УДК 539.32: 517.9
DOI 10.33113/mkmk.ras.2021.27.03.309_323.02

СВЕДЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ НА ОБЛАСТИ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ К УСРЕДНЕННОМУ УРАВНЕНИЮ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ. ЭФФЕКТИВНЫЙ ТЕНЗОР ЖЕСТКОСТИ

Власов А.Н.

ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

В работе излагается метод усреднения уравнений теории упругости со случайными коэффициентами на периодической структуре к усредненному уравнению теории упругости с постоянными коэффициентами. Процедура усреднения сводится к усреднению уравнения по функциям распределения независимых случайных величин коэффициентов уравнения, определяющих тензор жесткости, с последующим построением асимптотического решения задачи теории упругости в виде ряда по малому структурному параметру, представляющему собой отношение размера ячейки периодичности к размеру расчетной области. Такой подход позволяет свести исходное уравнение к уравнению теории упругости с постоянными коэффициентами, которые определяют эффективный тензор жесткости, и находятся из решения задачи на ячейке, как и в методе асимптотического усреднения Бахвалова. Отличие заключается лишь в том, что в задаче на ячейке используются соответствующим образом усредненные функции случайных величин, компонентов тензора жесткости, зависящих от быстрой переменной. Показано, что для слоистых сред получается аналитическая зависимость по определению эффективного тензора жесткости, аналогичная зависимости, получаемой методом асимптотического усреднения Бахвалова.

Ключевые слова: уравнения теории упругости со случайными коэффициентами; область с периодической структурой; усредненное уравнение теории упругости с постоянными коэффициентами; задача на ячейке; эффективный тензор жесткости; эффективные упругие характеристики композитных материалов

REDUCTION OF THE EQUATION OF ELASTICITY THEORY WITH RANDOM COEFFICIENTS IN A DOMAIN WITH A PERIODIC STRUCTURE TO THE AVERAGE EQUATION OF ELASTICITY THEORY WITH CONSTANT COEFFICIENTS. EFFECTIVE STIFFNESS TENSOR

Vlasov A.N.

Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

ABSTRACT

The paper presents a method of averaging the equations of the elasticity theory of with random coefficients on a periodic structure to the averaged equations of the elasticity theory with constant coefficients. The averaging procedure is reduced to averaging the equation over the distribution functions of independent random variables of the coefficients of the equations that determine the stiffness tensor, with the subsequent construction of an asymptotic solution to the problem of elasticity theory in the form of a series in a small structural parameter. This parameter is the ratio of the periodicity cell size to the size of the computational domain. This approach makes it possible to reduce the original equation to the equation of the theory of elasticity with constant coefficients that determine the effective stiffness tensor, which is found from the solution of the cell problem, as in the Bakhvalov asymptotic averaging method. The only difference is that in the problem on a cell, the corresponding averaged functions of random variables, components of the stiffness tensor, depending on the fast variable, are used. It is shown that for layered media an analytical dependence is obtained that determines the effective stiffness tensor, which is similar to the dependence obtained by Bakhvalov's asymptotic averaging method.

Keywords: equations of the elasticity theory with random coefficients; a domain with a periodic structure; averaged equation of the elasticity theory with constant coefficients; a problem on a cell; effective stiffness tensor; effective elastic characteristics of composite materials

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе представлен метод приведения уравнения теории упругости со случайными коэффициентами на периодической структуре к усредненному уравнению теории упругости с постоянными коэффициентами. Процедура усреднения состоит в первоначальном усреднении уравнения по функциям распределения независимых случайных величин коэффициентов уравнения, определяющих тензор жесткости, с последующим построением асимптотического решения задачи теории упругости в виде ряда по малому структурному параметру, представляющему собой отношение размера ячейки периодичности к размеру расчетной области и характеризующему неоднородность среды. Процедура усреднения сводится к усреднению уравнения по функциям распределения независимых случайных величин коэффициентов уравнения, определяющих тензор жесткости, с последующим построением асимптотического решения задачи теории упругости в виде ряда по малому структурному параметру. Такой подход позволяет свести исходное уравнение к уравнению теории упругости с постоянными коэффициентами, которые определяют эффективный тензор жесткости, и находятся из решения задачи на ячейке, как и в методе асимптотического усреднения Бахвалова [1,2]. Отличие заключается лишь в том, что в задаче на ячейке используются соответствующим образом усредненные функции случайных величин, компонентов тензора жесткости, зависящих от быстрой переменной. Для областей, моделирующих слоистую структуру, была получена аналитическая зависимость по оценке эффективного тензора жесткости, аналогичная зависимости, получаемой методом асимптотического усреднения Бахвалова.

Основные работы по усреднению дифференциальных уравнений (опрераторов) со случайными быстро осциллирующими коэффициентами изложены в статьях Козлова С.М., Клепицыной М.Л. и Пятницкого А.Л., Ванг Вея, Мухаммеда М.

В статьях [3-6] предполагалась случайная структура неоднородной области, а не свойства ее компонентов. В работах [7-9] рассматривалась задача усреднения для нестационарного уравнения типа конвекции-диффузии, а в статье [10] линейные гиперболические уравнения с быстро осциллирующими коэффициентами, периодическими по пространственным переменным и случайными стационарными по времени.

В отличие от вышеуказанных работ в данной статье рассматривается задача усреднения уравнений теории упругости (эллиптическая система уравнений) со случайными быстро осциллирующими коэффициентами на периодической структуре.

Имеются также множество и других подходов, используемых физиками и механиками, в которых исследования ведутся на физическом уровне строгости. Примерами этого могут служить работы Эшелби [11], Кристенсена [12], Панькова [13,14] и многих других, в которых определяются эффективные свойства материалов, по существу коэффициенты дифференциальных уравнений, описывающих протекающие в них физические процессы.

Разработанный в статье подход к усреднению уравнений теории упругости со случайными коэффициентами на периодической структуре может быть распространен и на другие уравнения математической физики.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим композитные материалы периодической структуры со случайными значениями упругих характеристик включающих фаз, в том числе, если необходимо, с учетом контактных слоев. Геометрия таких материалов определяется ячейкой периодичности (рис.1).

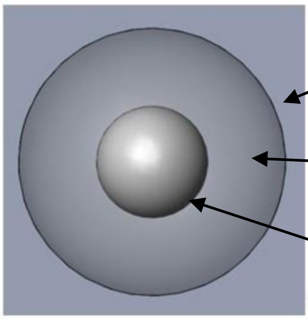

Рис.1. Ячейка композитного материала с включением.

