

УДК 539.4

DOI 10.33113/mkmk.ras.2021.27.03.295\_308.01

## УЧЕТ РАЗВИТИЯ МАРТЕНСИТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ОБЪЕДИНЕННОЙ МОДЕЛИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ СПЛАВОВ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ В СЛУЧАЕ ТРАНСЛЯЦИОННОГО УПРОЧНЕНИЯ\*

Гаганова Н.В.

*ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова»,  
г. Москва, Россия*

### АННОТАЦИЯ

В сплавах с памятью формы макроскопические неупругие деформации могут быть вызваны как фазовыми переходами, так и переориентацией ранее образованных мартенситных ячеек при структурном превращении. Несмотря на то, что процессы фазового и структурного деформирования взаимосвязаны, между ними существуют значительные различия. В отличие от фазовых деформаций, для структурных деформаций характерно явление деформационного упрочнения: в пространстве девиаторов напряжений упругую область ограничивает поверхность нагружения, на размеры и положение центра которой влияют неупругие деформации. В отличие от структурных деформаций, для фазовых деформаций явление упрочнения не характерно, фазовые переходы могут происходить при нулевых напряжениях, а рост фазовых деформаций может наблюдаться как при уменьшающихся напряжениях, так и при их отсутствии. В данной работе исследуется объединенная модель фазового и структурного деформирования сплавов с памятью формы, учитывающая упомянутые свойства этих механизмов. Модель описывает как фазовый, так и структурный механизмы изменения неупругой деформации, а также влияние первого механизма на второй. Приращение неупругих деформаций, обусловленное структурным переходом в активном процессе, определяется ассоциированным законом. Формулируется дифференциальное условие активного нагружения и появления структурных деформаций, которое выражает требование сонаправленности тензора приращений структурных деформаций внешней нормали к поверхности нагружения и положительности параметра упрочнения, связанного со структурным переходом.

В большинстве существующих моделей учитывается только процесс образования новых мартенситных мезо-элементов, но не учитывается процесс развития мезо-элементов, образованных ранее. Между тем, эксперименты показывают, что развитие мартенситных элементов может заметно влиять на значения деформаций. Учет этого фактора необходим, чтобы модель правильно описывала явление ориентированного превращения, а также процессы, в которых прямое термоупругое превращение происходит при ступенчато или плавно уменьшающихся напряжениях. В данной статье исследуется распространение объединенной модели деформирования сплавов с памятью формы на соотношения, позволяющие учесть развитие мартенситных элементов при фазовом и структурном переходе. Рассмотрен процесс пропорционального нагружения линейно возрастающими напряжениями. Проведено сравнение результатов, полученных с учетом развития мартенситных элементов и без него.

**Ключевые слова:** сплавы с памятью формы; фазовые и структурные превращения; деформационное упрочнение; трансляционное упрочнение

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №20-01-00240.

# SUPERELASTICITY DESCRIPTION BASED ON THE COMBINED MODEL OF SHAPE MEMORY ALLOYS DEFORMATION CONSIDERING DEVELOPMENT OF THE MARTENSITIC ELEMENTS

Gaganova N.V.

*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

## ABSTRACT

In shape memory alloys, macroscopic inelastic deformations can be caused by phase transitions and reorientation of previously formed martensitic elements during structural transformation. Despite the fact that phase and structural deformation are interrelated, there are significant differences between them. As distinct from phase deformation, structural deformation is characterized by strain hardening: the elastic region is limited by the loading surface in the stress deviator space, inelastic deformation affects the size and position of the loading surface. In contrast to structural deformation, the phenomenon of hardening is not typical for phase deformation, phase transitions can occur without load, and phase deformation can be observed with decreasing stresses or without load. In this paper, a combined model of phase and structural deformation of shape-memory alloys is considered. It takes into account the mentioned properties of inelastic deformations in shape memory alloys. The model describes both phase and structural mechanisms of inelastic deformation, and influence of the first mechanism on the second. Inelastic deformation due to structural transformation in the active process obeys the associated flow rule. The differential condition for the active process and structural deformation is formulated. Tensor increment of the structural deformation is required to be codirectional with the external normal to the loading surface, hardening parameter associated with the structural transformation correspondingly is required to be positive.

Most existing models considers only formation of new martensitic meso-elements, but do not take into account the development of meso-elements formed earlier. Meanwhile, experiments show that the development of martensitic elements can significantly affect deformations. This factor is necessary for describing the phenomenon of oriented transformation correctly, and the processes in which thermoelastic transformation from austenite to martensite occurs at stepwise or smoothly decreasing stresses. The subject of this article is the extension of the combined deformation model of shape-memory alloys to the relations that allow taking into account the development of martensitic elements during the phase and structural transition. The process of proportional loading with linearly increasing stresses is considered as a model problem. The obtained results are compared with the corresponding results obtained without considering the development of martensitic elements.

**Keywords:** shape memory alloys; phase and structural transformations; strain hardening; translational hardening

## ВВЕДЕНИЕ

В сплавах с памятью формы (СПФ) макроскопические неупругие деформации могут быть вызваны как фазовыми переходами, так и переориентацией ранее образованных мартенситных ячеек при структурном превращении. Несмотря на то, что процессы фазового и структурного деформирования взаимосвязаны, между ними существуют значительные различия. Так, было экспериментально показано, что в отличие от фазовых деформаций, для структурных деформаций характерно явление деформационного упрочнения: в пространстве девиаторов напряжений упругую область ограничивает

поверхность нагружения, на размеры и положение центра которой влияют неупругие деформации [1-3]. Заметим, что приведенные в [4] диаграммы прямого и обратного нагружения СПФ в режиме мартенситной неупругости показывают, что для структурного деформирования характерно не только изотропное, но и трансляционное упрочнение. Следует учитывать, что в отличие от структурных деформаций, для фазовых деформаций явление упрочнения не характерно, фазовые переходы могут происходить при нулевых напряжениях, а рост фазовых деформаций может наблюдаться как при уменьшающихся напряжениях, так и при их отсутствии в случае ориентированного превращения [5].

