УДК 539.4
DOI 10.33113/mkmk.ras.2021.27.03.343_359.04

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ СПЛАВОВ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ, РАЗРЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРИРАЩЕНИЙ НАПРЯЖЕНИЙ*

Мовчан А.А.

ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Известный вариант определяющих соотношений модели нелинейного деформирования сплавов с памятью формы (СПФ) выражает приращения деформаций через приращения напряжений, параметра фазового состава и температуры, а также через сами величины напряжении, деформаций, параметра фазового состава и температуры. Однако для развития численных алгоритмов анализа термомеханического поведения элементов из СПФ в форме метода конечных элементов (метод смещений) необходимо иметь определяющие соотношения, разрешенные относительно приращений напряжений. Именно такая форма определяющих соотношений позволяет получить выражения для скоростной матрицы жесткости метода конечных элементов для СПФ. В ряде работ такое обращение получалось путем численного решения соответствующей системы определяющих соотношений. Такая численная процедура существенно замедляет процесс решения. В данной работе предлагается аналитический алгоритм обращения, использующий конкретные особенности структуры исходной системы определяющих соотношений, а именно тот факт, что линейный оператор с помощью которого приращения компонент девиатора напряжений входят в правую часть исходной системы определяющих соотношений является вырожденным (случай прямого превращения или обратного, но без структурного перехода), либо приращения компонент девиатора напряжений входят в правую часть исходной систем в виде двух слагаемых, определяемых через два различных вырожденных оператора (случай обратного превращения вместе со структурным переходом). Обращение определяющих соотношений получено для связанной постановки краевых задач, в рамках которой приращения компонент девиатора напряжений входят в правую часть исходной системы определяющих соотношений не только через уравнения для приращений компонент девиатора деформаций за счет упругого деформирования, фазового и структурного переходов, но и за счет используемых дифференциальных соотношений для параметра фазового состава. При рассмотрении учитываются, фазовое формоизменение, объемный эффект реакции фазового перехода, а также влияние переменности упругих модулей (как объемного, так и сдвигового) на приращение параметра фазового состава.

Ключевые слова: сплавы с памятью формы; модель нелинейного деформирования; выражение для приращений напряжений; связанная постановка

* *Работа выполнена в рамках государственного задания ИПРИМ РАН и при частичной финансовой поддержке РФФИ проект №20-01-00240.*

CONSTITUTIVE RELATIONS OF THE MODEL OF NONLINEAR DEFORMATION OF SHAPE MEMORY ALLOYS, RESOLVED WITH RESPECT TO STRESS INCREMENTS

Movchan A.A.

Institute of applied mechanics Russian academy of science, Moscow, Russia

ABSTRACT

A well-known variant of the constitutive relations of the model of nonlinear deformation of shape memory alloys (SMA) expresses the increments of strains through increments of stresses, the parameter of phase composition and temperature, as well as through the values of stress, strains, the parameter of phase composition and temperature themselves. However, for the development of numerical algorithms for analyzing the thermomechanical behavior of elements from the SMA in the form of the finite element method (displacement method), it is necessary to have constitutive relations resolved with respect to stress increments. It is this form of constitutive relations that allows us to obtain expressions for the incremental stiffness matrix of the finite element method for SMA. In a number of works, such an inversion was obtained numerically. Such a numerical procedure significantly slows down the solution process. In this paper, we propose an analytical inversion algorithm that uses specific features of the structure of the original system of constitutive relations, namely, the fact that the linear operator by which the increments of the components of the stress deviator enter the right part of the original system of constitutive relations is degenerate (the case of direct transformation or inverse, but without a structural transition), or the increments of the components of the stress deviator enter the right part of the original systems in the form of two terms, defined in terms of two different degenerate operators (the case of an inverse transformation together with a structural transition). The inversion of the constitutive relations is obtained for a coupled statement of boundary value problems, in which the increments of the components of the stress deviator are included in the right part of the original system of constitutive relations not only through the equations for the increments of the components of the deformation deviator due to elastic deformation, phase and structural transitions, but also due to the differential relations used for the phase composition parameter. When considering, the phase change, the volume effect of the phase transition reaction, as well as the influence of the variability of elastic modules (both volume and shear) on the increment of the phase composition parameter are taken into account.

Keywords: shape memory alloys; model of nonlinear deformation; expression for stress increments; coupled statement

1. ВВЕДЕНИЕ

Большинство известных систем определяющих соотношений для сплавов с памятью формы (СПФ) [1-11] представлены в форме явных зависимостей приращений (или скоростей изменения) тензора деформаций от приращений или скоростей изменения напряжений, параметра фазового состава и температуры, а также от самих напряжений, деформаций, параметра фазового состава и температуры. Определяющий процесс фазового перехода в СПФ параметр фазового состава (в простейшем случае величина объемной доли мартенситной фазы) чаще всего представлен явными выражениями через температуру и напряжения [1,12], пригодными для описания полных циклов фазовых превращений. Однако, для решения ряда прикладных проблем необходимо иметь явные выражения приращений (или скоростей изменения) напряжений и параметра фазового состава через скорости изменения или приращения деформаций и температуры, а также самих напряжений, деформаций, температуры и параметра фазового состава. Такие явные выражения удобны при решении задач, использующих те или иные кинематические гипотезы типа гипотезы плоских сечений или прямых нормалей. В случае применения для решения краевых задач для элементов из СПФ метода конечных элементов в форме метода смещений, необходима формулировка скоростной матрицы жесткости, явно выражающей приращения напряжений через приращения деформаций. Для построения такой матрицы необходимы определяющие соотношения для СПФ в форме явных выражений приращений напряжений и параметра фазового состава через приращения деформаций и температуры, а также самих величин напряжений, деформаций параметра фазового состава и температуры.

Аналогичная проблема обращения определяющих соотношений возникает в различных вариантах теории пластического течения [13], основанных на использовании ассоциированного закона течения. Вопрос о существовании и единственности такого обращения для моделей, основанных на постулате Друкера [14] исследован в [15]. Обращения конкретных вариантов теории пластического течения проводится, как правило, аналитически и используются в коммерческих пакетах прикладных программ ANSYS, ABAQUS и т.д. для построения скоростных матриц жесткости метода конечных элементов.

