pp.942-951.
148.Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц.* – М.: Наука, 1967. – 576 с.
149.Ben Amor M., Ben Ghozlen M.H. *Lamb waves propagation in functionally graded piezoelectric materials by Peano-series method* // Ultrasonics. – 2015. – Vol.55. – Pp.10-14.
150.Yang T., Huang Q., Li S. *Three-dimensional elasticity solutions for sound radiation of functionally graded materials plates considering state space method* //

Shock and Vibration. – 2016. – 1403856.
151. Wang L., Rokhlin S.I. *Recursive geometric integrators for wave propagation in a functionally graded multilayered elastic medium* // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2004. – Vol.52. – Pp.2473-2506.

REFERENCES

1. Birman V., Byrd L.W. *Modeling and analysis of functionally graded materials and structures.* ASME Applied Mechanics Reviews, 2007, Vol.60, Pp.195-216.
2. Udupa G., Shrikantha Rao S., Gangadharan R.V. *Functionally graded composite materials: An overview.* Procedia Materials Science, 2014, Vol.5, Pp.1291-1299.
3. Gupta A., Talha M. *Recent development in modeling and analysis of functionally graded materials and structures*. Progress in Aerospace Science, 2015, Vol.79, Pp.1-14.
4. Naebe M., Shrivanimoghaddam K. *Functionally Graded Mateirals: a review of fabrication and properties*. Applied Materials Today, 2016, Vol.5, Pp.223-245.
5. Mahmood R.M., Aktinlabi E.T. *Functionally graded materials*. Springer International Publishing, 2017.
6. Bhavar V., Kattire P., Patil S., Singh R.K.P. *A review of functionally gradient materials (FGM's) and their applications*. IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering, 2017, Vol.229, 012021.
7. Birman V. *Functionally graded materials and structures.* In: Encyclopaedia of Thermal Stresses, 2014.
8. Boggarapu V., Gujjala R., Ojha S., Acharya S., Venkateswara babu P., Chowdary S., Gara D.K. *State of the art in functionally graded materials*. Composite Structures, 2021, Vol.262, 113596.
9. Suresh S., Mortensen A. *Fundamentals of Functionally Graded Materials.* London, IOM Communications, 1998.
10. Koizumi M. *The concept of FGM.* Ceramics Transactions: Functionally Graded Materials, 1993, Vol.34, Pp.3-10.
11. Movchan A.A., Kazarina S.A. *Materialy s pamyat'yu formy kak ob"ekt mekhaniki deformiruemogo tverdogo tela: ehksperimental'nye issledovaniya, opredelyayushhie sootnosheniya, reshenie kraevykh zadach [Materials with shape memory as mechanics of deformable solids object: experimental investigations, constitutive relations, solutions of boundary value problems]*. Fizicheskaya mezomekhanika, 2012, Vol.15, No.1, Pp.105-116.
12. Niino M., Hirai T., Watanabe R. *The functionally gradient materials*. J. of the Japanese Society for Composite Materials, 1987, Vol.13, Pp.257-264.
13. *Metallic Materials and Element for Aerospace Vehicles*. Wright-Patterson Air Force Base: Department of Defence, AFRL/MLSC, MIL-HDBK-5J, 2003.
14. *Aerospace Specification Metals*. Inc. Titanium Ti-6Al-2Sn-4Zr-2Mo, Duplex Annealed, 2003.
15. Qian X. *Design of heterogeneous turbine blade*. Computer Aided Design, 2003, Vol.35, Pp.319-329.
16. Birman V. *Stability of functionally graded shape memory alloy sandwich structures.* Smart Materials and Structures, 1997, Vol.6, Pp.278-286.
17. Noda N. *Thermal stresses in materials with temperature-dependent properties*. Applied Mechanics Reviews, 1991, Vol.44, Pp.383-397.
18. Kaysser W.A., Ilsener B. *FGM research activities in Europe*. MRS Bulleltin, 1995,