Несмотря на перечисленные различия, процессы накопления фазовых и структурных деформаций тесно связаны друг с другом. В [6-8] описывается явление перекрестного упрочнения и приводятся результаты экспериментов, согласно которым радиус поверхности нагружения для структурных деформаций СПФ зависит от величины фазовой деформации. Эти экспериментальные данные привели к попыткам создать объединенную модель деформирования СПФ, в рамках которой деформированное состояние определяется единым параметром – фазово-структурной деформацией, изменение которой может происходить и за счет фазового, и за счет структурного переходов.

В большинстве известных объединенных моделей поведения СПФ [9-16] учитывается только часть приведенных особенностей процессов фазового и структурного деформирования, поскольку они либо полностью аналогичны теории пластичности, либо не учитывают эффекта деформационного упрочнения. Краткий обзор подобных моделей приведен в [17]. Наконец, в [18] предложена объединенная модель фазового и структурного деформирования СПФ, учитывающая упомянутые свойства этих механизмов, но предполагающая только изотропное упрочнение для структурного деформирования. В [19] представлена расширенная модель, позволяющая учитывать трансляционное упрочнение. В рамках предложенной в [18,19] объединенной модели на поверхность нагружения влияют и структурные, и фазовые деформации, причем радиус поверхности нагружения может как возрастать, так и убывать даже при увеличении неупругих деформаций. По аналогии с теорией пластичности, формулируется дифференциальное условие активного нагружения и появления структурных деформаций, которое выражает требование сонаправленности тензора приращений структурных деформаций внешней нормали к поверхности нагружения и положительности параметра упрочнения, связанного со структурным переходом.

В [20,21] было рассмотрено распространение модели [18] на случай учета развития мартенситных элементов, что позволило описать явление ориентированного превращения. У ориентированного мартенсита, который образуется при прямом превращении под нагрузкой, существует преимущественная ориентация мартенситных ячеек. Если в некоторый момент прямого превращения снять нагрузку и продолжить охлаждение, то деформации продолжат расти в сторону ранее приложенного напряжения, но с меньшей скоростью [22-25]. Это явление можно объяснить тем, что мартенситные пластины не только зарождаются при прямом превращении, но и растут. В [3] предлагается использовать специальную материальную функцию, определяющую соотношение между процессами зарождения и развития мартенситных элементов в зависимости от объемной доли мартенсита. Вид этой функции может быть определен по данным опыта на ориентированное превращение. Данная работа представляет собой

распространение трансляционной модели [19] на случай учета развития мартенситных элементов, что необходимо для описания явления ориентированного превращения, а также процессов, в которых прямое термоупругое превращение происходит при ступенчато или плавно уменьшающихся напряжениях.

### ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

По аналогии с [19], система определяющих соотношений для фазово-структурного деформирования СПФ формулируется следующим образом

$$d\varepsilon_{ij}^{phst'} = d\varepsilon_{ij}^{ph'} + d\varepsilon_{ij}^{st'}, \quad (1)$$

$$d\varepsilon_{ij}^{ph'} = \frac{3}{2} \rho_1 \frac{S'_{ij}}{S_i} \varphi_1(S_i) (1 - qf(q)) dq + f(q) \varepsilon_{ij}^{phst'} dq, \quad dq > 0, \quad (2)$$

$$d\varepsilon_{ij}^{ph'} = \frac{\varepsilon_{ij}^{phst'}}{q} dq, \quad dq < 0, \quad (3)$$

$$\rho_2 q \varphi_2(S^*) = \int \frac{S_{ij}}{S_i} d\varepsilon_{ij}^{phst'}, \quad S_i = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}}, \quad (4)$$

$$d\varepsilon_{ij}^{st} = d\lambda S_{ij} \quad \text{при} \quad d\lambda > 0 \quad \text{и} \quad S_i = S^*, \quad (5)$$

$$d\varepsilon_{ij}^{st} = 0 \quad \text{при} \quad d\lambda \leq 0 \quad \text{или} \quad S_i < S^*, \quad (6)$$

$$\sigma'_{ij} = S_{ij} + r_{ij}, \quad q dr_{ij} = g d\varepsilon_{ij}^{st}, \quad g > 0, \quad (7)$$

где  $d\varepsilon_{ij}^{phst'}$  – приращение девиатора фазово-структурной деформации, складывающееся из приращения за счет фазового  $d\varepsilon_{ij}^{ph'}$  и за счет структурного  $d\varepsilon_{ij}^{st'}$  переходов;  $\sigma'_{ij}$ ,  $S_{ij}$ ,  $r_{ij}$  – девиаторы напряжений, активных напряжений и микронапряжений ( $r_{ij}$  – координаты центра поверхности нагружения в пространстве девиатора напряжений),  $q$  – объемная доля мартенсита,  $S^*$  соответствует радиусу поверхности нагружения,  $g$  – постоянная материала, определяющая трансляционное упрочнение,  $f(q)$  – материальная функция, определяющая соотношение между процессами зарождения и развития мартенситных элементов, которая удовлетворяет ограничениям  $0 \leq f(q) \leq 1/q$ ;  $\varphi_1(S_i)$  – интегральная функция распределения интенсивности микронапряжений в представительном объеме СПФ в аустенитном фазовом состоянии,  $\varphi_2(x)$  – интегральная функция распределения интенсивности микронапряжений в представительном объеме СПФ в мартенситном фазовом состоянии, которая обладает теми же свойствами, что и функция  $\varphi_1(x)$ . Предполагается, что функции  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  дифференцируемы,  $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = 0$  при  $x \leq 0$ , монотонно возрастают и асимптотически стремятся к 1 при  $x \rightarrow +\infty$ .