Вопрос об обращении определяющих соотношений для СПФ исследован значительно меньше. В работах [16,17], связанных с анализом устойчивости элементов из СПФ с помощью метода конечных элементов, процедура обращения системы определяющих соотношений для СПФ в случае прямого мартенситного превращения без учета деформаций структурного перехода производилась численно. Однако в случае неоднородного напряженного состояния процедура такого численного обращения должна производиться для каждого конечного элемента и на каждой итерации по параметру нагружений, что существенно увеличивает время счета. В работах [18] такое обращение проведено для частных случаев простейшей линейной модели деформирования СПФ при фазовых превращениях без учета структурного перехода для конкретной задачи изгиба пластин. В [19,20] для построения матрицы жесткости аналитическое обращение определяющих соотношений проведено для частного случая учета только структурного перехода в СПФ. При этом применялся прием, аналогичный используемому при обращении определяющих соотношений теории пластического течения с изотропным упрочнением, состоящий в том, что сначала определяется приращение интенсивности напряжений, после чего удается найти все компоненты приращения девиатора напряжений.

В данной работе изложен метод обращения системы определяющих соотношений модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях [21,22]. Предложены соответствующие аналитические алгоритмы для всей совокупности термомеханических процессов в СПФ, включая как прямое, так и обратное фазовые превращения, сопровождаемые или нет структурным переходом. Полученные таким образом соотношения пригодны для построения скоростной матрицы жесткости МКЭ для СПФ как в общем трехмерном случае, так и для двумерных вариантов, опирающихся на известные кинематические гипотезы.

2. СИСТЕМА ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ СПФ, РАЗРЕШЕННАЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРИРАЩЕНИЯ ДЕФОРМАЦИЙ

Упрощенный вариант системы определяющих соотношений модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях имеет вид [21,22]

$$\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}^{e}+\varepsilon_{ij}^{phst},\quad \varepsilon_{kk}^{e}=\frac{\sigma_{kk}}{K},\quad \varepsilon_{ij}^{e\prime}=\frac{\sigma_{ij}'}{2G},\quad \frac{1}{K(q)}=\frac{q}{K_M}+\frac{1-q}{K_A},$$
$$\frac{1}{G(q)}=\frac{q}{G_M}+\frac{1-q}{G_A}, \tag{2.1}$$

$$\varepsilon_{ij}^{phst}=\varepsilon_0 q\delta_{ij}+\varepsilon_{ij}^{phst\prime}, \tag{2.2}$$

$$d\varepsilon_{ij}^{phst\prime}=\omega_{ij}^{\pm}dq+\frac{3}{2}\rho_{D2}\frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i}q_{st}\varphi_2'(\sigma_i)\,d\sigma_i, \tag{2.3}$$

$$\omega_{ij}^{+}=\frac{3}{2}\rho_{D1}\frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i}\varphi_1(\sigma_i),\quad \omega_{ij}^{-}=\frac{\varepsilon_{ij}^{phst\prime}}{q}. \tag{2.4}$$

Здесь ε_{ij}, ε_{ij}^{e}, ε_{ij}^{phst} – полные, упругие и фазово-структурные деформации (температурными деформациями в силу их малости пренебрегается); σ_{ij}, σ_i – тензор и интенсивность напряжений, штрих у тензоров деформаций и напряжений обозначает соответствующий девиатор; δ_{ij} – дельта Кронекера; q – объемная доля мартенситной фазы; $K(q)$, $G(q)$ – зависящие от q величины утроенного объемного модуля и модуля сдвига СПФ, ниже для сокращения записи аргумент q у этих функций опускается; те же величины с нижними индексами M и A обозначают значения этих модулей для мартенситного и аустенитного состояний соответственно; в (2.2) – ε_0 – линейная деформация объемного эффекта фазового превращения СПФ. Соотношения (2.3), (2.4) определяют приращения девиатора фазово-структурной деформации за счет фазовых и структурных переходов, верхний индекс + соответствует прямому ($dq>0$), а верхний индекс минус – обратному превращению. В (2.3) $q_{st}=q$ если происходит структурный переход, условием чего в простейшем случае является выполнение соотношений

$$d\sigma_i>0 \text{ и } \sigma_i=\sigma_i^{max} \tag{2.5}$$

(интенсивность напряжений возрастает и равна максимальному значению за всю историю существования мартенситной части представительного объема СПФ). Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, то $q_{st}=0$. Материальные параметры ρ_{D1}, ρ_{D2} определяют точные верхние грани значений интенсивности деформаций, которые могут быть накоплены при прямом превращении или при нагружении в режиме мартенситной неупругости. Материальные функции $\varphi_1(\sigma_i)$, $\varphi_2(\sigma_i)$ определяют формы диаграмм прямого превращения и мартенситной неупругости рассматриваемого СПФ. Штрих у этих функций обозначает их производную по σ_i. Ниже для сокращения записи аргументы у функций $\varphi_1(\sigma_i)$ и $\varphi_2(\sigma_i)$ опускаются. Приведенные выше определяющие соотношения не учитывают влияние вида напряженного состояния на процесс деформирования СПФ [23,24], и поэтому, строго говоря, могут использоваться для описания процессов, происходящих при неизменном напряженном состоянии. Соотношения (2.1)-(2.4) не учитывают влияние фазового механизма деформирования СПФ на структурный [25-29].

Изменение параметра фазового состава (объемной доли мартенситной фазы) q в полных циклах фазовых превращений может быть определено по формулам [1] $q = 0.5\left(1-\cos\left(\pi t_\sigma^\pm\right)\right)$, где для прямого фазового превращения [22]

$$t_\sigma^+ = \frac{M_s^\sigma - T}{M_s^0 - M_f^0},\quad t^+ = \frac{M_s^0 - T}{M_s^0 - M_f^0},\quad M_s^\sigma = M_s^0 + \frac{\omega_{ij}^+ \sigma_{ij}{}' + Z\left(\sigma_{ij}\right) + \sigma_{kk}\varepsilon_0}{\Delta S},$$

а для обратного фазового превращения

$$\begin{gathered} t_\sigma^- = 1 - \frac{T - A_s^\sigma}{A_f^0 - A_s^0},\quad t^- = \frac{A_f^0 - T}{A_f^0 - A_s^0}, \\ A_s^\sigma = A_s^0 + \frac{\omega_{ij}^- \sigma_{ij}{}' + Z\left(\sigma_{ij}\right) + \sigma_{kk}\varepsilon_0}{\Delta S} + \varphi\left(\varepsilon_i^{phst}\right), \\ 6Z\left(\sigma_{ij}\right) = \frac{\sigma_{kk}^2 \Delta K}{K_A K_M} + \frac{\sigma_i^2 \Delta G}{G_A G_M},\quad \Delta K = K_A - K_M,\quad \Delta G = G_A - G_M . \end{gathered} \tag{2.6}$$