Будем решать задачу приведения дифференциальных уравнений теории упругости со случайными коэффициентами в перемещениях на периодической области, т.е. сведения исходной задачи к усредненной с постоянными коэффициентами, которые задаются эффективным тензором жесткости. Для этого запишем уравнение равновесия в перемещениях, представляющее собой в данном случае систему дифференциальных уравнений дивергентного вида со случайными быстро осциллирующими коэффициентами, зависящими от быстрых переменных $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{x}/\varepsilon$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\left(\boldsymbol{\xi}\right)\frac{\partial \boldsymbol{u}\left(x,\boldsymbol{\xi}\right)}{\partial x_j}\right) = \boldsymbol{F}, \quad \boldsymbol{\xi} = x/\varepsilon, \tag{1}$$

где $A_{ij} = \left\| a_{ikjl} \right\|$ – случайные матрицы-функции, составленные из компонент тензора жесткости четвертого ранга $c_{ijkl} = a_{ikjl}$, $\left(i, j, k, l = 1,2,3\right)$; $\boldsymbol{u} = \left\{u_i\right\}$ – вектор перемещений; $\boldsymbol{F} = \{F_i\}$ – плотность объемных сил; ε – структурный параметр, определяемый отношением размера ячейки l_{cell} с включением к размеру расчетной области $L\ (L \gg \varepsilon)$.

На межфазных границах задаются условия идеального контакта, которые для рассматриваемой системы уравнений имеют следующий вид

$$\left[\boldsymbol{u}(x,\xi)\right]\Big|_{\xi\in\Sigma} = \left[n_i A_{ij}(\xi)\frac{\partial \boldsymbol{u}(x,\xi)}{\partial x_j}\right]\Bigg|_{\xi\in\Sigma} = 0, \tag{2}$$

где $\vec{n} = \{n_1, n_2, n_3\}$ – вектор внешней нормали к границе раздела фаз, квадратные скобки $[\cdot]$ означают скачок значений на межфазной границе Σ.

Здесь и далее, если не оговорено противное, предполагаем суммирование по повторяющимся индексам.

Будем искать решение уравнения (1) на периодической структуре в виде ряда по малому параметру ε

$$\boldsymbol{u}(x,\xi) = \boldsymbol{u}_0(x,\xi) + \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n \tilde{\boldsymbol{u}}_n(x,\xi), \tag{3}$$

где $\boldsymbol{u}_0(x,\xi)$ – вектор-функция (начальный член ряда) независящая от деформационных характеристик; $\tilde{\boldsymbol{u}}_n(x,\xi)$ – вектор-функции случайных характеристик деформационных свойств композитного материала.

Заметим, что т.к. деформационные характеристики включений в каждой ячейке, как случайные значения, предполагаются попарно независимыми и имеют один и тот же закон распределения, то усредненные по независимым компонентам тензора жесткости матрицы-функции $\left\langle A_{ij}(\xi)\right\rangle_{A_{ij}} = \overline{A}_{ij}(\xi)$ являются периодическими по быстрой переменной $\boldsymbol{\xi}$. Это позволяет рассматривать средние значения вектор-функций $\overline{\boldsymbol{u}}_n(x,\xi) = \left\langle \tilde{\boldsymbol{u}}_n(x,\xi)\right\rangle_{A_{ij}}$ периодическими по быстрой переменной $\boldsymbol{\xi}$.

Тогда усредненное по независимым деформационным характеристикам решение уравнения (1) будет выглядеть следующим образом

$$\overline{\boldsymbol{u}}(x,\xi) = \boldsymbol{u}_0(x,\xi) + \sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^i \overline{\boldsymbol{u}}_i(x,\xi). \tag{4}$$

Подставим, вектор перемещений, представленный в виде (3) в уравнение равновесия в перемещениях (1). В результате получим

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\boldsymbol{u}_0(x,\boldsymbol{\xi}) + \sum_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{\varepsilon}^n\tilde{\boldsymbol{u}}_n(x,\boldsymbol{\xi})\right)\right) = \\ = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\frac{\partial \boldsymbol{u}_0(x,\boldsymbol{\xi})}{\partial x_j}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{\varepsilon}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}_n(x,\boldsymbol{\xi})}{\partial x_j}\right) = \boldsymbol{F}.\end{gathered} \tag{5}$$

При этом контактные условия (2) запишутся в виде

$$\left[n_i\left(A_{ij}\frac{\partial \boldsymbol{u}_0(x,\xi)}{\partial x_j} + \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\left(A_{ij}\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}_n(x,\xi)}{\partial x_j}\right)\right)\right]\Bigg|_{\xi\in\Sigma} = 0. \tag{6}$$

Воспользовавшись правилом дифференцирования сложной функции и принимая во внимание формальное разделение на быстрые ξ и медленные x переменные, оператор дифференцирования запишется следующим образом

$$\frac{\partial}{\partial x_k} = \varepsilon^{-1}\frac{\partial}{\partial \xi_k} + \frac{\partial}{\partial x_k}. \tag{7}$$

В этом случае уравнения равновесия (6) примут следующий вид

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{\varepsilon}^{-2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}_i}\left(A_{ij}\frac{\partial \boldsymbol{u}_0(x,\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}_j}\right) + \boldsymbol{\varepsilon}^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}_i}\left(A_{ij}\frac{\partial \boldsymbol{u}_0(x,\boldsymbol{\xi})}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\frac{\partial \boldsymbol{u}_0(x,\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}_j}\right)\right) + \\
+\boldsymbol{\varepsilon}^{0}A_{ij}\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_0(x,\boldsymbol{\xi})}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{\varepsilon}^{n-2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}_i}\left(A_{ij}\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}_n(x,\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}_j}\right) + \\
+\sum_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{\varepsilon}^{n-1}\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}_i}\left(A_{ij}\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}_n(x,\boldsymbol{\xi})}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}_n(x,\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}_j}\right)\right) + \\
+\sum_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{\varepsilon}^{n}A_{ij}\frac{\partial^2 \tilde{\boldsymbol{u}}_n(x,\boldsymbol{\xi})}{\partial x_i \partial x_j} = \boldsymbol{F},
\end{gathered} \tag{8}$$