Изменение деформации за счет структурного перехода происходит лишь в случае, когда точка, соответствующая напряженному состоянию находится на поверхности нагружения, радиус которой  $S^*$  определяется соотношением (4); (5) представляет собой ассоциированный закон для приращения деформаций за счет структурного перехода; (7) определяет движение центра поверхности

нагружения. Согласно (7) центр поверхности нагружения для структурных деформаций смещается только при изменении неупругих деформаций за счет структурного перехода.

Если приращение неупругих деформаций за счет структурного перехода отсутствует, т.е.  $d\varepsilon_{ij}^{st} = 0$ , то, согласно (7), трансляционное упрочнение отсутствует,  $dr_{ij} = 0$ ,  $\sigma'_{ij} = S_{ij}$  и описание процесса сводится к рассмотренному в [20], где трансляционное упрочнение не учитывается. В случае структурного превращения без фазового объема доля мартенсита не изменяется, т.е. в выражениях (2) и (3)  $dq = 0$  и материальная функция  $f(q)$  не влияет на результат. Данный случай сводится к рассмотренному в [19]. Таким образом, для данного исследования представляют интерес одновременно проходящие структурные и фазовые переходы.

Рассмотрим активный процесс прямого превращения и структурного перехода, для которого выполняется  $S^* = S_i$ . Согласно (1), (2) и (4), (5) для структурного перехода во время прямого превращения должно выполняться неравенство  $d\lambda > 0$  и условие

$$\rho_2 q \varphi_2(S_i) = \int \frac{S_{ij}}{S_i} \left[ \frac{3}{2} \rho_1 \frac{S'_{ij}}{S_i} \varphi_1(S_i) (1 - qf(q)) dq + f(q) \varepsilon_{ij}^{phst'} dq + d\lambda S_{ij} \right]. \quad (8)$$

Дифференцируя (8) и упрощая, получаем

$$\rho_2 d[q\varphi_2(S_i)] = \rho_1 \varphi_1(S_i) (1 - qf(q)) dq + \frac{S_{ij}}{S_i} f(q) \varepsilon_{ij}^{phst'} dq + \frac{2}{3} S_i d\lambda. \quad (9)$$

Используя (4), (5) и (7), выразим  $dS_i$  через компоненты тензора напряжений и величину  $d\lambda$

$$dS_i = \frac{3}{2S_i} S_{kl} (d\sigma'_{kl} - dr_{kl}) = \frac{3}{2S_i} S_{kl} d\sigma'_{kl} - \frac{gS_i d\lambda}{q}. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (9) и выражая  $d\lambda$ , получаем

$$d\lambda = 3 \frac{\frac{3}{2} Aq S_{kl} d\sigma'_{kl} - S_i B dq}{S_i^2 [2 + 3Ag]}, \quad (11)$$

где  $A = \rho_2 \varphi_2'(S_i)$ ,

$$B = B^+ = \rho_1 \varphi_1(S_i) (1 - qf(q)) + \frac{S_{mn}}{S_i} f(q) \varepsilon_{mn}^{phst'} - \rho_2 \varphi_2(S_i).$$

С учетом возрастания функции  $\varphi_2$  дифференциальное условие активного нагружения  $d\lambda > 0$  сводится к выполнению неравенства

$$\frac{3}{2} Aq S_{kl} d\sigma'_{kl} > S_i B dq. \quad (12)$$

Для структурного перехода во время обратного превращения, используя (3) вместо (2), можно аналогичным образом показать, что условие активного нагружения  $d\lambda > 0$  в этом случае также сводится к выполнению неравенства (12), при

$$B = B^- = \frac{S_{ij}}{S_i} \frac{\varepsilon_{ij}^{phst'}}{q} - \rho_2 \varphi_2(S_i).$$

Таким образом, подставляя (11) в (5) получаем следующее выражение для структурных деформаций

$$d\varepsilon_{ij}^{st} = \frac{3}{2} \frac{3AqS_{kl}S_{ij}d\sigma'_{kl} - 2S_iBS_{ij}dq}{[3Ag + 2]S_i^2}. \quad (13)$$

В случае структурного перехода во время прямого превращения соотношение (4) справедливо при замене  $S^*$  на текущее значение  $S_i$ . Используя (1), (2), (4), (5), можно получить следующее выражение для фазово-структурных деформаций

$$d\varepsilon_{ij}^{phst} = \frac{3}{2} \frac{S_{ij}}{S_i} \rho_2 d[q\varphi_2(S_i)] + \left( \delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{3}{2} \frac{S_{ij}}{S_i} \frac{S_{kl}}{S_i} \right) \varepsilon_{kl}^{phst'} f(q) dq. \quad (14)$$

Для обратного превращения и структурного перехода используя (1), (3), (4), (5), можно показать, что в этом случае для фазово-структурных деформаций будет выполняться

$$d\varepsilon_{ij}^{phst'} = \frac{3}{2} \frac{S_{ij}}{S_i} \rho_2 d[q\varphi_2(\sigma_i)] + \frac{1}{q} \left( \delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{3}{2} \frac{S_{ij}}{S_i} \frac{S_{kl}}{S_i} \right) \varepsilon_{kl}^{phst'} dq. \quad (15)$$

### ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЕ НАГРУЖЕНИЕ. ПРЯМОЕ ПРЕВРАЩЕНИЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЛИНЕЙНО ВОЗРАСТАЮЩИХ НАПРЯЖЕНИЙ

Для иллюстрации возможностей модели рассмотрим случай пропорционального нагружения. Нагружение считается пропорциональным, если выполнены условия

$$\sigma'_{ij} = \sigma \cdot \sigma_{ij}^0, \quad \sigma_{ij}^0 = \text{const}; \quad \frac{3}{2} \sigma_{ij}^0 \sigma_{ij}^0 = 1, \quad |\sigma| = \sigma_i. \quad (16)$$