Здесь $M_s^0, M_f^0, A_s^0, A_f^0$ – температуры начала (нижний индекс s) и окончания (нижний индекс f) прямого (символ M) и обратного (символ A) термоупругого мартенситного превращения в состоянии, свободном от напряжений и фазовых деформаций (верхний индекс нуль). Те же величины с верхним индексом σ это характерные температуры фазовых переходов для нагруженных материалов. Выражение для A_s^σ (2.6), по сравнению со стандартным вариантом [21,22], содержит дополнительное слагаемое $\varphi\left(\varepsilon_i^{phst}\right)$, описывающее эффект роста A_s^σ с увеличением интенсивности фазово – структурных деформаций при нулевых напряжениях [30,31]. В простейшем варианте функция φ может быть квадратичной $\varphi(\varepsilon) = C\varepsilon^2$ или экспоненциальной $\varphi(\varepsilon) = d\left\{1-\exp\left[-\left(\varepsilon/\varepsilon_*\right)^\alpha\right]\right\}$. Значения параметров этих зависимостей $C, d, \varepsilon_*, \alpha$ для никелида титана приведены в [30]. Согласно (2.6) величина A_s^σ зависит от тензора ω_{ij}^-, который, в свою очередь, зависит, согласно (2.4), от q. Таким образом, для обратного превращения явное выражении для q отсутствует, сформулировано лишь трансцендентное уравнение для этой величины.

В [32] предложены дифференциальные соотношения для параметра фазового состава, пригодные для произвольных (не обязательно полных) циклов фазовых переходов, интегралы которых для случая полных циклов фазовых переходов, происходящих под действием постоянных напряжений, совпадают с приведенными выше конечными соотношениями для q. Для прямого превращения эти дифференциальные соотношения имеют вид

$$dq = \frac{F^+}{\Delta S}\left(A^+ d\sigma_i + B d\sigma_{kk} - \Delta S dT\right),\quad F^+ = \frac{\pi(1-q)}{M_s^0 - M_f^0}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi t_\sigma^+}{2}\right), \tag{2.7}$$

$$A^{+}=\rho_{D1}\left[\left(\varphi_1\left(\sigma_i\right)+\sigma_i\varphi_1'\left(\sigma_i\right)\right)\right]+\frac{\Delta G\sigma_i}{3G_AG_M},\quad B=\frac{\Delta K\sigma_{kk}}{3K_AK_M}+\varepsilon_0.$$

Для обратного превращений

$$dq=\frac{F^{-}}{\Delta S}\left(A^{-}d\sigma_i+Bd\sigma_{kk}+\frac{1}{q}\varepsilon_{ij}^{phst\prime}d\sigma_{ij}'+\frac{2}{3}\varphi'\left(\varepsilon_i^{phst}\right)\frac{\varepsilon_{ij}^{phst\prime}d\varepsilon_{ij}^{phst\prime}}{\varepsilon_i^{phst}}-\Delta SdT\right),\quad (2.8)$$

$$F^{-}=\frac{\pi q}{A_f^0-A_s^0}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi t_\sigma^{-}}{2}\right).$$

Величина B вычисляется для обратного превращения по такой же формуле, что и для прямого. Если обратное превращение происходит одновременно со структурным переходом, то

$$A^{-}=\left[\rho_{D2}\varphi_2'\left(\sigma_i\right)+\frac{\Delta G}{3G_AG_M}\right]\sigma_i.$$

Если обратное превращение не сопровождается структурным переходом, то

$$A^{-}=\frac{\Delta G\sigma_i}{3G_AG_M}.$$

Для простейшего выражения функции $\varphi\left(\varepsilon_{ij}^{phst\prime}\right)=C\left(\varepsilon_i^{phst}\right)^2$ формула (2.8) упрощается

$$dq=\frac{F^{-}}{\Delta S}\left(A^{-}d\sigma_i+Bd\sigma_{kk}+\frac{1}{q}\varepsilon_{ij}^{phst\prime}d\sigma_{ij}'+\frac{4}{3}C\varepsilon_{ij}^{phst\prime}d\varepsilon_{ij}^{phst\prime}-\Delta SdT\right).\qquad (2.9)$$

Согласно (2.8), величина dq для модели, учитывающей влияние фазово-структурных деформаций на A_s^σ при нулевых напряжениях, зависит от величины $d\varepsilon_{ij}^{phst\prime}$, которая, в свою очередь, согласно (2.3), (2.4), зависит от dq. Таким образом, соотношении (2.8) в рамках этой модели является не явным выражением для dq, а лишь линейным уравнением для определения этой величины.

В приведенной выше системе определяющих соотношений для СПФ приращения напряжений входят в выражения для приращений упругих деформаций и приращений фазово-структурных деформаций (2.3) через величины $d\sigma_i$ и dq. Необходимые условия осуществления прямого фазового ($dq>0$) или обратного фазового ($dq<0$) а также структурного $d\sigma_i>0$ превращений выражаются через величины $dq,\ d\sigma_i$, которые также зависят от приращений компонент напряжений. Для обращения системы определяющих соотношений необходимо исключить величины $d\sigma_{ij}$ из правых частей всех этих 8 соотношений (шести уравнений для $d\varepsilon_{ij}$ и еще двух для dq и $d\sigma_i$).

В данной работе предложены и осуществлены аналитические подходы к исключению приращений напряжений из правых частей всех восьми упомянутых выше соотношений в общем случае модели, описывающей и фазовые (как прямые, так и обратные) превращения, так и структурные переходы. В зависимости от рассматриваемого процесса, проблема сводится к одному линейному уравнению для одной искомой скалярной переменной или к системе двух линейных уравнений для двух искомых скалярных переменных.

3. ОБРАЩЕНИЕ ДЛЯ СЛУЧАЯ ПРЯМОГО ПРЕВРАЩЕНИЯ

Приращения девиатора полных (фазово-структурных и упругих) деформаций определяются для прямого превращения, согласно (2.1), (2.3) по формуле

$$d\varepsilon_{ij}' = \frac{d\sigma_{ij}'}{2G} + \sigma_{ij}'\left(\frac{\Delta G}{2G_A G_M}\right)dq + \frac{3}{2}\frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i}\left(\rho_{D1}\varphi_1 dq + \rho_{D2} q\varphi_2' d\sigma_i\right). \qquad (3.1)$$

Если не учитываются структурные превращения, в (3.1) следует положить $\varphi_2' = 0$ и слагаемое с $d\sigma_i$ в правой части (3.1) отсутствует.