а контактные условия (6) соответственно вид

$$\begin{gathered}
\left[n_i\left(\varepsilon^{-1}A_{ij}\frac{\partial \boldsymbol{u}_0(x,\xi)}{\partial \xi_j} + A_{ij}\frac{\partial \boldsymbol{u}_0(x,\xi)}{\partial x_j} + \right.\right. \\
\left.\left. + \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^{n-1}A_{ij}\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}_n(x,\xi)}{\partial \xi_j} + \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^{n}A_{ij}\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}_n(x,\xi)}{\partial x_j}\right)\right]\Bigg|_{\xi\in\Sigma} = 0.
\end{gathered} \tag{9}$$

Для нахождения решения уравнения равновесия (1) в виде ряда (3) в виде (6) приравняем в (8) и (9) слагаемые при одинаковых степенях малого параметра ε нулю. В результате получим рекуррентную цепочку уравнений

$\boldsymbol{\varepsilon}^{-2}$:

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}_i}\left(A_{ij}\frac{\partial \boldsymbol{u}_0(x,\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}_j}\right) = 0; \tag{10}$$

$\boldsymbol{\varepsilon}^{-1}$:

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}_i}\left(A_{ij}\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}_1(x,\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}_j}\right) + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}_i}\left(A_{ij}\frac{\partial \boldsymbol{u}_0(x,\boldsymbol{\xi})}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\frac{\partial \boldsymbol{u}_0(x,\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}_j}\right) = 0; \tag{11}$$

$\boldsymbol{\varepsilon}^{0}$:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}_i}\left(A_{ij}\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}_2(x,\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}_j}\right) + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}_i}\left(A_{ij}\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}_1(x,\boldsymbol{\xi})}{\partial x_j}\right) + \\
+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}_1(x,\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}_j}\right) + A_{ij}\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_0(x,\boldsymbol{\xi})}{\partial x_i \partial x_j} = \boldsymbol{F};
\end{gathered} \tag{12}$$

$\boldsymbol{\varepsilon}^1$:

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}_i}\left(A_{ij}\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}_3(x,\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}_j}\right)+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}_2(x,\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}_j}\right)+ \\ +\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}_i}\left(A_{ij}\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}_2(x,\boldsymbol{\xi})}{\partial x_j}\right)+A_{ij}\frac{\partial^2 \tilde{\boldsymbol{u}}_1(x,\boldsymbol{\xi})}{\partial x_i \partial x_j}=0; \tag{13}$$

$\boldsymbol{\varepsilon}^n$:

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}_i}\left(A_{ij}\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}_{n+2}(x,\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}_j}\right)+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}_{n+1}(x,\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}_j}\right)+ \\ +\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}_i}\left(A_{ij}\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}_{n+1}(x,\boldsymbol{\xi})}{\partial x_j}\right)+A_{ij}\frac{\partial^2 \tilde{\boldsymbol{u}}_n(x,\boldsymbol{\xi})}{\partial x_i \partial x_j}=0 \tag{14}$$

и соответствующих им контактных условий

$\boldsymbol{\varepsilon}^{-2}$:

$$\left[n_i\left(A_{ij}\frac{\partial \boldsymbol{u}_0(x,\xi)}{\partial \xi_j}\right)\right]\Bigg|_{\xi\in\Sigma}=0\ ; \tag{15}$$

$\boldsymbol{\varepsilon}^{-1}$:

$$\left[n_i\left(A_{ij}\frac{\partial \boldsymbol{u}_0(x,\xi)}{\partial x_j}+A_{ij}\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}_1(x,\xi)}{\partial \xi_j}\right)\right]\Bigg|_{\xi\in\Sigma}=0\ ; \tag{16}$$

$\boldsymbol{\varepsilon}^0$:

$$\left[n_i\left(A_{ij}\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}_2(x,\xi)}{\partial \xi_j}+A_{ij}\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}_1(x,\xi)}{\partial x_j}\right)\right]\Bigg|_{\xi\in\Sigma}=0\ ; \tag{17}$$

$\boldsymbol{\varepsilon}^1$:

$$\left[n_i\left(A_{ij}\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}_3(x,\xi)}{\partial \xi_j}+A_{ij}\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}_n(x,\xi)}{\partial x_j}\right)\right]_{\xi\in\Sigma}=0; \tag{18}$$

$\boldsymbol{\varepsilon}^n$:

$$\left[n_i\left(A_{ij}\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}_{n+2}(x,\xi)}{\partial \xi_j}+A_{ij}\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}_{n+1}(x,\xi)}{\partial x_j}\right)\right]\Bigg|_{\xi\in\Sigma}=0. \tag{19}$$

Из уравнения (10) следует, что вектор-функция перемещений $\boldsymbol{u}_0(x,\boldsymbol{\xi})$ не зависит от быстрой переменной, т.е.

$$\boldsymbol{u}_0(x,\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{v}(x). \tag{20}$$

Тогда уравнение (11) упрощается и принимает следующий вид

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}_i}\left(A_{ij}\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}_1(x,\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}_j}\right)+\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}_i}A_{ij}\frac{\partial \boldsymbol{v}(x)}{\partial x_j}=0. \tag{21}$$

Из (20) следует, что решение этой задачи представимо виде

$$\tilde{\boldsymbol{u}}_1(x,\boldsymbol{\xi})=\tilde{N}_{i_1}(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial \boldsymbol{v}(x)}{\partial x_{i_1}}, \tag{22}$$

где $\tilde{N}_{i_1}(\boldsymbol{\xi})$ − случайные функции независимых деформационных характеристик композитного материала, зависящие от быстрых переменных со средним значением $\left\langle \tilde{N}_{i_1}(\xi)\right\rangle_{A_{ij}}=N_{i_1}(\xi)$, где $N_{i_1}(\boldsymbol{\xi})$ периодические по быстрой переменной $\boldsymbol{\xi}$ матрицы-функции, а $i_1=1,2,3$.

Таким образом, подставляя (22) в (21) получим

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}_i}\left(A_{ij}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}_j}\left(\tilde{N}_{i_1}(\boldsymbol{\xi})+\boldsymbol{\xi}_{i_1}E\right)\right)\frac{\partial \boldsymbol{v}(x)}{\partial x_{i_1}}=0, \tag{23}$$

где E − единичная матрица.