Пусть для определенности для первого нагружения девиатор  $\sigma_{ij}^0$  выбран так, что  $\sigma > 0$ . При таком нагружении девиатор фазово-структурной деформации также будет изменяться пропорционально

$$\varepsilon^{phst'} = \varepsilon \cdot \varepsilon_{ij}^0; \quad \varepsilon_{ij}^0 = \text{const}; \quad (17)$$

$$\frac{2}{3} \varepsilon_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^0 = 1, \quad |\varepsilon| = \varepsilon_i, \quad \varepsilon_{ij}^0 = \frac{3}{2} \sigma_{ij}^0,$$

$$d\varepsilon_{ij}^{st} = \varepsilon_{ij}^0 d\varepsilon^{st}; \quad d\varepsilon_{ij}^{ph} = \varepsilon_{ij}^0 d\varepsilon^{ph}; \quad d\varepsilon = d\varepsilon^{ph} + d\varepsilon^{st}. \quad (18)$$

Подстановка (16)-(17) в уравнения модели приводит к формулам

$$r_{ij} = r\sigma_{ij}^0, \quad qdr = \frac{3}{2} g d\varepsilon^{st}, \quad S_{ij} = S\sigma_{ij}^0, \quad S = \sigma - r, \quad S_i = |S|. \quad (19)$$

Приращения фазовых и структурных деформаций в случае пропорционального нагружения определяются соотношениями

$$d\varepsilon^{ph} = \text{sign}(S) \rho_1 \varphi_1(|S|) (1 - qf(q)) dq + f(q) \varepsilon^{phst} dq, \quad q > 0,$$

$$d\varepsilon^{ph'} = \frac{\varepsilon^{phst'}}{q} dq, \quad dq < 0, \quad (20)$$

$$d\varepsilon^{st} = \frac{2}{3} S d\lambda.$$

Соотношения для структурных деформаций во время фазового перехода (13) и условие активного нагружения (12) при пропорциональном нагружении принимают вид

$$d\varepsilon^{st} = 2 \frac{Aqd\sigma - Bdq}{[3Ag + 2]}, \quad (21)$$

$$\frac{3}{2}\rho_2\varphi_2'(S)qd\sigma - Bdq > 0, \quad (22)$$

где  $A = \rho_2\varphi_2'(S)$ ,  $B = \rho_1\varphi_1(S) - \rho_2\varphi_2(S) - qf(q)\rho_1\varphi_1(S) + f(q)\varepsilon$ .

Выражение (13) для фазово-структурных деформаций для активного процесса прямого превращения при пропорциональном нагружении упрощается

$$\rho_2 d[q\varphi_2(S^*)] = d\varepsilon^{phstr}. \quad (23)$$

Чтобы оценить влияние учета развития мартенситных элементов, приводится пример расчета для случая прямого фазового перехода из полностью аустенитного состояния, проходящего при линейно и пропорционально возрастающем от нуля при  $q=0$  до  $\sigma_{max}$  при  $q=1$  напряжении

$$\sigma = q\sigma_{max}. \quad (24)$$

В рассматриваемой модельной задаче предполагается независимое задание изменения параметров, которого можно добиться подбором соответствующей программы изменения температуры.

В качестве функций распределения интенсивности микронапряжений  $\varphi_1(\sigma)$  и  $\varphi_2(\sigma)$  для расчетов использовались интегральные функции экспоненциального распределения и распределения Вейбулла

$$\varphi_1(S) = 1 - \exp\left(-\frac{S}{\sigma_{01}}\right), \quad \varphi_2(S) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{S}{\sigma_{01}}\right)^\alpha\right].$$

Для удобства использовались безразмерные величины

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{\rho_1}, \quad \sigma_1 = \frac{\sigma}{\sigma_{01}}, \quad s_{max} = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{01}}, \quad G = \frac{\rho_2 g}{\sigma_{02}}, \quad \beta = \frac{\sigma_{02}}{\sigma_{01}}, \quad \gamma = \frac{\rho_1}{\rho_2}.$$

Аналогично [18-21], предполагалось выполнение неравенства

$$\rho_1\varphi_1(S) > \rho_2\varphi_2(S),$$

обеспечить выполнение которого можно, выбрав для  $\gamma$  зависимость, предложенную в [26], вида  $\gamma = 1 + \exp\left(-\beta^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right)$ .

Заметим, что в рассматриваемой модели для наличия структурных деформаций требуется выполнение двух условий:

- 1) точка, соответствующая текущему тензору напряжений, должна находиться на поверхности нагружения, которая в случае пропорционального нагружения задается уравнением (23);
- 2) параметр упрочнения  $d\lambda$  должен быть положительным, в случае пропорционального нагружения это условие соответствует неравенству (22).

В начале процесса  $\sigma = S = \tau = S^* = \varepsilon = 0$ , таким образом, условие активного нагружения (22) не выполняется, структурные деформации отсутствуют. До тех пор, пока не начался структурный переход, зависимости для деформаций будут полностью совпадать с решением, приведенным в [20], не учитывающем трансляционное упрочнение.