Дифференцируя выражение для полной объемной деформации $\varepsilon_{kk} = \dfrac{\sigma_{kk}}{K(q)} + 3\varepsilon_0 q$, получаем

$$d\varepsilon_{kk} = \frac{d\sigma_{kk}}{K} + 3Bdq, \quad B = \varepsilon_0 + \frac{\Delta K \sigma_{kk}}{3K_A K_M}. \qquad (3.2)$$

Формально обращая (3.2), находим

$$d\sigma_{kk} = K(q)\left[d\varepsilon_{kk} - 3B\,dq\right]. \qquad (3.3)$$

Выражение для dq при прямом превращении (2.7) представляем в виде

$$dq = Mdt^+ + Nd\sigma_i + Pd\sigma_{kk} \qquad (3.4)$$

$$M = \pi(1-q)\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi t_\sigma}{2}\right), \quad N = Mf_1(\sigma_i), \quad P = Mf_2(\sigma_{kk}),$$

$$f_1(\sigma_i) = \frac{\rho_{D1}\left(\varphi_1 + \sigma_i\varphi_1'\right) + \Delta G\sigma_i/\left(3G_A G_M\right)}{\Delta S\left(M_s^0 - M_f^0\right)}, \quad f_2(\sigma_{kk}) = \frac{B}{\Delta S\left(M_s^0 - M_f^0\right)}.$$

Чтобы исключить величину $d\sigma_{kk}$ из выражения для dq, подставим (3.3) в (3.4)

$$dq = Mdt^+ + Nd\sigma_i + PKd\varepsilon_{kk} - 3BPdq. \qquad (3.5)$$

Решая уравнение (3.5) относительно dq получаем искомое выражение

$$dq = mdt^+ + nd\sigma_i + pd\varepsilon_{kk}, \qquad (3.6)$$

$$m = M/R, \quad n = N/R, \quad p = PK/R, \quad R = 1 + 3B^2\Big/\left[\Delta S\left(M_s^0 - M_f^0\right)\right].$$

Формально разрешая (3.1) относительно числителя первого слагаемого правой части, получаем

$$d\sigma_{ij}' = 2G\left\{d\varepsilon_{ij}' - A_{ij}^+ dq - B_{ij} d\sigma_i\right\}, \qquad (3.7)$$

$$A_{ij}^+ = \sigma_{ij}'\left(\frac{\Delta G}{2G_A G_M} + \frac{3}{2}\frac{\rho_{D1}\varphi_1}{\sigma_i}\right), \quad B_{ij} = \frac{3}{2}\rho_{D2}\frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i} q\varphi_2'.$$

Подставляя (3.6) в (3.7), получаем

$$d\sigma_{ij}' = 2G\left[d\varepsilon_{ij}' - A_{ij}^+ mdt^+ - \left(A_{ij}^+ + B_{ij}\right)d\sigma_i + pA_{ij}^+ d\varepsilon_{kk}\right]. \qquad (3.8)$$

Легко видеть, что

$$d\sigma_i = \frac{3}{2}\frac{\sigma_{ij}' d\sigma_{ij}'}{\sigma_i}. \qquad (3.9)$$

Домножая обе части (3.8) на $\frac{3}{2}\frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i}$ и сворачивая по обоим индексам с учетом (3.9) получаем уравнение для определения $d\sigma_i$

$$d\sigma_i = \frac{3G}{\sigma_i}\left\{\sigma_{ij}'\delta\varepsilon_{ij}' - m\sigma_{ij}'A_{ij}^{+}dt^{+} - \left(\sigma_{ij}'A_{ij}^{+}n + \sigma_{ij}'B_{ij}\right)d\sigma_i - p\sigma_{ij}'A_{ij}^{+}d\varepsilon_{kk}\right\}. \quad (3.10)$$

Решая уравнение (3.10), находим

$$d\sigma_i = \frac{3G\left(\sigma_{ij}'d\varepsilon_{ij}' - A_{ij}^{+}\left(m\sigma_{ij}'dt^{+} + p\sigma_{ij}'d\varepsilon_{kk}\right)\right)}{\sigma_i + 3G\left(n\sigma_{ij}'A_{ij}^{+} + \sigma_{ij}'B_{ij}\right)}. \quad (3.11)$$

Вводя для сокращения записи обозначения

$$f_3 = \sigma_{ij}'A_{ij}^{+} = \frac{2}{3}\frac{\Delta G\sigma_i^2}{G_A G_M} + \rho_{D1}\sigma_i\varphi_1, \quad f_4 = \sigma_{ij}'B_{ij} = \rho_{D2}\sigma_i q\varphi_2', \quad f_5 = f_1 f_3$$

из (3.11) получаем

$$d\sigma_i = \frac{3G\left(\sigma_{ij}'d\varepsilon_{ij}' - mf_3dt^{+} - pf_3d\varepsilon_{kk}\right)}{\sigma_i + 3G\left(mf_5 + f_4\right)}. \quad (3.12)$$

Подстановка (3.12) в (3.8) дает

$$d\sigma_{ij}' = 2G\left[d\varepsilon_{ij}' - A_{ij}^{+}mdt^{+} - \left(A_{ij}^{+}n + B_{ij}\right)\frac{3G\left(\sigma_{ij}'d\varepsilon_{ij}' - mf_3dt^{+} - pf_3d\varepsilon_{kk}\right)}{\sigma_i + 3G\left(mf_5 + f_4\right)}\right]. \quad (3.13)$$

Подставляя (3.12) в (3.6), получаем

$$dq = mdt^{+} + pd\varepsilon_{kk} + n\frac{3G\left(\sigma_{ij}'d\varepsilon_{ij}' - mf_3dt^{+} - pf_3d\varepsilon_{kk}\right)}{\sigma_i + 3G\left(mf_5 + f_4\right)}. \quad (3.14)$$

Подставляя (3.14) в (3.3), находим

$$d\sigma_{kk} = K\left[d\varepsilon_{kk} - 3B\left(mdt^{+} + pd\varepsilon_{kk} + n\frac{3G\left(\sigma_{ij}'d\varepsilon_{ij}' - mf_3dt^{+} - pf_3d\varepsilon_{kk}\right)}{\sigma_i + 3G\left(mf_5 + f_4\right)}\right)\right]. \quad (3.15)$$

Соотношения (3.13), (3.15) являются искомыми явными выражениями приращений компонент напряжений через приращения компонент деформаций для случая прямого превращения, сопровождающегося структурным переходом. Соотношения (3.12) и (3.14), не содержащие в правой части компонент $d\sigma_{ij}'$ позволяют проверить условие осуществления прямого превращения $(dq > 0)$ и структурного перехода $(d\sigma_i > 0)$.