Vol.20, Pp.22-26.
19. Maciejewski G., Mroz Z. *Optimization of functionally gradient materials in valve design under cyclic thermal and mechanical loading*. CAMES, 2013, Vol.20, Pp.99-112.
20. Bharti I., Gupta N., Gupta K. *Novel applications of functionally graded nano, optoelectronic and thermoelastic materials*. Int. J. of Materials, Mechanics and Manufacturing, 2013, Vol.1, No.3, Pp.221-224.
21. Liu L.S., Zhang Q.J., Zhai P.C. *The optimization design on Metal/Ceramic, FGM armor with neutral net and conjugate gradient method.* Functionally Graded Materials: VII Proceedings of 7th International Symposium on Functionally Graded Materials “FGM2000”, Materials Science Forum, 2000, Pp.423-435.
22. Chin E.S.C. *Army focused research on functionally graded armor composites*. Materials Science and Engineering, 1999, Vol.A259, Pp.155-161.
23. Mehrali M., Shirazi F.S., Mehrali M., Metselaar H.S.C. *Dental implants from functionally graded materials.* J. Biomed. Mater. Res. Part A, 2013, Vol.101, No.10, Pp.3046-3057.
24. Schweizer E., Holtzhausen S., Scheithauer U., Ortmann C., Oberbach T., Moritz T., Michaelis A. *Process development for additive manufacturing of functionally graded alumina toughened zirconia components intended for medical implant application.* J. European Ceramic Society, 2019, Vol.39, Nos.2-3, Pp.522-530.
25. Droschel M., Hoffmann M.J., Oberacher R., Both H.Y., Shaller W., Yang Y.Y., Munz D. *SiC-ceramics with porosity gradient for combustion chambers*. Key Engineering Materials, 2000, Vol.175-176, Pp.149-162.
26. Bahraminasab M. *Challenges on optimization of 3D-printed bone scaffolds*. BioMedical Engineering Online, 2020, Vol.19, Pp.69-102.
27. Tampieri A., Cellotti G., Sprio S., Delcogliano A., Francese S. *Porosity-graded hydroxyapatite ceramics to replace natural bone*. Biomaterials, 2001, Vol.22, Pp.1365-1370.
28. Miao X., Sun D. *Graded / gradient porous biomaterials*. Materials, 2010, Vol.3, Pp.26-47.
29. Jha D.K., Kant T., Singh R.K. *A critical review of recent researches on functionally graded plates*. Composite Structures, 2013, Vol.96, Pp.833-849.
30. Thai H.T., Kim S.E. *A review of theories for the modelling and analysis of functionally graded plates and shells*. Composite Structures, 2015, Vol.128, Pp.70-80.
31. Swaminathan K., Sangeetha D.M. *Thermal analysis of FGM plates – A critical review of various modeling techniques and solution methods*. Composite Structures, 2017, Vol.160, Pp.43-60.
32. Swaminathan K., Naveenkumar D.T., Zenkour A.M., Carrera E. *Stress, free vibration and buckling analyses of FGM plates – a state-of-the-art review*. Composite Structures, 2013, Vol.120, Pp.10-31.
33. Koiter W.T. *A consistent first approximations in the general theory of thin elastic shells.* Proc. of the First Symposium on the Theory of Thin Elastic Shells, Amsterdam, 1960.
34. Wu C.P., Liu Y.C. *A review of semi-analytical numerical methods for laminated composite and multilayered functionally graded elastic / piezoelectric plates and shells*. Composite Structures, 2016, Vol.147, Pp.1-15.
35. Punera D., Kant T. *A critical review of stress and vibration analysis of functionally graded shell structures*. Composite Structures, 2019, Vol.210,