Учитывая соотношения (20) и (22), уравнение (12) преобразуется к виду

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}_i}\left(A_{ij}\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}_2(x,\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}_j}\right)+\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}_i}\left(A_{ij}\tilde{N}_{i_1}(\boldsymbol{\xi})\right)\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}(x)}{\partial x_j \partial x_{i_1}}+\\+\left(A_{ij}\frac{\partial \tilde{N}_{i_1}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}_j}+A_{ij}\right)\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}(x)}{\partial x_j \partial x_{i_1}}=\boldsymbol{F}.\end{gathered} \tag{24}$$

Предполагая, что правая часть уравнения зависит только от медленной переменной, получим, что вектор-функция $\tilde{\boldsymbol{u}}_2(x,\boldsymbol{\xi})$ принимает вид следующий вид

$$\tilde{\boldsymbol{u}}_2(x,\boldsymbol{\xi})=\tilde{N}_{i_1 i_2}(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}(x)}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}}. \tag{25}$$

Подставляя (25) в (24), приходим к уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}_i}\left(A_{ij}\frac{\partial \tilde{N}_{i_1 i_2}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}_j}\right)+\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}_i}\left(A_{ii_2}\tilde{N}_{i_1}(\boldsymbol{\xi})\right)+A_{ii_2}\frac{\partial \tilde{N}_{i_1}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}_{i_2}}+A_{ii_2}\right)\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}(x)}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}}=\boldsymbol{F}. \tag{26}$$

Действуя далее аналогичным образом, получим, что члены ряда (3) представимы в виде

$$\tilde{\boldsymbol{u}}_n(x,\boldsymbol{\xi})=\tilde{N}_{i_1\ldots i_n}(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial^n \boldsymbol{v}(x)}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_n}}, \tag{27}$$

где $i_1,\ldots,i_n=1,\ 2,\ 3$.

Откуда следует, что уравнение (14), представляющее собой общий вид в рекуррентной цепочке уравнений, записывается следующим образом

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}_i}\left(A_{ij}\frac{\partial \tilde{N}_{i_1\ldots i_{n+2}}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}_j}\right)+\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}_i}\left(A_{ii_{n+2}}\tilde{N}_{i_1\ldots i_{n+1}}(\boldsymbol{\xi})\right)+\right.\\\left.+A_{ii_{n+2}}\frac{\partial \tilde{N}_{i_1\ldots i_{n+1}}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}_{i_{n+2}}}+A_{ii_{n+2}}\tilde{N}_{i_1\ldots i_n}(\boldsymbol{\xi})\right)\frac{\partial^n \boldsymbol{v}(x)}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_{n+2}}}=0,\end{gathered} \tag{28}$$

а соответствующие контактные условия, как это следует из (19)

$$\left[n_i \left(A_{ij} \frac{\partial \tilde{N}_{i_1 \dots i_{n+2}}(\xi)}{\partial \xi_j} + A_{ii_{n+2}} \tilde{N}_{i_1 \dots i_{n+1}}(\xi) \right) \frac{\partial^n \boldsymbol{v}(x)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{n+2}}} \right] \Bigg|_{\xi \in \Sigma} = 0. \qquad (29)$$

Учитывая (27), асимптотику решения уравнении (1) в виде ряда (3) запишем следующим образом

$$\boldsymbol{u}(x,\xi) = \boldsymbol{v}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \tilde{N}_{i_1 \dots i_n}(\xi) \frac{\partial^n \boldsymbol{v}(x)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}}. \qquad (30)$$

Тогда усредненное решение (4) запишется в виде

$$\overline{\boldsymbol{u}}(x,\xi) = \boldsymbol{v}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \left\langle \tilde{N}_{i_1 \dots i_n}(\xi) \right\rangle \Big|_{A_{ij}} \frac{\partial^n \boldsymbol{v}(x)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}}. \qquad (31)$$

Далее, для нахождения усредненного решения задачи (1) и определения эффективных свойств композитного материала периодической структуры со случайными упругими характеристиками включений ограничимся асимптотикой решения $\boldsymbol{\varepsilon}^2$ в представлении в виде ряда (31).

Усредним уравнение (23) и контактные условия по тензору жесткости. Тогда это уравнение и соответственно и контактные условия примут вид

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}_i} \left\langle A_{ij} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}_j} \left(\tilde{N}_{i_1}(\boldsymbol{\xi}) + \boldsymbol{\xi}_{i_1} E \right) \right\rangle_{A_{ij}} \frac{\partial \boldsymbol{v}(x)}{\partial x_{i_1}} = 0, \qquad (32)$$

$$\left[n_i \left\langle A_{ij} \frac{\partial \tilde{N}_{i_1}(\xi)}{\partial \xi_j} + A_{ii_1} \right\rangle_{A_{ij}} \frac{\partial \boldsymbol{v}(x)}{\partial x_{i_1}} \right] \Bigg|_{\xi \in \Sigma} = 0 \ . \qquad (33)$$

Чтобы найти решение усредненного уравнения (32) с контактными условиями (33), разложим матрицу-функцию $\tilde{N}_{i_1}(\xi)$ в ряд Тейлора по независимым компонентам тензора жесткости.

Для простоты изложения, но, не ограничивая общности, в дальнейшем будем считать, что все фазы композитного материала (матрица и включения) изотропные по своим деформационным характеристикам. В этом случае только 2-е компоненты тензора жесткости четвертого ранга c_{ijkl} будут независимыми. Выберем за независимые компоненты c_{1111} и c_{1212}.

Средние значения компонентов тензоров жесткости c_{1111} и c_{1212} композитного материала определяются по формулам

$$\overline{c}_{1111} = \left\langle c_{1111} \right\rangle_{A_{ij}} = \int_{c_{1111}^{min}}^{c_{1111}^{max}} c_{1111} f_{c_1}(c_{1111}) dc_{1111}, \qquad (34)$$

$$\overline{c}_{1212} = \left\langle c_{1212} \right\rangle_{A_{ij}} = \int_{c_{1212}^{min}}^{c_{1212}^{max}} c_{1212} f_{c_2}(c_{1212}) dc_{1212}, \qquad (35)$$

соответственно, а средние значения функций $(\bullet)$, зависящих от деформационных свойств композитного материала, определяются по формуле [18]

$$\left\langle \bullet \right\rangle_{A_{ij}} = \int_{c_{1212}^{min}}^{c_{1212}^{max}} \left(\int_{c_{1111}^{min}}^{c_{1111}^{max}} (\bullet) f_{c_1}(c_{1111}) dc_{1111} \right) f_{c_2}(c_{1212}) dc_{1212}, \qquad (36)$$

где $f_{c_1}(c_{1111})$, $f_{c_2}(c_{1212})$ − функции распределения модуля деформации и коэффициента Пуассона, соответственно; $\left[c_{1111}^{min}, c_{1111}^{max} \right]$ и $\left[c_{1111}^{min}, c_{1111}^{max} \right]$ − области возможных значений модуля деформации и коэффициента Пуассона, соответственно.