Ниже рассматривается отдельно частный случай, когда происходит прямое термоупругое фазовое превращение, но не выполнено одно из условий осуществления структурного перехода (2.5). Поскольку часть уравнений комбинированной модели [25-28], относящаяся к описанию фазовых превращений, совпадает с соответствующей частью рассматриваемой здесь модели [21,22], описанные ниже соотношения справедливы для обращения соотношений модели [25-28] для случая отсутствия структурных переходов. Приведенные ниже соотношения не учитывают также малого влияния $d\sigma_{kk}$ на dq

(т.е. в (3.4) $P=0$), но учитывают в выражении для приращения деформаций объемный эффект реакции и переменность объемного модуля и модуля сдвига при фазовом переходе.

Из (3.7) при $B_{ij}=0$ получаем

$$d\sigma_{ij}'=2G\left(d\varepsilon_{ij}'-A_{ij}^{+}dq\right). \tag{3.16}$$

Из (3.14) в тех же условиях имеем

$$dq=M\left[dt+f_1\frac{3G\left(\sigma_{ij}'d\varepsilon_{ij}'-Mf_3dt^{+}\right)}{\sigma_i+3GMf_5}\right].$$

Или, после упрощения

$$dq=M\left[\frac{\sigma_i dt^{+}+3Gf_1\sigma_{ij}'d\varepsilon_{ij}'}{\sigma_i+3GMf_5}\right]. \tag{3.17}$$

В результате из (3.16) и (3.3) получаем

$$d\sigma_{ij}=d\sigma_{ij}'+\frac{1}{3}\delta_{ij}d\sigma_{kk}=\left[2Gd\varepsilon_{ij}'+\frac{1}{3}K\delta_{ij}d\varepsilon_{kk}\right]-\left[2GA_{ij}^{+}+3KB\delta_{ij}\right]dq. \tag{3.18}$$

Здесь для dq используется выражение (3.17).

Первое слагаемое правой части (3.18) есть дифференциальная форма обычного упругого закона для приращения напряжений, не учитывающая переменность модулей при фазовом переходе. Вычитаемое правой части (3.18) содержит, как величину, связанную с переменностью упругих модулей

$$\left[\sigma_{ij}'\frac{2G\Delta G}{G_AG_M}+\frac{K\Delta K\sigma_{kk}}{3K_AK_M}\delta_{ij}\right]dq$$

так и величину, связанную с развитием фазовой деформации

$$\left[3G\frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i}\rho_D\varphi_1+K\varepsilon_0\delta_{ij}\right]dq.$$

4. ОБРАЩЕНИЕ ДЛЯ СЛУЧАЯ ОБРАТНОГО ПРЕВРАЩЕНИЯ

В случае обратного превращения выражение для dq (2.8) представляется в форме

$$dq=\frac{F^{-}}{\Delta S}\left(D_{ij}^{-}d\sigma_{ij}'+Bd\sigma_{kk}+\frac{2}{3}\varphi'\left(\varepsilon_i^{phst}\right)\frac{\varepsilon_{ij}^{phst\prime}d\varepsilon_{ij}^{phst\prime}}{\varepsilon_i^{phst}}-\Delta SdT\right). \tag{4.1}$$

Сначала рассматривается случай одновременно происходящих процессов обратного превращения и структурного перехода. Тогда

$$D_{ij}^{-}=A_{ij}^{-}+\frac{3}{2}\rho_{D2}\varphi_2'\left(\sigma_i\right)\sigma_{ij}'=\frac{3}{2}A^{-}\frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i}+\frac{\varepsilon_{ij}^{phst\prime}}{q},$$

$$A_{ij}^{-}=\frac{\Delta G\sigma_{ij}'}{2G_AG_M}+\frac{\varepsilon_{ij}^{phst\prime}}{q}.$$

Подставляя в (4.1) выражение $d\varepsilon_{ij}^{phst\prime} = \frac{\varepsilon_{ij}^{phst\prime}}{q} dq + \frac{3}{2}\rho_{D2}\frac{\sigma_{ij}{}'}{\sigma_i} q_{st}\varphi_2{}'(\sigma_i)\, d\sigma_i$, следующее из (2.3), (2.4) получаем

$$dq = \frac{F^-}{\Delta S}\left(D_{ij}^- d\sigma_{ij}{}' + Bd\sigma_{kk} + \varphi' \frac{\varepsilon_i^{phst}}{q} dq + \frac{2}{3}\varphi' \frac{\varepsilon_{pq}^{phst\prime}\sigma_{pq}{}'}{\varepsilon_i^{phst\prime}\sigma_i}\varphi_2{}' q_{st}\frac{\sigma_{mn}{}' d\sigma_{mn}{}'}{\sigma_i} - \Delta S dT \right). \tag{4.2}$$

Подставляя в (4.2) выражение (3.3) для $d\sigma_{kk}$ и вводя обозначения

$$\alpha_{mn} = D_{mn}^- + \frac{2}{3}\varphi' \frac{\varepsilon_{pq}^{phst\prime}\sigma_{pq}{}'}{\varepsilon_i^{phst\prime}\sigma_i}\varphi_2{}' \frac{q_{st}\sigma_{mn}{}'}{\sigma_i}$$

находим

$$dq = \frac{F^-}{\Delta S}\left\{ \alpha_{mn} d\sigma_{mn}{}' + BKd\varepsilon_{kk} - \left(3KB^2 - \varphi' \frac{\varepsilon_i^{phst}}{q} \right) dq - \Delta S dT \right\}. \tag{4.3}$$

Решая (4.3) относительно dq получаем

$$dq = \beta_{mn} d\sigma_{mn}{}' + \beta d\varepsilon_{kk} + pdt^-. \tag{4.4}$$

Здесь введены обозначения

$$\beta_{mn} = \alpha_{mn}/R_1,\ \beta = BK/R_1,\ p = \Delta S\left(A_f^0 - A_s^0\right)/R_1,$$

$$R_1 = \Delta S/F^- + 3KB^2 - \varphi'\varepsilon_i^{phst}/q.$$

Приращение девиатора полной деформации для обратного превращения, происходящего одновременно со структурным переходом, определяются, согласно (2.1)-(2.4) по формуле

$$d\varepsilon_{ij}{}' = \frac{d\sigma_{ij}{}'}{2G(q)} + \sigma_{ij}{}'\left(\frac{\Delta G}{2G_A G_M} \right) dq + \frac{\varepsilon_{ij}^{phst\prime}}{q} dq + \frac{3}{2}\frac{\sigma_{ij}{}'}{\sigma_i}\rho_{D2} q_{st}\varphi_2{}'(\sigma_i)\, d\sigma_i. \tag{4.5}$$