Pp.787-809.
36. Dai H.L., Rao Y.N., Dai T. *A review of recent researches on FGM cylindrical structures under coupled physical interactions, 2000-2015*. Composite Structures, 2016, Vol.152, Pp.199-225.
37. Hao D., Wei C. *Dynamic characteristics of bi-directional functionally graded Timoshenko beams*. Composite Structures, 2016, Vol.141, Pp.253-263.
38. Simsek M. *Bi-directional functionally graded materials (BDFGM's) for free and forced vibration of Timoshenko beams with various boundary conditions*. Composite Structures, 2015, Vol.133, Pp.968-978.
39. Simsek M. *Buckling of Timoshenko beams composed of two-dimensional functionally graded material (2D-FGM) having different boundary conditions*. Composite Structures, 2016, Vol.149, Pp.304-314.
40. Kumari P., Singh A., Rajapakse P.R.N.D., Kapuria S. *Three-dimensional static analysis of Levy-type functionally graded plate with in-plane stiffness variation*. Composite Structures, 2017, Vol.168, Pp.780-791.
41. Singh A., Kumari P. *Three-dimensional free vibration analysis of composite FGM rectangular plates with in-plane heterogeneity: an EKM solution*. International Journal of Mechanical Sciences, 2020, Vol.180, 105771.
42. Huang Y., Zhao Y., Cao D. *Bending and free vibration analysis of orthotropic in-plane functionally graded plates using a Chebyshev spectral approach*. Composite Structures, 2021, Vol.255, 112938.
43. Qian L.F., Batra R.C. *Design of bidirectional functionally graded plate for optimal mormal frequencies*. J. Sound and Vibration, 2005, Vol.280, Pp.415-424.
44. Attia M.A., Shanab R.A. *Vibration characteristics of two-dimensional FGM nanobeams with couple stress and surface energy under general boundary conditions*. Aerospace Science and Technology, 2021, Vol.111, 106552.
45. Voigt W. *Über die Beziehung zwischen den beiden Elastizitaetskonstanten isotroper Körper*. Annalen der Physik, 1889, Vol.274, Pp.573-587.
46. Reuss A. *Berechnung der Hiessgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitaetbediengung fuer Einkristalle*. ZAMM – Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Mechanik, 1929, Vol.9, Pp.49-58.
47. Hill R. *Theory of mechanical properties of fibre-strengthened materials: I Elastic behavior.* J. of Mechanics and Physics of Solids, 1964, Vol.12, Pp.199-212.
48. Hashin Z., Strikmann S. *A variational approach to the theory of elastic behavior of multiphase materials*. J. Mechanics and Physics of Solids, 1964, Vol.11, Pp.223-232.
49. Mori T., Tanaka T. *Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions.* Acta Metallurgica, 1973, Vol.21, Pp.571-574.
50. Benveniste Y. *A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials.* Mehanics of Materials, 1987, Vol.6, No.2, Pp.147-157.
51. Reiter T., Dvorak G.J., Tvergaard V. *Micromechanical models for graded composite materials*. J. of the Mechanics and Physics of Solids, 1997, Vol.45, Pp.1281-1302.
52. Reiter T., Dvorak G.J. *Micromechanical models for graded composite materials II: Thermomechanical loading*. J. of the Mechanics and Physics of Solids, 1998, Vol.46, Pp.1655-1673.
53. Hill R. *Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles*.