Как показано в [20], в случае прямого фазового перехода в отсутствие структурных деформаций, (1), (2) приводят к дифференциальному уравнению относительно деформаций  $\varepsilon_1$

$$\begin{aligned} d\varepsilon_1 &= \varphi_1(S)(1-f(q))dq + f(q)\varepsilon_1, \\ \varepsilon_1(q_0) &= \varepsilon_1^0. \end{aligned} \quad (25)$$

В случае  $f(q) = a$ , используя метод вариации постоянной, можно получить решение дифференциального уравнения (25) в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \exp\left(a_0(q - q_2^{\text{ph}})\right)\varepsilon_1^0(q_0) + q + \frac{s_{\text{max}}e^{-s_{\text{max}}q}}{(a_0 + s_{\text{max}})^2} - \frac{a_0qe^{-s_{\text{max}}q}}{a_0 + s_{\text{max}}} - \\ &- \exp\left(a_0(q - q_0)\right)\left[q_0 + \frac{s_{\text{max}}e^{-s_{\text{max}}q_0}}{(a_0 + s_{\text{max}})^2} - \frac{a_0q_0e^{-s_{\text{max}}q_0}}{a_0 + s_{\text{max}}}\right]. \end{aligned}$$

При нулевых начальных условиях решением (25) является следующая зависимость деформаций  $\varepsilon_1$  от параметра фазового состава  $q$

$$\varepsilon_1 = q + \frac{s_{\text{max}}(e^{-s_{\text{max}}q} - e^{a_0q})}{(a_0 + s_{\text{max}})^2} - \frac{a_0qe^{-s_{\text{max}}q}}{a_0 + s_{\text{max}}}. \quad (26)$$

Если при достижении некоторого значения  $q^*$  в течение процесса начнут выполняться сформулированные выше условия активного нагружения, появятся структурные деформации. Составим систему дифференциальных уравнений относительно  $\varepsilon$ ,  $S$  как функций от параметра фазового состава  $q$  для второго этапа нагружения, на котором присутствуют структурные деформации. Выражая в (21)  $d\varepsilon^{\text{st}}$  через  $dr$  с помощью (19) и учитывая, что  $dr = d\sigma - dS$ , получаем дифференциальное уравнение

$$dS = \frac{3gB(\varepsilon, S, q) + 2q\sigma_{\text{max}}}{3\rho_2\varphi_2'(S)gq + 2q} dq. \quad (27)$$

Подставляя выражения для фазовых и структурных деформаций (20) и (21) в (18), получаем еще одно дифференциальное уравнение вида

$$d\varepsilon = d\varepsilon^{\text{ph}}(\varepsilon, S, q) + d\varepsilon^{\text{st}}(\varepsilon, S, q). \quad (28)$$

Сформулируем начальные условия для системы дифференциальных уравнений (27)-(28). На первом этапе нагружения структурные деформации отсутствуют, следовательно, согласно (19) трансляционный сдвиг центра поверхности нагружения отсутствует,  $dr = 0$ , значит в конце первого этапа  $S = \sigma$ . Таким образом, начальные условия для второго этапа нагружения, на котором выполняются условия активного нагружения, с учетом (24) можно сформулировать в виде  $S(q^*) = \sigma_{\text{max}}q^*$ ,  $\varepsilon = \varepsilon(q^*)$ , где  $q^*$  – значение параметра фазового состава, при котором начинают выполняться оба условия активного нагружения. Решая систему уравнений (27)-(28), можно найти функции  $S(q)$  и  $\varepsilon(q)$ .

Заметим, что при достижении некоторого значения  $q^{**}$  второе условие активного нагружения, которое выражается неравенством (22) и соответствует положительности параметра  $d\lambda$ , может перестать выполняться. В таком случае на последнем этапе нагружения деформации будут увеличиваться только за счет фазового перехода и описываться уравнением (25).



Расчеты были выполнены для значений параметра  $a = 0$ ,  $a = 0.35$  и  $a = 0.7$ , при которых достаточно хорошо описывается явление ориентированного превращения в никелиде титана. Системы дифференциальных уравнений были решены численно методом Рунге-Кутты четвертого порядка в системе Matlab. При этом, аналогично [19], использовались следующие значения параметров:  $\alpha = 2.5$ ,  $\beta = 2.04$ ,  $G = 0.75$ ,  $s_{\max} = 4$ . Значения параметра фазового состава  $q^*$  и  $q^{**}$ , при которых начинается и заканчивается структурный переход, приведены в таблице 1.

Таблица 1.

$s_{\max} = 4, G = 0.75$	$q^*$	$q^{**}$
$a = 0$	0.5073	0.9239
$a = 0.35$	0.4983	0.9557
$a = 0.7$	0.4888	0.9982

Графики фазово-структурных деформаций и радиуса поверхности нагружения представлены на рис.1 и рис.2 соответственно. Можно заметить, что при увеличивающихся напряжениях учет развития мартенситных мезоэлементов оказывает на значения деформаций меньшее влияние, чем при уменьшающихся напряжениях. Поскольку во время уменьшающихся напряжений условия активного нагружения не выполняются, структурные деформации не изменяются, соответственно согласно (7) трансляционное упрочнение отсутствует. Таким образом, случай уменьшающихся напряжений сводится к случаю, рассмотренному в [20].

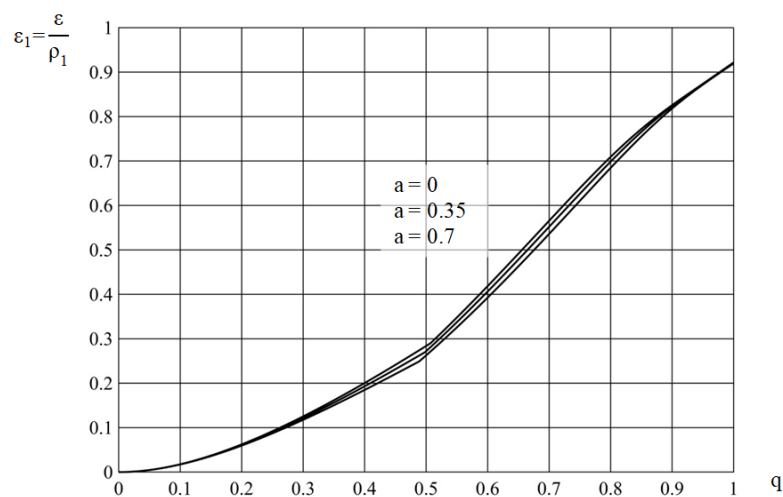


Рис.1. Зависимость величины фазово-структурных деформаций от параметра фазового состава  $q$  в случае прямого превращения под действием линейно возрастающего напряжения для  $s_{\max} = 4$ . Графики построены для значений параметра  $a = 0$ ,  $a = 0.35$  и  $a = 0.7$ .