Разрешая формально (4.5) относительно числителя первого слагаемого правой части, получаем

$$d\sigma_{ij}{}' = 2G(q)\left[d\varepsilon_{ij}{}' - \sigma_{ij}{}'\left(\frac{\Delta G}{2G_A G_M} \right) dq - \frac{\varepsilon_{ij}^{phst\prime}}{q} dq - \frac{3}{2}\frac{\sigma_{ij}{}'}{\sigma_i}\rho_{D2} q_{st}\varphi_2(\sigma_i)\, d\sigma_i \right]. \tag{4.6}$$

Группируя в (4.6) слагаемые с множителем dq и проводя замену $d\sigma_i = \frac{3}{2}\frac{\sigma_{mn}{}'}{\sigma_i} d\sigma_{mn}{}'$ находим

$$d\sigma_{ij}{}' = 2G(q)\left[d\varepsilon_{ij}{}' - A_{ij}^- dq - \frac{9}{4}\rho_{D2} q_{st}\varphi_2{}'(\sigma_i)\frac{\sigma_{ij}{}'\sigma_{mn}{}'}{(\sigma_i)^2} d\sigma_{mn}{}' \right]. \tag{4.7}$$

Подстановка выражения для dq (4.4) в (4.7) дает

$$d\sigma_{ij}{}' = 2G\left[d\varepsilon_{ij}{}' - A_{ij}^-\left(\beta_{mn} d\sigma_{mn}{}' + \beta d\varepsilon_{kk} + pdt^- \right) - \frac{9}{4}\rho_{D2} q_{st}\varphi_2{}' \frac{\sigma_{ij}{}'\sigma_{mn}{}'}{(\sigma_i)^2} d\sigma_{mn}{}' \right]. \tag{4.8}$$

В рассмотренных ранее случаях величина $d\sigma_{mn}'$ входила в правую часть соотношений типа (3.7) в виде единственной комбинации $B_{ij}C_{mn}d\sigma_{mn}'$ с вырожденным оператором. В результате величину $C_{mn}d\sigma_{mn}'$ удавалось определить и исключить $d\sigma_{mn}'$ из правой части определяющих уравнений. Для общего случая обратного превращения и структурного перехода соотношение (4.8) представляется в виде

$$d\sigma_{ij}' = 2G\left(d\varepsilon_{ij} - B_{ij}^{(1)}C_{mn}^{(1)}d\sigma_{mn}' - B_{ij}^{(2)}C_{mn}^{(2)}d\sigma_{mn}' - A_{ij}^{-}\left(\beta d\varepsilon_{kk} + pdt^{-}\right)\right). \qquad (4.9)$$

Здесь $B_{ij}^{(1)} = A_{ij}^{-}$, $C_{mn}^{(1)} = \beta_{mn}$, $B_{ij}^{(2)} = \dfrac{9}{4}\rho_{D2}q_{st}\varphi_2'(\sigma_i)\dfrac{\sigma_{ij}'}{(\sigma_i)^2} = \lambda\sigma_{ij}'$, $C_{mn}^{(2)} = \sigma_{mn}'$.

Таким образом, здесь уже величина $d\sigma_{mn}'$ входит в два различных слагаемых, каждое из которых имеет вырожденные, но различные операторы, которые не могут быть объединены в единый вырожденный оператор. Поэтому здесь уже приходится вводить не одну, а две скалярные переменные

$$X_1 = \beta_{mn}d\sigma_{mn}', \quad X_2 = \sigma_{mn}'d\sigma_{mn}',$$

входящие в систему (4.9):

$$d\sigma_{ij}' = 2G\left[d\varepsilon_{ij}' - A_{ij}^{-}X_1 - \lambda\sigma_{ij}'X_2 - A_{ij}^{-}\left(\beta d\varepsilon_{kk} - pdt\right)\right]. \qquad (4.10)$$

Умножая (4.10) слева на β_{ij} и сворачивая по обоим индексам, получаем

$$X_1 = 2G\left[\beta_{ij}d\varepsilon_{ij}' - c_1X_1 - b_2X_2 - c_1\left(\beta d\varepsilon_{kk} + pdt\right)\right].$$

Умножая (4.10) слева на σ_{ij}' и сворачивая по обоим индексам, получаем

$$X_2 = 2G\left[\sigma_{ij}'d\varepsilon_{ij}' - b_1X_1 - c_2X_2 - b_1\left(\beta d\varepsilon_{kk} + pdt\right)\right].$$

Здесь введены обозначения $c_1 = \beta_{pq}A_{pq}^{-}$, $c_2 = \lambda\sigma_{pq}'\sigma_{pq}'$, $b_1 = \sigma_{pq}'A_{pq}^{-}$, $b_2 = \lambda\beta_{pq}\sigma_{pq}'$.

В результате получается следующая система двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\left(1+2Gc_1\right)X_1 + 2Gb_2X_2 = 2GdA_1, \qquad (4.11)$$

$$2Gb_1X_1 + \left(1+2Gc_2\right)X_2 = 2GdA_2. \qquad (4.12)$$

Здесь использованы обозначения

$$dA_1 = \beta_{pq}d\varepsilon_{pq}' - c_1\left(\beta d\varepsilon_{kk} + pdt\right), \quad dA_2 = \sigma_{pq}'d\varepsilon_{pq}' - b_1\left(\beta d\varepsilon_{kk} + pdt\right).$$

Решение системы (4.11), (4.12) имеет вид

$$X_1 = 2G\frac{\left(1+2Gc_2\right)dA_1 - 2Gb_2dA_2}{D}, \qquad (4.13)$$

$$X_2 = 2G\frac{\left(1+2Gc_1\right)dA_2 - 2Gb_1dA_1}{D}, \qquad (4.14)$$

где использовано обозначение $D = \left(1+2Gc_1\right)\left(1+2Gc_2\right) - 4G^2b_1b_2$.

Подстановка (4.13), (4.14) в (4.10) дает требуемое выражение для $d\sigma_{ij}'$.

Воспользовавшись соотношением (4.4) для dq, получаем выражение

$$dq = X_1 + \beta d\varepsilon_{kk} + pdt, \qquad (4.15)$$

не содержащее в правой части компонент $d\sigma_{ij}$ и позволяющее подтвердить или опровергнуть выполнение условия обратного превращения $dq < 0$. Легко видеть, что знак величины $d\sigma_i$ совпадает со знаком величины X_2. Таким образом, дифференциальное условие осуществления структурного перехода $d\sigma_i > 0$ выражается в форме $X_2 > 0$, так же, как и полученные ранее соотношения не зависящей от приращения напряжений.