J. of Mechanics and Physics of Solids, 1963, Vol.11, Pp.357-372.
54. Hill R. *A self-consistent mechanics of composite materials*. J. Mechanics and Physics of Solids, 1965, Vol.13, Pp.213-222.
55. Bhattacharyya M., Kapuria S., Kumar A.N. On the stress to strain transfer ratio and elastic deflection behavior for Al/SiC functionally graded material. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2007, Vol.14, Pp.295-302.
56. Kapuria S., Bhattacharyya M., Kumar A.N. *Bending and free vibration response of layered functionally graded beams: a theoretical model and its experimental validation*. Composite Structures, 2008, Vol.82, Pp.390-402.
57. Kapuria S., Bhattacharyya M., Kumar A.N. *Theoretical modeling and experimental validation of thermal response of metal-ceramic functionally graded beams*. J. Thermal Stresses, 2008, Vol. 31, Pp.759-787.
58. Gasik M.M., Lilius R.R. *Evaluation of properties of W/Cu functional gradient materials by micromechanical model.* Computer Materials Science, 1994, Vol.3, No.1, Pp.41-49.
59. Hashin Z., Rosen B.W. *The elastic moduli of fiber-reinforced materials*. ASME J. of Applied Mechanics, 1964, Vol.4, Pp.223-232.
60. Hashin Z. *The elastic moduli if heterogeneous materials.* ASME J. of Applied Mechanics, 1962, Vol.29, Pp.143-150.
61. Hashin Z. *Analysis of properties of fiber composites with anisotropic constituents*. ASME J. of Applied Mechanics, 1979, Vol.46, Pp.543-550.
62. Kapuria S., Patni M., Yasin M.A. *A quadrilateral shallow shell element based on the third-order theory for functionally graded plates and shells and the inaccuracy of the rule of mixtures*. European J. of Mechanics A. Solids, 2015, Vol.49, Pp.268-282.
63. Karami B., Shahsavari D., Janghorban M., Li L. *Influence of homogenization schemes on vibration of functionally graded curved microbeams*. Composite Structures, 2019, Vol.216, Pp.67-79.
64. Huang C.S., McGee III G., Chang M.J. *Vibrations of cracked rectangular FGM thick plates*. Composite Structures, 2011, Vol.93, Pp.1747-1764.
65. Shen H.S., Wang Z.X. *Assessment of Voight and Mori-Tanaka models for vibration analysis of functionally graded plates*. Composite Structures, 2012, Vol.94, Pp.2197-2208.
66. Caruso J.J., Charnis C.C. *Assessment of simplified composite micromechanics using three-dimensional finite element analysis.* J. of Composites, Technology and Research, 1986, Vol.8, No.3, Pp.77-83.
67. Aboudi J., Pindera M.J., Arnold S.M. *Higher-order theory for functionally graded materials*. Composites Part B: Engineering, 1999, Vol.30, Pp.777-832.
68. Yin H., Sun L., Paulino G. *Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions*. Acta Materialia, 2004, Vol.52, Pp.3535-3543.
69. Bansal Y., Pindera M.J. *Efficient reformulation of functionally graded materials*. J. of Thermal Stresses, 2003, Vol.26, Pp.1055-1092.
70. Kluseman B., Svendsen B. *Homogenization methods for multi-phase elastic composites: comparisons and benchmarks*. Technische Mechanik, 2010, Vol.30, Pp.374-386.
71. Anthoine A. *Second-order homogenization of functionally graded materials*. Int. J. of Solids and Structures, 2010, Vol.47, Pp.1477-1489.
72. Vlasov A.N., Volkov-Bogorodskii D.B., Karnet Yu.N., Gamlitskii Yu.A.,

Mudruk V.I. *Otsenka mekhanicheskikh svojstv giperuprugikh kompozitnykh materialov s malymi dobavkami mineral'nykh napolnitelej. Chast' II. Realizatsiya zadachi na yachejke metodom konechnykh ehlementov [Estimate of mechanical properties of hyperelastic composite materials with small additions of mineral fillings. Part II. Realization of the problem on a cell by finite element method]*. Kauchuk i rezina, 2017, Vol.76, No.1, Pp.58-63.