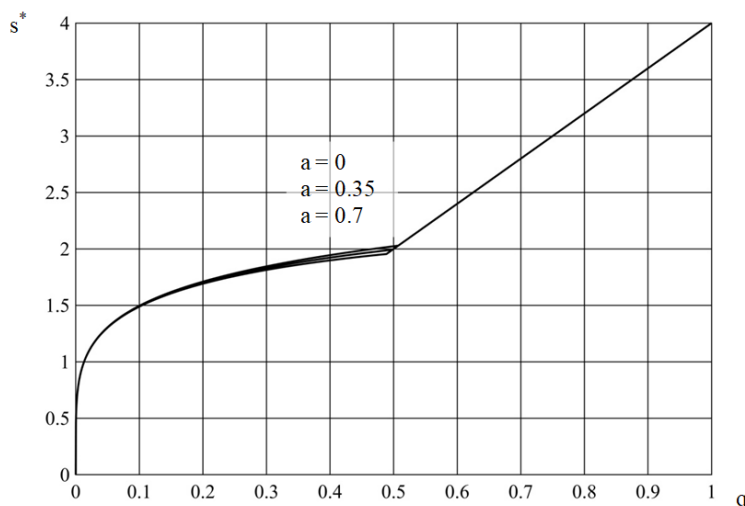


Рис.2. Зависимость радиуса поверхности нагружения от параметра фазового состава  $q$  в случае прямого превращения под действием линейно возрастающего напряжения для  $s_{\max} = 4$ . Графики построены для значений параметра  $a = 0$ ,  $a = 0.35$  и  $a = 0.7$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлено распространение объединенной модели фазово-структурного деформирования сплавов с памятью формы, предложенной в [19], на случай учета развития мартенситных элементов. Объединенная модель описывает как фазовый, так и структурный механизмы изменения неупругой деформации, а также влияние первого механизма на второй. Как было показано в [20], учет развития мартенситных элементов позволяет описать процесс ориентированного превращения, который не позволяли рассмотреть объединенные модели из [16,19].

Решена модельная задача для процесса пропорционального нагружения линейно возрастающими напряжениями. Проведено сравнение результатов, полученных с учетом развития мартенситных элементов, с результатами, соответствующими случаю  $f(q) = 0$ . При увеличивающихся напряжениях учет развития мартенситных мезоэлементов оказывает на значения деформаций меньшее влияние, чем при уменьшающихся напряжениях [20]. Тем не менее, учет развития мартенситных элементов необходим, чтобы модель правильно описывала явление ориентированного превращения, а также процессы, в которых прямое термоупругое превращение происходит при ступенчато или плавно уменьшающихся напряжениях.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Thamburaja P. *Constitutive equations for martensitic reorientation and detwinning in shape-memory alloys* // J. of the Mechanics and Physics of Solids. – 2005. – Vol.53. – Pp.825-856.
2. Liu Y., Xie Z. *Detwinning in shape memory alloy* // Progress in Smart Materials and Structures. – 2007. – Chapter 3. – Pp.29-65.

3. Мовчан А.А., Казарина С.А. *Материалы с памятью формы как объект механики деформируемого твердого тела: экспериментальные исследования, определяющие соотношения, решение краевых задач* // Физическая мезомеханика. – 2012. – Т.15. – №1. – С.105-116.
4. Каменцева З.П., Кузьмин С.Л., Лихачев В.А. *Исследование деформационного упрочнения никелида титана* // Проблемы прочности. – 1980. – №9. – С.87-91.
5. Лихачев В.А., Патрикеев Ю.И., Щуплецов В.Н. *Эффект ориентированного превращения в никелиде титана* // ФММ. – 1986. – Т.61. – Вып.1. – С.121-126.
6. Мовчан А.А., Казарина С.А., Тант Зинг Аунг. *Аналог теории пластичности для описания деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях* // Деформация и разрушение материалов. – 2009. – №9. – С.2-6.
7. Мовчан А.А., Сильченко А.Л., Казарина С.А. *Экспериментальное исследование и теоретическое моделирование эффекта перекрестного упрочнения сплавов с памятью формы* // Деформация и разрушение материалов. – 2017. – №3. – С.20-27.
8. Мовчан А.А., Казарина С.А., Сильченко А.Л. *Эффект перекрестного упрочнения при сжатии* // Деформация и разрушение материалов. – 2019. – №4. – С.2-9.
9. Tanaka K. *A phenomenological description on thermomechanical behavior of shape memory alloys* // J. Pressure vessel technology. Trans. ASME. – 1990. – Vol.112. – No.2. – Pp.158-163.
10. Jape S., Vaxevanis T., Lagoudas D.C. *On the Fracture Toughness and Stable Crack Growth in Shape Memory Alloy Actuators in the Presence of Transformation-Induced Plasticity* // Intern. J. of Fracture. – 2018. – Vol.209. – No.1-2. – Pp.117-130.
11. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г., Сильченко Т.Л. *Учет явления мартенситной неупругости при обратном фазовом превращении в сплавах с памятью формы.* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2011. – №2. – С.44-56.
12. Hartl D.J., Lagoudas D.C., Calkins F.T. *Advanced methods for the analysis, design, and optimization of SMA- based aerostructures* // Smart Mater. Struct. – 2011. – Vol.20. – No.9. – 094006 (20pp).
13. Тихомирова К.А. *Разработка и численная реализация одномерной феноменологической модели фазовой деформации в сплавах с памятью формы* // Вычислительная механика сплошных сред. – 2016. – Т.9. – №2. – С.192-206.
14. Huang W. *Yield surface of shape memory alloys and their applications* // Acta Materialia. – 1999. – Vol.47. – No.9. – Pp.2769-2776.
15. Lexcellent Ch., Boubakar M.L., Bouvet Ch., Calloch S. *About modeling the shape memory alloy behaviour based on the phase transformation surface identification under proportional loading and anisothermal conditions* // Intern. J. Solids and Struct. – 2006. – Vol.43. – No.3-4. – Pp.613-626.
16. Мишустин И.В., Мовчан А.А. *Аналог теории пластического течения для описания деформации мартенситной неупругости в сплавах с памятью формы* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2015. – №2. – С.78-95.
17. Cisse C., Zaki W., Zineb T.B. *A review of constitutive models and modeling techniques for shape memory alloys* // Intern. J. of Plasticity. – 2016. – Vol.76. – Pp.244-284.