Представим случайные матрицы-функции, составленные из компонент тензора жесткости композитного материала, в виде

$$A_{ij}\left(\xi\right)=\overline{A}_{ij}\left(\xi\right)+\tilde{A}_{ij}\left(\xi\right), \tag{37}$$

где $\overline{A}_{ij}\left(\xi\right)=\left\langle A_{ij}\left(\xi\right)\right\rangle_{A_{ij}}$ – усредненные по независимым компонентам тензора жесткости (деформационным характеристикам) матрицы-функции; $\tilde{A}_{ij}\left(\xi\right)$ – случайные вариации жесткостных свойств, представленных в виде матриц-функций со средним значением $\left\langle \tilde{A}_{ij}\left(\xi\right)\right\rangle_{A_{ij}}=0$.

Заметим, что усредненные матрицы-функции $\overline{A}_{ij}\left(\xi\right)$ являются периодическими по быстрой переменной $\boldsymbol{\xi}$. Это следует из того, что деформационные характеристики включений в каждой ячейке, как случайные значения, попарно независимы и имеют один и тот же закон распределения.

Далее, также представим матрицы-функции $\tilde{N}_{i_1}\left(\xi\right)$ случайных характеристик деформационных свойств композитного материала в виде

$$\tilde{N}_{i_1}\left(\xi\right)=\overline{N}_{i_1}\left(\xi\right)+\widehat{N}_{i_1}\left(\xi\right), \tag{38}$$

где $\overline{N}_{i_1}\left(\xi\right)=\left\langle \tilde{N}_{i_1}\left(\xi\right)\right\rangle_{A_{ij}}$ – усредненные по независимым компонентам тензора жесткости матрицы-функции; $\widehat{N}_{i_1}\left(\xi\right)$ – случайные вариации матриц-функций со средним значением $\left\langle \widehat{N}_{i_1}\left(\xi\right)\right\rangle_{A_{ij}}=0$.

Подставляя (37) и (38) в уравнение (32) и контактные условия (33) и учитывая условия $\left\langle \tilde{A}_{ij}\left(\xi\right)\right\rangle_{A_{ij}}=0$ и $\left\langle \widehat{N}_{i_1}\left(\xi\right)\right\rangle_{A_{ij}}=0$, получим, что уравнение (32) и контактные условия (33) запишутся следующим образом

$$\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\xi}_i}\left(\overline{A}_{ij}\left(\boldsymbol{\xi}\right)\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\xi}_j}\left(\overline{N}_{i_1}\left(\boldsymbol{\xi}\right)+\boldsymbol{\xi}_{i_1}E\right)+\left\langle \tilde{A}_{ij}\left(\boldsymbol{\xi}\right)\frac{\partial\widehat{N}_{i_1}\left(\boldsymbol{\xi}\right)}{\partial\boldsymbol{\xi}_j}\right\rangle_{A_{ij}}\right)=0, \tag{39}$$

$$\left[n_i\left(\overline{A}_{ij}\left(\xi\right)\frac{\partial}{\partial\xi_j}\left(\overline{N}_{i_1}\left(\xi\right)+\xi_{i_1}E\right)+\left\langle \tilde{A}_{ij}\left(\xi\right)\frac{\partial\widehat{N}_{i_1}\left(\xi\right)}{\partial\xi_j}\right\rangle_{A_{ij}}\right)\right]\Bigg|_{\xi\in\Sigma}=0. \tag{40}$$

Нетрудно доказать, что $\overline{N}_{i_1}\left(\xi\right)=\tilde{N}_{i_1}\left(\xi,E,\nu\right)\Big|_{\substack{c_{1111}=\overline{c}_{1111}\\ c_{1212}=\overline{c}_{1212}}}$.

Для удобства дальнейшего изложения переобозначим $\overline{N}_{i_1}\left(\xi\right)$ в $N_{i_1}\left(\xi\right)$, т.е. $N_{i_1}\left(\xi\right)=\overline{N}_{i_1}\left(\xi\right)$.

Разложим матрицу-функцию $\widehat{N}_{i_1}\left(\xi\right)$ в ряд Тейлора по независимым компонентам тензора жесткости c_{1111} и c_{1212}

$$\widehat{N}_{i_1}\left(\xi,E,\nu\right)=\sum_{\substack{l=1,\\ l=k+n}}^{\infty}\frac{1}{l!}\frac{\partial^l\widehat{N}_{i_1}\left(\xi,E,\nu\right)}{\partial E^k\partial\nu^n}\Bigg|_{\substack{c_{1111}=\overline{c}_{1111}\\ c_{1212}=\overline{c}_{1212}}}\left(c_{1111}-\overline{c}_{1111}\right)^k\left(c_{1212}-\overline{c}_{1212}\right)^n E, \tag{41}$$

где $k,\, n=0,\ 1,\ 2,\ldots$

Обозначив $N_{i_1}^{k,n}(\xi)=\left.\dfrac{\partial^l \widehat{N}_{i_1}(\xi,E,\nu)}{\partial E^k \partial \nu^n}\right|_{\substack{c_{1111}=\overline{c}_{1111}\\ c_{1212}=\overline{c}_{1212}}}$, (41) примет вид

$$\widehat{N}_{i_1}(\xi,E,\nu)=\sum_{\substack{l=1,\\ l=k+n}}^{\infty}\frac{1}{l!}N_{i_1}^{k,n}(\xi)\left(c_{1111}-\overline{c}_{1111}\right)^k\left(c_{1212}-\overline{c}_{1212}\right)^n E. \tag{42}$$