73. Vlasov A.N., Volkov-Bogorodskiy D.B. *Method of asymptotic homogenization of thermoelasticity equations in parametric space: part I (theoretical)*. Composites: Mechanics, Computations, Applications: An Int. J., 2018, Vol.9, No.4, Pp.331-343.
74. Vlasov A.N., Volkov-Bogorodskiy D.B. *Method of asymptotic homogenization of thermoviscoelasticity equations in parametric space*. Participation & Environment, 2018, Vol.9, No.4, Pp.331-334.
75. Vlasov A.N. *Usrednenie mekhanicheskikh svojstv strukturno-neodnorodnykh sred [Averaging of mechanical properties of structurally heterogeneous media]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2004, Vol.10, No.3, Pp.424-441.
76. Vlasov A.N. *Usrednenie kharakteristik deformatsionnykh svojstv strukturno-neodnorodnykh sred s neideal'nymi usloviyami na kontaktakh [Averaging of the characteristics of heterogeneous media with non-ideal contact conditions]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2006, Vol.12, No.2, Pp.200-218.
77. Tornabene F., Fantuzzi N., Bacciocchi M., Viola E. *Effect of agglomeration on the natural frequencies of functionally graded carbon nanotube-reinforced laminated composite doubly-curved shells*. Composites: Pt. B., 2016, Vol.89, Pp.187-218.
78. Tornabene F., Fantuzzi N., Bacciocchi M. *Linear static response of nanocomposite plates and shells reinforced by agglomerated carbon nanotubes*. Composites: Pt. B., 2017, Vol.115, Pp.449-476.
79. Azadi M., Azadi M. *Nonlinear transient heat transfer and thermoelastic analysis of thick-walled FGM cylinders with temperature-dependent material properties using Hermitian finite element*. J. Mechanical Science and Technology, 2009, Vol.23, Iss.10, Pp. 2635-2644.
80. Azadi M., Shariyat M. *Nonlinear transient transfinite element thermal analysis of thick-walled FGM cylinders with temperature-dependent material properties*. Meccanica, 2010, Vol.45, Pp.305-318.
81. Zhang L., Li X.F. *Buckling and vibration analysis of functionally graded thermo-electro-thermo-elastic circular cylindrical shells.* Applied Mathematical Modeling, 2013, Vol.37, Pp.2279-2292.
82. Dai H.L., Rao Y.N. *Nonlinear dynamic behavior of a long temperature-dependent FGM hollow cylinder subjected to thermal loading*. Science and Engineering of Composite Materials, 2014, Vol.21, Pp.267-280.
83. Gorshkov A.G., Medvedskii A.L., Rabinskii L.N., Tarlakovskii D.V. *Volny v sploshnykh sredakh [Waves in Continuum Media]*. Moskva, Fizmatlit, 2004.
84. Ostrovskii L.A., Potapov A.I. *Vvedenie v teoriyu modulirovannykh voln [Introduction in the theory of modulated waves]*. Moskva, Fizmatlit, 2003.
85. Grinchenko V.T., Melesko V.V. *Garmonicheskie kolebaniya i volny v uprugikh telakh [Harmonic Oscillations and waves in Elastic Solids]*. Kiev, Naukova dumka, 1981.
86. Erofeev V.I. *Volnovye protsessy v tverdykh telakh s mikrostrukturoj [Wave*