Подставляя (4.15) в (3.3) получаем выражение для приращения первого инварианта тензора напряжения

$$d\sigma_{kk} = K\left[\left(1-3\beta B\right)d\varepsilon_{kk} - 3B\left(X_1 + pdt\right)\right].$$

Данное выражение и соотношение (4.10) с подстановкой (4.13), (4.14) дают искомые явные выражения для приращений компонент тензора напряжений, необходимые для построения скоростной матрицы жесткости.

Рассмотрим теперь частный случай обратного превращения при отсутствии структурного перехода, т.е. когда хотя бы одно из условий (2.5) не выполняется. Полученные ниже результаты обращения применимы не только к рассматриваемым здесь моделям [21,22], но и к случаю более сложных комбинированных моделей [25-29], если рассматривается случай обратного превращения без структурного перехода. В этом случае во всех приведенных в данном пункте формулах следует положить $q_{st} = 0$, $\alpha_{mn} = D^-_{mn} = A^-_{mn}$ При этом ход решения существенно упрощается. Задача, как и для случая прямого превращения, сводится к одному разрешающему линейному уравнению с одним скалярным неизвестным.

Соотношение для dq имеет тот же вид (4.5), однако здесь уже $\beta_{mn} = A^-_{mn}/R_1$. Выражение для $d\sigma_{ij}'$ (4.8) существенно упрощается

$$d\sigma_{ij}' = 2G\left(d\varepsilon_{ij}' - A^-_{ij}dq\right). \qquad (4.16)$$

Подставляя в (4.16) выражение для dq (4.4), получаем

$$d\sigma_{ij}' = 2G\left[d\varepsilon_{ij}' - A^-_{ij}\beta_{mn}d\sigma_{mn}' - A^-_{ij}\left(\beta d\varepsilon_{kk} - pdt\right)\right]. \qquad (4.17)$$

Для исключения из правой части (4.17) величин $d\sigma_{mn}'$ умножим (4.17) слева на β_{ij} и свернем по обоим индексам

$$\beta_{ij}d\sigma_{ij}' = 2G\left(q\right)\left[\beta_{ij}d\varepsilon_{ij}' - \beta_{ij}A^-_{ij}\beta_{mn}d\sigma_{mn}' - \beta_{ij}A^-_{ij}\left(\beta d\varepsilon_{kk} + pdt\right)\right]. \qquad (4.18)$$

Решая (4.18) относительно $\beta_{mn}d\sigma_{mn}'$, получаем

$$\beta_{pq}d\sigma_{pq}' = \Omega_{rs}d\varepsilon_{rs} - \Theta d\varepsilon_{kk} - \Pi dt. \qquad (4.19)$$

Здесь введены обозначения $\beta_{mn}A^-_{mn} = A^-_{ij}A^-_{ij}/R_1 = R_2$, $\Omega_{rs} = 2G\beta_{rs}/R_3$, $\Theta = 2GR_2\beta/R_3$, $\Pi = 2GR_2 p/R_3$, $R_3 = 1 + 2GR_2$.

Подстановка (4.19) в (4.17) дает

$$d\sigma_{ij}' = 2G\left[\left(\delta_{ir}\delta_{js} - A^-_{ij}\Omega_{rs}\right)d\varepsilon_{rs}' - A^-_{ij}\left(\left(\beta-\Theta\right)d\varepsilon_{kk} + \left(p-\Pi\right)dt\right)\right]. \qquad (4.20)$$

Подстановка (4.19) в (4.4) дает выражение для dq

$$dq = \Omega_{rs} d\varepsilon_{rs} - (\Theta - \beta) d\varepsilon_{kk} - (\Pi - p) dt. \tag{4.21}$$

Подстановка (4.21) в (3.3) дает

$$d\sigma_{kk} = K\left\{\left[1+3B(\Theta-\beta)\right] d\varepsilon_{kk} - 3B\Omega_{rs} d\varepsilon_{rs} + 3B(\Pi - p) dt\right\}. \tag{4.22}$$

Соотношения (4.20) и (4.22) дают искомое обращение определяющих соотношений для СПФ при обратном превращении, не сопровождающемся структурным переходом. Соотношение (4.21) для dq позволяет проверить условие осуществления обратного превращения $dq < 0$. Соотношение для $d\sigma_{ij}{}'$ (4.20) позволяет определить знак величины $\sigma_{ij}{}' d\sigma_{ij}{}'$, совпадающий со знаком величины $d\sigma_i$. В результате можно проверить факт нарушение дифференциального условия структурного перехода $d\sigma_i > 0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлены алгоритмы аналитического обращения системы определяющих соотношений модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях. Для случаев прямого или обратного термоупругого фазового превращения, сопровождаемых или нет структурным переходом получены соотношения этой модели, разрешенные относительно приращений напряжений. Для всех случаев установлены условия осуществления прямого или обратного фазового превращения или структурного перехода, не содержащие приращений компонент тензора напряжений. Полученные соотношения могут быть использованы для формулировки скоростной матрицы жесткости метода конечных элементов для анализа механического поведения СПФ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Liang C., Rogers C.A. *One-Dimensional Thermomechanical Constitutive Relations for Shape Memory Materials* // J. of Intell. Mater. Syst. and Struct. – 1990. – Vol.1. – No.2. – Pp.207-234.
2. Lexcellent Ch., Boubakar M.L., Bouvet Ch., Calloch S. *About modeling the shape memory alloy behaviour based on the phase transformation surface identification under proportional loading and anisothermal conditions* // Intern. J. Solids and Struct. – 2006. – Vol.43. – No.3-4. – Pp.613-626.
3. Boyd J.G., Lagoudas D.C. *A thermodynamic constitutive model for shape memory materials. Part 1. The monolithic shape memory alloy* // Intern. J. of Plasticity. – 1996. – Vol.12. – No.6. – Pp.805-842.
4. Auricchio F., Reali A., Stefanelli U. *A macoscopic 1d model for shape memory alloys including asymmetric behavior and transformation-dependent elastic properties* // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2009. – Vol.198. – No.17-20. – Pp.1631-1637.
5. Xiao H., Bruhns O.T., Meyers A. *Thermoinduced plastic flow and shape memory effects* // Theoret. Appl. Mech. – 2011. – Vol.38. – No.2. – Pp.155-207.
6. Graesser E.J. and Cozzarelli F.A. *A proposed three-dimensional constitutive model for shape memory alloy* // J. Intell. Mater. Syst. Struct. – 1994. – Vol.5. – Pp.78-79.
7. Yan W., Wang C.H., Zhang X.P., Mai Y.W. *Theoretical modeling of the effect of plasticity on reverse transformation in superelastic shape memory alloys* // Mater. Sci.Eng. – 2003. – Vol.A354. – Pp.146-157.