Подставим (42) в уравнение (39) и контактное условие (40). В результате получим

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}_i}\left(\overline{A}_{ij}(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}_j}\left(N_{i_1}(\boldsymbol{\xi})+\boldsymbol{\xi}_{i_1}E\right)\right)+\\ +\sum_{\substack{l=1,\\ l=k+n}}^{\infty}\frac{1}{l!}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}_i}\left(\left\langle\left(c_{1111}-\overline{c}_{1111}\right)^k\left(c_{1212}-\overline{c}_{1212}\right)^n\tilde{A}_{ij}(\boldsymbol{\xi})\right\rangle_{A_{ij}}\frac{\partial N_{i_1}^{k,n}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}_j}\right)=0,\end{gathered} \tag{43}$$

$$\begin{gathered}\left[n_i\left(\overline{A}_{ij}(\xi)\frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(N_{i_1}(\xi)+\xi_{i_1}E\right)\right)+\right.\\ \left.\left.+\sum_{\substack{l=1,\\ l=k+n}}^{\infty}\frac{1}{l!}n_i\left(\left\langle\left(c_{1111}-\overline{c}_{1111}\right)^k\left(c_{1212}-\overline{c}_{1212}\right)^n\tilde{A}_{ij}(\xi)\right\rangle_{A_{ij}}\frac{\partial N_{i_1}^{k,n}(\xi)}{\partial \xi_j}\right)\right]\right|_{\xi\in\Sigma}=0.\end{gathered} \tag{44}$$

Решение уравнения (43) с контактными условиями (44) в классе периодических функций по быстрой переменной $\boldsymbol{\xi}$ сводится к решению набора следующих уравнений с соответствующими контактными условиями

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}_i}\left(\overline{A}_{ij}(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}_j}\left(N_{i_1}(\boldsymbol{\xi})+\boldsymbol{\xi}_{i_1}E\right)\right)=0\\ \left.\left[n_i\left(\overline{A}_{ij}(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}_j}\left(N_{i_1}(\boldsymbol{\xi})+\boldsymbol{\xi}_{i_1}E\right)\right)\right]\right|_{\boldsymbol{\xi}\in\Sigma}=0\end{gathered} \tag{45}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}_i}\left(\left.\left\langle\left(c_{1111}-\overline{c}_{1111}\right)\tilde{A}_{ij}(\boldsymbol{\xi})\right\rangle\right|_{A_{ij}}\frac{\partial N_{i_1}^{1,0}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}_j}\right)=0\\ \left.\left[n_i\left(\left.\left\langle\left(c_{1111}-\overline{c}_{1111}\right)\tilde{A}_{ij}(\boldsymbol{\xi})\right\rangle\right|_{A_{ij}}\frac{\partial N_{i_1}^{1,0}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}_j}\right)\right]\right|_{\boldsymbol{\xi}\in\Sigma}=0\end{gathered} \tag{46}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}_i}\left(\left.\left\langle\left(c_{1212}-\overline{c}_{1212}\right)\tilde{A}_{ij}(\boldsymbol{\xi})\right\rangle\right|_{A_{ij}}\frac{\partial N_{i_1}^{0,1}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}_j}\right)=0\\ \left[n_i\left(\left.\left\langle\left(c_{1212}-\overline{c}_{1212}\right)\tilde{A}_{ij}(\boldsymbol{\xi})\right\rangle\right|_{A_{ij}}\frac{\partial N_{i_1}^{0,1}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}_j}\right)\right]_{\boldsymbol{\xi}\in\Sigma}=0\end{gathered} \tag{47}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\left.\left\langle\left(c_{1111}-\overline{c}_{1111}\right)\left(c_{1212}-\overline{c}_{1212}\right)\tilde{A}_{ij}(\xi)\right\rangle\right|_{A_{ij}}\frac{\partial N_{i_1}^{1,1}(\xi)}{\partial \xi_j}\right)=0 \tag{48}$$

$$\left[n_i\left(\left\langle\left(c_{1111}-\overline{c}_{1111}\right)\left(c_{1212}-\overline{c}_{1212}\right)\tilde{A}_{ij}\left(\xi\right)\right\rangle\Big|_{A_{ij}}\frac{\partial N_{i_1}^{1,1}\left(\xi\right)}{\partial\xi_j}\right)\right]_{\xi\in\Sigma}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi_i}\left(\left\langle\left(c_{1111}-\overline{c}_{1111}\right)^k\left(c_{1212}-\overline{c}_{1212}\right)^n\tilde{A}_{ij}\left(\xi\right)\right\rangle\Big|_{A_{ij}}\frac{\partial N_{i_1}^{k,n}\left(\xi\right)}{\partial\xi_j}\right)=0$$

$$\left[n_i\left(\left\langle\left(c_{1111}-\overline{c}_{1111}\right)^k\left(c_{1212}-\overline{c}_{1212}\right)^n\tilde{A}_{ij}\left(\xi\right)\right\rangle\Big|_{A_{ij}}\frac{\partial N_{i_1}^{k,n}\left(\xi\right)}{\partial\xi_j}\right)\right]_{\xi\in\Sigma}=0 \qquad (49)$$

Решения уравнений в классе периодических функций существуют и единственны с точностью до констант, которые мы будем фиксировать равенствами нулю средних значений по ячейке периодичности: $\left\langle N_{i_1}\left(\boldsymbol{\xi}\right)\right\rangle=0$, $\left\langle N_{i_1}^{k,n}\left(\xi\right)\right\rangle$, где k, n = 0, 1, 2, … Следовательно, решение задачи (43) с контактными условиями (44) в классе периодических функций существует и единственно с точностью до константы, которую мы фиксируем равной нулю.

Отметим, что задача (45) является задачей на ячейке, как и в методе асимптотического усреднения Бахвалова [2]. Также нетрудно видеть, что решения $N_{i_1}^{k,n}\left(\xi\right)$ уравнений (46)-(49) в классе периодических матриц-функций со средним значением равным нулю будут нулевые матрицы $N_{i_1}^{k,n}\left(\xi\right)=0$.