Processes in Solids with Microstructure]. Moskva, Moskovskij gosudarstvennyj universitet, 1999.
87. Erofeev V.I., Kazhaev V.V., Semerikova N.P. *Volny v sterzhnyakh. Dispersiya, dissipatsiya, nelinejnost' [Waves in Beams: Dispersion, Dissipation, Nonlinearity]*. Moskva, Fizmatlit, 2002.
88. Lamb H. *On flexure of an elastic plate*. Proc. of the Mathematical Society of London, 1889/1890, Vol.21, No. 360, Pp.70-90.
89. Lamb H. *On waves in an elastic plate.* Proc. of the Royal Society of London A, 1917, Vol.93, No.648, Pp.114-128.
90. Gol'dshtein R.V., Ilyashenko A.V., Kuznetsov S.V. *Volny Lehmba v anizotropnykh sredakh: shestimernyj formalizm Koshi [Lamb waves in anisotropic media: six-dimensional Cauchy formalism]*. Matematicheskoe modelirovanie, 2017, Vol.29, No.10, Pp.86-94.
91. Viktorov I.A. *Ul'trazvukovye volny Lehmba [Ultrasonic Lamb waves]*. Akusticheskij zhurnal, 1965, Vol.11, No.1, Pp.1-18.
92. Genkin M.D., Bobrovnitskii Yu.I. *Kolebaniya uprugoj polosy. V knige Metody vibroizolyatsii mashin i prisoedinennykh konstruktsij [Oscillations of anelastic strip. In Methods of Vibroizolation for Machines and Attached Structures]*. Moskva, Nauka, 1975, Pp.12-42.
93. Thomson W.T. *Transmission of elastic waves through a stratified solid medium*. J. of Applied Physics, 1950, Vol.21, Pp.89-93.
94. Burg K.E., Ewing M., Press F., Stalken E.J. *A seismic wave guide phenomenon*. Geophysics, 1951, Vol.16, Pp.594-612.
95. Haskell N.A. *The dispersion of surface waves on multilayered media*. Bulletin of the Seismic Society of America, 1953, Vol.43, Pp.17-34.
96. Stroh A.N. *Steady state problems in anisotropic elasticity.* J. of Mathem. Physics, 1962, Vol.41, Pp.77-103.
97. Ting T.C.T. *A modified Lekhnitskii formalism a la Stroh for anisotropic elasticity and classification of the 6x6 matrix N.* Proc. Royal Society of London, 1999, Vol.A455, Pp.69-89.
98. Kuznetsov S.V. *Lamb waves in anisotropic functionally graded plates: a closed form dispersion solution*. J. of Mechanics, 2020, Vol.36, No.1, Pp.1-6.
99. Kuznetsov S.V. *Lamb Waves in Anisotropic Plates (Review).* Acoustical Physics, 2014, Vol.60, No.1, Pp.95-103.
100. Ilyashenko A., Kuznetsov S. *Dispersive waves in functionally graded plates*. MATEC Web of Conferences, 2018, Vol.251, 04052.
101. Kuznetsov S.V. *Lamb waves in functionally graded plates with transverse inhomogeneity.* Acta Mecanica, 2018, Vol.229, Pp.4131-4139.
102. Ohyoshi T. *New stacking layer elements for analyses of reflection for transmission of elastic waves to inhomogeneous layers*. Mechanics Research Communication, 1993, Vol.20, No.4, Pp.353-359.
103. Ohyoshi T. *Linearly inhomogeneous layer elements for reflectance evaluation of inhomogeneous layers*. ASME Dynamics Response and Behavior of Composites, 1995, Vol.46, Pp.121-126.
104. Ohyoshi T., Sui G.J., Miuro K. *Use of stacking model of the linearly inhomogeneous layer elements*. Proc. Of the ASME. Aerospace Division, 1996, Vol.52, Pp.101-106.
105. Han X., Liu G.R., Lam K.Y., Ohyoshi T. *A quadratic layer element for analyzing stress waves in FGMs and its application in material characterization*.