18. Мовчан А.А. *Модель влияния фазового механизма деформирования на структурный в сплавах с памятью формы // Деформация и разрушение материалов.* – 2019. – №7. – С.14-23.
19. Мовчан А.А. *Феноменологическая модель изменения фазово-структурных деформаций в сплавах с памятью формы // Известия РАН. Механика твердого тела.* – 2020. – №4. – С.140-151.
20. Гаганова Н.В. *Распространение модели деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях на случай учета развития мартенситных элементов // Механика композиционных материалов и конструкций.* – 2019. – Т.25. – №4. – С.543-562.
21. Гаганова Н.В. *Описание явления сверхупругости в рамках объединенной модели деформирования сплавов с памятью формы с учетом развития мартенситных элементов // Механика композиционных материалов и конструкций.* – 2020. – Т.26. – №4. – С.441-454.
22. Лихачев В.А., Малинин В.Г., Овчаренко С.Я. *Деформации ориентированного превращения у сплава  $CuAlMn$  / Материалы с новыми функциональными свойствами. Материалы семинара.* – Новгород-Боровичи, 1990. – С.100-101.
23. Лихачев В.А., Малинин В.Г., Малинина Н.А. *Деформация ориентированного превращения в условиях сложного напряженно-деформированного состояния / XXIX Межреспуб. семинар «Актуальные проблемы прочности». Функционально-механические свойства материалов и их компьютерное конструирование. Материалы.* Псков, 1993. – С.235-238.
24. Беляев С.П., Ермолаев В.П., Кузьмин С.Л., Лескина М.Л., Лихачев В.А., Пульнев С.А. *Деформационные свойства металлов с различной кинетикой мартенситных превращений / XXV Всесоюз. семинар «Актуальные проблемы прочности». Прогнозирование механического поведения материалов. Сборник трудов.* – 1991. – Т.1. – С.51-56.
25. Беляев С.П., Ермолаев В.П., Кузьмин С.Л., Лескина М.Л., Лихачев В.А., Пульнев С.А. *Деформационные свойства металлов с различной кинетикой мартенситных превращений / XXV Всесоюз. семинар «Актуальные проблемы прочности». Прогнозирование механического поведения материалов. Сборник трудов.* – 1991. – Т.2. – С.121-126.
26. Мишустин И.В., Мовчан А.А. *Моделирование фазовых и структурных превращений в сплавах с памятью формы, происходящих под действием немонотонно меняющихся напряжений // Известия РАН. Механика твердого тела.* – 2014. – №1. – С.37-53.

## REFERENCES

1. Thamburaja P. *Constitutive equations for martensitic reorientation and detwinning in shape-memory alloys.* J. of the Mechanics and Physics of Solids, 2005, Vol.53, Pp.825-856.
2. Liu Y., Xie Z. *Detwinning in shape memory alloy.* Progress in Smart Materials and Structures, 2007, Chapter 3, Pp.29-65.
3. Movchan A.A., Kazarina S.A. *Shape memory materials as an object of solid state mechanics: experimental study, constitutive relations, solution of boundary value problems.* Physical mesomechanics, 2012, Vol.15, No.3-4, Pp.214-223.