Таким образом, уравнение (26) и соответствующие контактные условия (29) принимают вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\xi}_i}\left(A_{ij}\frac{\partial\tilde{N}_{i_1i_2}\left(\boldsymbol{\xi}\right)}{\partial\boldsymbol{\xi}_j}\right)+\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\xi}_i}\left(\overline{A}_{ii_2}N_{i_1}\left(\boldsymbol{\xi}\right)\right)+\overline{A}_{ii_2}\frac{\partial N_{i_1}\left(\boldsymbol{\xi}\right)}{\partial\boldsymbol{\xi}_{i_2}}+\overline{A}_{ii_2}\right)\frac{\partial^2\boldsymbol{v}\left(x\right)}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}}=\boldsymbol{F}, \qquad (50)$$

а соответствующие контактные условия, как это следует из (19)

$$\left[n_i\left(A_{ij}\frac{\partial\tilde{N}_{i_1i_2}\left(\xi\right)}{\partial\xi_j}+A_{ii_2}\tilde{N}_{i_1i_1}\left(\xi\right)\right)\frac{\partial^2\boldsymbol{v}\left(x\right)}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}}\right]\Bigg|_{\xi\in\Sigma}=0. \qquad (51)$$

Далее, представим матрицу-функцию $\tilde{N}_{i_1i_2}\left(\boldsymbol{\xi}\right)$, как и в случае с $\tilde{N}_{i_1}\left(\xi\right)$, в виде суммы $\tilde{N}_{i_1i_2}\left(\boldsymbol{\xi}\right)=\overline{N}_{i_1i_2}\left(\boldsymbol{\xi}\right)+\widehat{N}_{i_1i_2}\left(\boldsymbol{\xi}\right)$, где матрицы-функции $\overline{N}_{i_1i_2}\left(\xi\right)=\left\langle\tilde{N}_{i_1i_2}\right\rangle_{A_{ij}}$, усредненные по независимым компонентам тензора жесткости; $\widehat{N}_{i_1i_2}\left(\xi\right)$ – случайные вариации матриц-функций со средним значением $\left\langle\widehat{N}_{i_1i_2}\left(\xi\right)\right\rangle_{A_{ij}}=0$. Затем разлагая матрицу-функцию $\widehat{N}_{i_1i_2}\left(\xi\right)$ в ряд Тейлора по независимым компонентам тензора жесткости c_{1111} и c_{1212}, получим, что необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения в классе периодических функций будет задавать условие

$$\left\langle\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\xi}_i}\left(\overline{A}_{ii_2}N_{i_1}\left(\boldsymbol{\xi}\right)\right)+\overline{A}_{ii_2}\frac{\partial N_{i_1}\left(\boldsymbol{\xi}\right)}{\partial\boldsymbol{\xi}_{i_2}}+\overline{A}_{ii_2}\right\rangle\frac{\partial^2\boldsymbol{v}\left(x\right)}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}}=\boldsymbol{F}. \qquad (52)$$

В силу периодичности $\overline{A}_{ii_2}N_{i_1}\left(\boldsymbol{\xi}\right)$, уравнение (52) упростится и примет следующий вид

$$\left\langle \bar{A}_{ii_2}\frac{\partial N_{i_1}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}_{i_2}}+\bar{A}_{ii_2}\right\rangle \frac{\partial^2 \boldsymbol{v}(x)}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}}=\hat{A}_{ii_2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}(x)}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}}=\boldsymbol{F}\,, \tag{53}$$

где $\hat{A}_{ii_2}=\left\langle \bar{A}_{ii_2}\frac{\partial N_{i_1}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}_{i_2}}+\bar{A}_{ii_2}\right\rangle$ матрицы-константы, определяют эффективный тензор жесткости, а $\bar{A}_{ij}(\xi)=\langle A_{ij}(\xi)\rangle_{A_{ij}}$ матрицы, усредненные по независимым компонентам тензора жесткости.

Как правило, в экспериментальных исследованиях деформационных свойств материалов определяют модуль Юнга E и коэффициент Пуассона. В этом случае компоненты тензора жесткости четвертого ранга c_{ijkl} выражаются через независимые деформационные характеристики E и ν следующим образом [15]

$$c_{ijkl}=\frac{E}{2(1-\nu)}\left(\frac{2\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\delta_{kl}+\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}\right). \tag{54}$$

При этом средние значения компонентов тензора жесткости как функций $c_{ijkl}(\xi,E,\nu)$, зависящих как от быстрых переменных, так и от модуля деформации и коэффициента Пуассона, будут определяться по формуле

$$\bar{c}_{ijkl}(\xi)=\langle c_{ijkl}(\xi)\rangle_{A_{ij}}=\int_{E_{min}}^{E_{max}}\left(\int_{\nu_{min}}^{\nu_{max}}c_{ijkl}(\xi,E,\nu)f_\nu(\nu)d\nu\right)f_E(E)dE, \tag{55}$$

где $f_E(E)$, $f_\nu(\nu)$ − функции распределения модуля деформации и коэффициента Пуассона, соответственно; $[E_{min},E_{max}]$ и $[\nu_{min},\nu_{max}]$ – области возможных значений модуля деформации и коэффициента Пуассона, соответственно.

Отметим, что из решения задачи на ячейке (45) эффективный тензор жёсткости слоистых сред будет определяться зависимостью

$$\hat{A}_{ij}=\langle \bar{A}_{ij}\rangle+\langle \bar{A}_{i1}\bar{A}_{11}^{-1}\rangle\langle \bar{A}_{11}^{-1}\rangle^{-1}\langle \bar{A}_{11}^{-1}\bar{A}_{1j}\rangle-\langle \bar{A}_{i1}\bar{A}_{11}^{-1}\bar{A}_{1j}\rangle \tag{56}$$

или покомпонентно

$$\hat{c}_{kilj}=\langle \bar{c}_{kilj}\rangle+\langle \bar{c}_{kim1}\bar{c}_{m1n1}^{-1}\rangle\langle \bar{c}_{n1p1}^{-1}\rangle^{-1}\langle \bar{c}_{p1q1}^{-1}\bar{c}_{q1lj}\rangle-\langle \bar{c}_{kim1}\bar{c}_{m1n1}^{-1}\bar{c}_{n1lj}\rangle. \tag{57}$$

Эти зависимости аналогичные зависимостям, получаемым по методу асимптотического усреднения Бахвалова [15-17], с той лишь разницей, что в них входят усредненные по упругим деформационным характеристикам компоненты тензора жесткости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе решена задача приведения уравнения теории упругости со случайными коэффициентами на периодической структуре к усредненному уравнению теории упругости с постоянными коэффициентами.

Показано, что коэффициенты усредненного уравнения определяются из решения периодической задачи на ячейке, в которой коэффициенты определяются усредненными по упругим деформационным характеристикам компонентами тензора жесткости включающих фаз.