J. of Sound and Vibration, 2000, Vol.236, Pp.307-321.
106.Han X., Liu G.R. *Effects of SH waves in a functionally graded plate.* Mechanics Research Communication, 2002, Vol.29, Pp.327-338.
107.Han X., Liu G.R., Xi Z.C., Lam K.Y. *Transient waves in functionally graded cylinder*. Int. J. of Solids and Structures, 2001, Vol.38, Pp.3021-3037.
108.Han X., Liu G.R., Xi Z.C., Lam K.Y. *Characteristics of waves in a functionally graded cylinder*. Int. J. of Numerical Methods in Engineering, 2002, Vol.53, Pp.653-676.
109.Xi Z.C., Liu G.R., Lam K.Y., Shang H.M. *Strip element method for analyzing wave scattering by a crack in an immersed laminated composite cylinder*. J. of the Acoustical Society of America, 2000, Vol.108, Pp.175-183.
110.Fahmy A.H., Adler E.L. *Propagation of acoustic surface waves in multilayers: a matrix description.* Applied Physics Letters, 1973, Vol.22, Pp.495-497.
111.Lowe M.J.S. *Matrix techniques for modeling ultrasonic waves in multilayered media*. IEEE Transact. Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, 1995, Vol.42, Pp.525-542.
112.Dunkin J.W. *Computation of modal solutions in layered elastic media at high frequencies.* Bull. of the Seismic Society of America, 1965, Vol.55, Pp.335-358.
113.Levesque D., Piche L. *A robust transfer matrix formulation for the ultrasonic response of multilayered absorbing media*. J. of the Acoustical Society of America, 1992, Vol.92, Pp.452-467.
114.Castaings M., Hosten B. *Delta operator technique to improve the Thomson–Haskell method stability for propagation in multilayered anisotropic absorbing plate*. J. of the Acoustical Society of America, 1994, Vol.95, Pp.1931-1941.
115.Bailey D.H. *Automatic translation of Fortran programs to multiprecision.* NASA RNR, Tech. Report RNR-91-025, 1993.
116.Bailey D.H. *A portable high performance multiprecision package.* NASA RNR, Tech. Report RNR-90-022, 1993.
117.Kuznetsov S.V. *Surface waves of Non-Rayleigh type*. Quarterly Applied Mathematics, 2003, Vol.61, Pp.575-582.
118.Kuznetsov S.V. *Lamb waves in a clamped and a partially clamped elastic layer.* Mechanics of Solids, 2015, Vol.50, No.1, Pp.81-95.
119.Abo-Zena R. *Dispersion function computations for unlimited frequency values*. Geophys. J. of the Royal Astronom. Society, 1979, Vol.58, Pp.91-105.
120.Kenneth B.L.N. *Seismic wave propagation in stratified media*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1983.
121.Evans R.B. *The decoupling of seismic waves*. Wave Motion, 1986, Vol.8, Pp.321-328.
122.Chin R.C.Y., Hedstrom G.W., Thigpen L. *Matrix methods in synthetic seismograms*. Geophys. J. of the Royal Astronom. Society, 1984, Vol.77, Pp.483-502.
123.Wang L., Rokhlin S.I. *Stable reformulation of transfer matrix method for wave propagation in layered anisotropic media*. Ultrasonics, 2001, Vol.39, Pp.413-424.
124.Wang L., Rokhlin S.I. *Recursive asymptotic stiffness matrix method for analysis of surface acoustic wave devices on layered piezoelectric media*. AIP Applied Physics Letters, 2002, Vol.81, Pp.4049-4051.
125.Wang L., Rokhlin S.I. *Modeling of wave propagation in layered piezoelectric media by a recursive asymptotic method*. IEEE Transact. Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency control, 2004, Vol.51, Pp.1060-1071.