4. Kamentseva Z.P., Kuz'min C.I., Likhachev V.A. *Issledovanie deformatsionnogo uprochneniya nikelida titana [Investigation of strain hardening in titanium nickelide]*. Problemy prochnosti, 1980, No.9, Pp.87-91.
5. Likhachev V.A., Patrikeyev Yu.I., Shupletsov V.N., *Ehffekt orientirovannogo prevrashheniya v nikelide titana [Oriented transformation effect in titanium nickelide]*. Fizika metallov i metallovedenie, 1986, Vol.61, No.1, Pp.121-126.
6. Movchan A.A., Kazarina S.A., Tant Zin Aung. *Analog teorii plastichnosti dlya opisaniya deformirovaniya splavov s pamyat'yu formy pri fazovykh i strukturnykh prevrashheniyakh [Analog of Theory of Plasticity for Describing Deformations of Shape Memory Alloys under Phase and Structure Transformations]*. Deformatsiya i razrushenie materialov, 2009, No.9, Pp.2-6.
7. Movchan A.A., Sil'chenko A.L., Kazarina S.A. *Experimental study and theoretical simulation of the cross hardening effect in shape memory alloys*. Russian Metallurgy (Metally), 2017, No.10, Pp.779-784.
8. Movchan A.A., Kazarina S.A., Sil'chenko A.L. *Cross Hardening of a Shape Memory Alloy during Compression*. Russian Metallurgy (Metally), 2019, Vol.2019, No.10, Pp.967-973.
9. Tanaka K. *A phenomenological description on thermomechanical behavior of shape memory alloys*. J. Pressure vessel technology. Trans. ASME, 1990, Vol.112, No.2, Pp.158-163.
10. Jape S., Baxevanis T., Lagoudas D.C. *On the Fracture Toughness and Stable Crack Growth in Shape Memory Alloy Actuators in the Presence of Transformation-Induced Plasticity*. Intern. J. of Fracture, 2018, Vol.209, No.1-2, Pp.117-130.
11. Movchan A.A., Sil'chenko L.G., Sil'chenko T.L. *Taking Account of the Martensite Inelasticity in the Reverse Phase Transformation in Shape Memory Alloys*. Mechanics of Solids, 2011, Vol.46, No.2, Pp.194-203.
12. Hartl D.J., Lagoudas D.C., Calkins F.T. *Advanced methods for the analysis, design, and optimization of SMA- based aerostructures*. Smart Mater. Struct., 2011, Vol.20, No.9, 094006.
13. Tikhomirova K.A. *Razrabotka i chislennaya realizatsiya odnomernoj fenomenologicheskoy modeli fazovoj deformatsii v splavakh s pamyat'yu formy [Numerical And Experimental Study Of Thermomechanical Behavior Of Glassy Polymers In The Case Of Finite Deformations]*. Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred, 2016, Vol.9, No.2, Pp.192-206.
14. Huang W. *Yield surface of shape memory alloys and their applications*. Acta Materialia, 1999, Vol.47, No.9, Pp.2769-2776.
15. Lexcelent Ch., Boubakar M.L., Bouvet Ch., Calloch S. *About modeling the shape memory alloy behaviour based on the phase transformation surface identification under proportional loading and anisothermal conditions*. Intern. J. Solids and Struct., 2006, Vol.43, No.3-4, Pp.613-626.
16. Mishustin I.V., Movchan A.A. *Analog of the plastic flow theory for describing martensitic inelastic strains in shape memory alloys*. Mechanics of Solids, 2015, Vol.50, No.2, Pp.176-190.
17. Cisse C., Zaki W., Zineb T.B. *A review of constitutive models and modeling techniques for shape memory alloys*. Intern. J. of Plasticity, 2016, Vol.76, Pp.244-284.
18. Movchan A.A. *Model for the Effect of the Phase Mechanism of Deformation on the Structural Mechanism in Shape Memory Alloys*. Russian Metallurgy (Metally), 2020, No.4, Pp.282-290.

19. Movchan A.A. *Phenomenological Model of Changes in Phase-Structural Deformations in Shape Memory*. Mechanics of Solids, 2020, No.4, Pp.573-583.
20. Gaganova N.V. *Rasprostranenie modeli deformirovaniya splavov s pamyat'yu formy pri fazovykh i strukturnykh prevrashheniyakh na sluchaj ucheta razvitiya martensitnykh ehlementov [Shape memory alloys constitutive model extension for considering development of the martensitic elements during phase and structural transformation]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2019, Vol.25, No.4, Pp.543-562.
21. Gaganova N.V. *Opisanie yavleniya sverkhuprugosti v ramkakh ob"edinennoj modeli deformirovaniya splavov s pamyat'yu formy s uchetom razvitiya martensitnykh ehlementov [Description of the superelasticity in the framework of the combined deformation model for shape memory alloys, considering the development of martensitic elements]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2020, Vol.26, No.4, Pp.441-454.
22. Likhachev V.A., Malinin V.G., Ovcharenko S. Ya. *Deformatsii orientirovannogo prevrashheniya u splava CuAlMn [Deformations of the oriented transformation in the CuAlMn alloy]*. Materialy s novymi funktsional'nymi svojstvami, Materialy seminar, Novgorod-Borovichy, 1990, Pp.100-101.
23. Likhachev V.A., Malinin V.G., Malinina N.A. *Deformatsiya orientirovannogo prevrashheniya v usloviyakh slozhnogo napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya [Oriented transformation deformation under conditions of a complex stress-strain state]*. XXIX Mezhrespublikanskij seminar «Aktual'nye problemy prochnosti», Funktsional'no-mekhanicheskie svojstva materialov i ikh komp'yuternoe konstruirovaniye, Materialy seminar, Pskov, 1993, Pp.235-238.
24. Belyaev S.P., Ermolaev V.P., Kuz'min S.L., Leskina M.L., Likhachev V.A., Pul'nev S.A. *Deformatsionnye svojstva metallov s razlichnoj kinetikoju martensitnykh prevrashhenij [Deformation properties of metals with different kinetics of martensitic transformations]*. XXV Vsesoyuznyj seminar "Aktual'nye problemy prochnosti", Prognozirovaniye mekhanicheskogo povedeniya materialov, Sbornik trudov, 1991, Vol.1, Pp.51-56.
25. Belyaev S.P., Ermolaev V.P., Kuz'min S.L., Leskina M.L., Likhachev V.A., Pul'nev S.A. *Deformatsionnye svojstva metallov s razlichnoj kinetikoju martensitnykh prevrashhenij [Deformation properties of metals with different kinetics of martensitic transformations]*. XXV Vsesoyuznyj seminar "Aktual'nye problemy prochnosti", Prognozirovaniye mekhanicheskogo povedeniya materialov, Sbornik trudov, 1991, Vol.2, Pp.121-126.
26. Mishustin I.V., Movchan A.A. *Modeling of phase and structure transformations occurring in shape memory alloys under nonmonotonically varying stresses*. Mechanics of Solids, 2014, Vol.49, No.1, Pp.27-39.

*Поступила в редакцию 13 июня 2021 года.*

---

Сведения об авторе:

Гаганова Наталья Валерьевна – соискатель, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова», г. Москва, Россия; e-mail: [gaganova-nv@yandex.ru](mailto:gaganova-nv@yandex.ru)