Получена аналитическая зависимость по определению эффективного тензора жесткости слоистых композитных материалов периодической структуры со случайными деформационными характеристиками слоев.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н.С. *Осреднение дифференциальных уравнений с частными производными с быстро осциллирующими коэффициентами* // Докл. АН СССР. – 1975. – Т.221. – №3. – С.516-519.
2. Бахвалов Н.С., Панасенко. Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах.* – М.: Наука, 1984. – 352 с.
3. Козлов С.М. *Осреднение дифференциальных операторов с почти-периодическими быстроосциллирующими коэффициентами* // Математический сборник. – 1978. – Т.107(149). – №2(10). – С.199-217.
4. Козлов С.М. *Осреднение случайных структур* // Доклады АН СССР. – 1978. – Т.241. – №5. – С.1016-1019.
5. Козлов С.М. *Проводимость двумерных случайных сред* // Успехи математических наук. – 1979. – Т.34. – Вып.4(208). – С.193-194.
6. Козлов С.М. *Осреднение случайных операторов* // Математический сборник. – 1979. – Т.109(151). – №2(6). – С.188-202.
7. Клепцына М.Л., Пятницкий А.Л. *Усреднение случайной нестационарной задачи конвекции-диффузии* // Успехи математических наук. – 2002. – Т.57. – Вып.4(346). – С.95-118.
8. Wei Wang, Daomin Cao, Jinqiao Duan. *Effective Macroscopic Dynamics of Stochastic Partial Differential Equations in Perforated Domains* // SIAM J. on Mathematical Analysis. – 2007. – Vol.38. – No.5. – 1508.
9. Kleptsyna M., Piatnitski A., Popier A. *Homogenization of random parabolic operators. Diffusion approximation* // Stochastic Processes and their Applications. – 2014. – 25 p.
10. Mohammed M., Sango M. *Homogenization of Linear Hyperbolic Stochastic Partial Differential Equation With Rapidly Oscillating Coefficients: the Two Scale Convergence Method* // Asymptotic Analysis. – 2015. – Vol.91. – No.3-4. – Pp.341-371.
11. Eshelby J.D. *The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems* // Proc. R.Soc. Lond. A. – 1957. – Vol.241. – Pp.376-396.
12. Кристенсен Р. *Введение в механику композитов.* – М.: Мир, 1982. – 336 с.
13. Паньков А.А. *Статистическая механика пьезокомпозитов.* – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2009. – 480 с.
14. Паньков А.А. *Механика пьезокомпозитов. Электро- и магнитоупругость неоднородных сред.* – LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011. – 476 с.
15. Победря Б.Е. *Механика композиционных материалов.* – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. – 336 с.
16. Победря Б.Е., Горбачев В.И. *О статических задачах упругих композитов* // Вестник МГУ. – 1977. – №5. – С.101-111.
17. Власов А.Н., Мерзляков В.П. *Усреднение деформационных и прочностных свойств в механике скальных пород.* – М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2009. – 208 с.
18. Вентцель Е.С. *Теория вероятностей.* – М.: Высшая школа, 2006. – 575 с.

REFERENCES

1. Bakhvalov N.S. *Osrednenie differentsial'nykh uravnenij s chastnymi proizvodnymi s bystro ostsilliruyushhimi koehffitsientami [Averaging of partial differential*

equations with rapidly oscillating coefficients]. Doklady AN SSSR, 1975, Vol.221, No.3, Pp.516-519.
2. Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh [Averaging of Processes in Periodic Media].* Moskva, Nauka, 1984, 352 p.
3. Kozlov S.M. *Averaging differential operators with almost periodic, rapidly oscillating coefficients*. Math. USSR-Sb., 1979, Vol.35, No.4, Pp.481-498.
4. Kozlov S.M. *Osrednenie sluchajnykh struktur [Averaging of random structures].* Doklady AN SSSR, 1978, Vol.241, No.5, Pp.1016-1019.
5. Kozlov.M. *Conductivity of two-dimensional random media.* Russian Mathematical Surveys, 1979, Vol.34, Iss.4, Pp.168-169.
6. Kozlov S.M. *Averaging of random operators.* Math. USSR-Sb., 1980, Vol.37, No.2, Pp.167-180.
7. Klepcyna M.L., Pyatniczkij A.L. *Homogenization of a random non-stationary convection-diffusion problem.* Russian Mathematical Surveys, 2002, Vol.57, Iss.4, Pp.729-751.
8. Wei Wang, Daomin Cao, Jinqiao Duan. *Effective Macroscopic Dynamics of Stochastic Partial Differential Equations in Perforated Domains*. SIAM J. on Mathematical Analysis, 2007, Vol.38, No.5, 1508.
9. Kleptsyna M., Piatnitski A., Popier A. *Homogenization of random parabolic operators. Diffusion approximation.* Stochastic Processes and their Applications, 2014, 25 p.
10. Mohammed M., Sango M. *Homogenization of Linear Hyperbolic Stochastic Partial Differential Equation With Rapidly Oscillating Coefficients: the Two Scale Convergence Method.* Asymptotic Analysis, 2015, Vol.91, No.3-4, Pp.341-371.
11. Eshelby J.D. *The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems.* Proc. R.Soc. Lond. A, 1957, Vol.241, Pp.376-396.
12. Christensen R.M. *Mechanics of composite materials.* New York, Wiley, 1979, 348 p.
13. Pan'kov A.A. *Statisticheskaya mekhanika p'ezokompozitov [Statistical mechanics of piezocomposites].* Perm', Izdatel'stvo Permskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta, 2009, 480 p.
14. Pan'kov A.A. *Mekhanika p'ezokompozitov. Ehlektro- i magnitouprugost' neodnorodnykh sred [Mechanics of piezocomposites. Electro-and magnetoelasticity of inhomogeneous media].* LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011, 476 p.
15. Pobedrya B.E. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov [Mechanics of composite materials].* Moskva, Izdatel'stvo Moskovskogo universiteta, 1984, 336 p.
16. Pobedrya B.E., Gorbachev V.I. *O staticheskikh zadachakh uprugikh kompozitov [On static problems of elastic composites].* Vestnik MGU, 1977, No.5, Pp.101-111.
17. Vlasov A.N., Merzliakov V.P. *Usrednenie deformatsionnykh i prochnostnykh svojstv v mekhanike skal'nykh porod [Homogenization of deformation and strength properties in rock mechanics].* Moskva, Izdatel'stvo Assotsiatsii stroitel'nykh vuzov, 2009, 208 p.
18. Ventcel' E.S. *Teoriya veroyatnostej [Probability theory].* Moskva, Vysshaya shkola, 2006, 575 p.

Поступила в редакцию 7 июня 2021 года.

Сведния об авторе:

Власов Александр Николаевич – д.т.н., дир., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: bah1955@yandex.ru