126. Wang L., Rokhlin S.I. *A compliance/stiffness matrix formulation of general Green's function and effective permittivity for piezoelectric multilayers*. IEEE Transact. Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, 2004, Vol.51, Pp.453-463.
127. Kiełczynski P., Szalewski M., Balcerzak A., Wieja K. *Propagation of ultrasonic Love waves in nonhomogeneous elastic functionally graded materials*. Ultrasonics, 2016, Vol.65, Pp.220-227.
128. Ezzin H., Wang B., Qian Z. *Propagation behavior of ultrasonic Love waves in functionally graded piezoelectric-piezomagnetic materials with exponential variation*. Mechanics of Materials, 2020, Vol.148, 103492.
129. Bakhtiari M., Tarkashvand A., Daneshjou K. *Plane-strain wave propagation of an impulse-excited fluid-filled functionally graded cylinder containing an internally clamped shell.* Thin-Walled Structures, 2020, Vol.149, 106482.
130. Ben Salah I., Wali Y., Ben Ghozlen M.H. *Love waves in functionally graded piezoelectric materials by stiffness matrix method.* Ultrasonics, 2011, Vol.51, Pp.310-316.
131. Pasteraud T., Laude V., Ballandras S. *Stable scattering-matric method for surface acoustic waves in piezoelectric multilayers*. Applied Physics Letters, 2002, Vol.80, No.14, Pp.2544-2546.
132. Pao Y.H., Keh D.C., Howard S.M. *Dynamic response and wave propagation in plane trusses and frames*. AIAA Journal, 1999, Vol.37, Pp.594-603.
133. Pao Y.H., Su X.Y., Tian J.Y. *Reverberation matrix method for propagation of sound in a multilayered liquid*. J. of Sound and Vibration, 2000, Vol.230, Pp.743-760.
134. Su X.Y., Tian J.Y., Pao Y.H. *Application of the reverberation-ray matrix to the propagation of elastic waves in a layered solid*. International J. of Solids and Structures, 2002, Vol.39, Pp.5447-5463.
135. Guo Y.Q., Chen W.Q., Zhang Y.L. *Guided wave propagation in multilayered piezoelectric structures*. Science in China Series G: Physics, Mechanics & Astronomy, 2009, Vol.52, No.7, Pp.1094-1104.
136. Chen W.Q., Wang H.M., Bao R.H. *On calculating dispersion curves of waves in a functionally graded elastic plate*. Composite Structures, 2007, Vol.81, Pp.233-242.
137. Zhu J., Chen W.Q., Ye G.R., Fu J.Z. *Waves in fluid-filled functionally graded piezoelectric hollow cylinders: A restudy based on the reverberation-ray matrix formulation*. Wave Motion, 2013, Vol.50, Pp.415-427.
138. Knopoff L. *A matrix method for elastic wave problems*. Bull. of the Seismic. Society of America, 1964, Vol.54, Pp.431-438.
139. Randall M.J. *Fast programs for layered half-space problems*. Bull. of the Seismic. Society of America, 1967, Vol.57, Pp.1299-1316.
140. Schwab F.A. *Surface-wave dispersion computation: Knopoff's method*. Bull. of the Seismic. Society of America, 1970, Vol.60, Pp.1491-1520.
141. Schmidt H., Jensen F.B. *Efficient numerical solution technique for wave propagation in horizontally stratified environments.* Comp. & Mathematics with Applications, 1985, Vol.11, Pp.699-715.
142. Mal A.K. *Guided waves in layered solids with interface zones*. Int. J. of Engineering Sciences, 1988, Vol.26, Pp.873-881.
143. Liu C., Yu J., Zhang B., Zhang X., Elmaimouni L. *Analysis of Lamb waves propagation in a functionally graded piezoelectric small-scale plate based*

on the modified couple stress theory. Composite Structures, 2021, Vol.265, 113733.
144. Lowe M.J.S. *Plate waves for the NDT of diffusion bonded titanium*. Ph. D. Dissertation. London, Univ. of London, 1992.
145. Shuvalov A.L., Poncelet O., Deschamps M. *General formalism for plane guided waves in transversely inhomogeneous anisotropic plates*.Wave Motion, 2004, Vol.40, Pp.413-426.
146. Shuvalov A.L., Le Clezio E., Feuillard G. *The state-vector formalism and the Peano series solution for modelling guided waves in functionally graded anisotropic piezoelectric plates.* Int. J. of Engineering Sciences, 2008, Vol.46, Pp.929-947.
147. Ingebrigtsen K.A., Tonning A. *Elastic surface waves in crystals*. Physical Reviews, 1969, Vol.184, Pp.942-951.
148. Gantmakher F. R. *Teoriya matrits [Matrix Theory]*. Moskva, Nauka, 1967.
149. Ben Amor M., Ben Ghozlen M.H. *Lamb waves propagation in functionally graded piezoelectric materials by Peano-series method*, Ultrasonics, 2015, Vol.55, Pp.10-14.
150. Yang T., Huang Q., Li S. *Three-dimensional elasticity solutions for sound radiation of functionally graded materials plates considering state space method*. Shock and Vibration, 2016, 1403856.
151. Wang L., Rokhlin S.I. *Recursive geometric integrators for wave propagation in a functionally graded multilayered elastic medium*. J. of the Mechanics and Physics of Solids, 2004, Vol.52, Pp.2473-2506.

Поступила в редакцию 25 февраля 2021 года.

Сведения об авторе:

Жаворонок Сергей Игоревич – в.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия, e-mail: zhavoronok@iam.ras.ru