8. Olsen J.S., Zhang Z.L., Hals J.K., Lu H. *Effect of notches on the behavior of superelastic round-bar NiTi specimens* // Smart Mater. Struct. – 2011. – Vol.20. – 025014 (12 pp).
9. Cisse C., Zaki W., Zineb T.B. *A review of constitutive models and modeling techniques for shape memory alloys* // Intern. J. of Plasticity. – 2016. – Vol.76. – Pp.244-284.
10. Gu X., Zhang W., Zaki W., Moumni Z. *An extended thermomechanically coupled 3D rate-dependent model for pseudoelastic SMAs under cyclic loading* // Smart Mater. Struct. – 2017. – Vol.26. – 095047 (16pp).
11. Tikhomirova K. *Computation of phase and structural deformations in shape memory alloys. One-dimensional model* // Materials Today: Proceedings. – 2017. – No.4. – Pp.4626-4630.
12. Tanaka K. *A phenomenological description on thermomechanical behavior of shape memory alloys* // J. Pressure Vessel Technology. Trans. ASME. – 1990. – Vol.112. – No.2. – Pp.158-163.
13. Хилл Р. *Математическая теория пластичности*. – М.: Гос. изд.-во технико-теоретической литературы, 1956. – 806 с.
14. Drucker D.C. *A more fundamental approach to plastic stress-strains relations* // Proc. 1st U.S. Nat. Congr. Appl. Mech. – 1951. – Pp.487-491.
15. Koiter W.T. *General theorems for elastic – plastic solids* / In: Progress in solids mechanics. – Delft: Thehnological university, 1960. – Vol.1. – Chapt.IV. – 80 p.
16. Nushtaev D.V., Zhavoronok S.I. *Dynamics of martensite phase transitions in shape memory beams under buckling and postbuckling conditions* // IFAC. – 2018. – Vol.51. – No.2. – Pp.873-878.
17. Nushtaev D.V., Zhavoronok S.I. *Abnormal buckling of thin-walled bodies with shape memory effects under thermally induced phase transitions* / In: Recent Developments in the Theory of Shells. Advanced Structured Materials. – Berlin: Springer, 2019. – Vol.110. – Pp.227-250.
18. Мовчан А.А. *Учет переменности упругих модулей и влияния напряжений на фазовый состав в сплавах с памятью формы* // Известия АН. Механика твердого тела. – 1998. – №1. – С.79-90.
19. Саганов Е.Б. *Численное моделирование явления мартенситной неупругости в сплавах с памятью формы с учетом их разноспротивляемости* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2019. – Т.25. – №2. – С.281-294.
20. Саганов Е.Б. *Решение задачи о толстостенном цилиндре из сплава с памятью формы, находящемся под давлением, с учетом разносопротивляемости* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2019. – Т.25. – №4. – С.563-573.
21. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г., Сильченко Т.Л. *Учет явления мартенситной неупругости при обратном фазовом превращении в сплавах с памятью формы* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2011. – №2. – С.44-56.
22. Мовчан А.А., Казарина С.А. *Материалы с памятью формы как объект механики деформируемого твердого тела: экспериментальные исследования, определяющие соотношения, решение краевых задач* // Физическая мезомеханика. – 2012. – Т.15. – №1. – С.105-116.
23. Mishustin Ilya V. *Nanostructural model of shape memory alloy with resistance asymmetry behavior* // Nanoscience and Technology: An International Journal. – 2018. – Vol.9. – Iss.2. – Pp.165-181.

24. Movchan Andrey A., Mishustin Ilya V. *Nanostructural prediction of shape memory alloys resistance asymmetry* // Nanoscience and Technology: An International Journal. – 2019. – Vol.10. – No.3. – Pp.233-245.
25. Мовчан А.А. *Модель влияния фазового механизма деформирования на структурный в сплавах с памятью формы* // Деформация и разрушение материалов. – 2019. – №7. – С.14-23.
26. Гаганова Н.В. *Распространение модели деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях на случай учета развития мартенситных элементов* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2019. – Т.25. – №4. – С.543-562.
27. Мовчан А.А. *Феноменологическая модель изменения фазово-структурных деформаций в сплавах с памятью формы* // Известия российской академии наук. Механика твердого тела. – 2020. – №4. – С.140-151.
28. Мовчан А.А. *Объединенная модель фазово-структурного деформирования сплавов с памятью формы* // Деформация и разрушение материалов. – 2020. – №11. – С.2-10.
29. Мовчан А.А. *Модель неупругого деформирования сплавов с памятью формы* // Деформация и разрушение материалов. – 2021. – №3. – С.8-17.
30. Мовчан А.А., Казарина С.А., Сильченко А.Л. *Влияние неупругих деформаций на температуру начала обратного термоупругого превращения в сплавах с памятью формы. Часть 1. Анализ экспериментальных данных // Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2018. – Т.24. – №3. – С.362-366.
31. Мовчан А.А., Казарина С.А., Сильченко А.Л. *Влияние неупругих деформаций на температуру начала обратного термоупругого превращения в сплавах с памятью формы* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2019. – Т.25. – №1. – С.3-18.
32. Мовчан А.А., Давыдов В.В. *Инкрементальные определяющие соотношения для объемной доли мартенситной фазы в сплавах с памятью формы* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2010. – Т.16. – №5. – С.653-661.

REFERENCES

1. Liang C., Rogers C.A. *One-Dimensional Thermomechanical Constitutive Relations for Shape Memory Materials.* J. of Intell. Mater. Syst. and Struct., 1990, Vol.1, No.2, Pp.207-234.
2. Lexcellent Ch., Boubakar M. L., Bouvet Ch., Calloch S. *About modeling the shape memory alloy behaviour based on the phase transformation surface identification under proportional loading and anisothermal conditions.* Intern. J. Solids and Struct., 2006, Vol.43, No.3-4, Pp.613-626.
3. Boyd J.G., Lagoudas D.C. *A thermodynamic constitutive model for shape memory materials. Part 1. The monolithic shape memory alloy.* Intern. J. of Plasticity, 1996, Vol.12, No.6, Pp.805-842.
4. Auricchio F., Reali A., Stefanelli U. *A macoscopic 1d model for shape memory alloys including asymmetric behavior and transformation-dependent elastic properties*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2009, Vol.198, No.17-20, Pp.1631-1637.
5. Xiao H., Bruhns O.T., Meyers A. *Thermoinduced plastic flow and shape memory effects.* Theoret. Appl. Mech, 2011, Vol.38, No.2, Pp.155-207.

6. Graesser E.J. and Cozzarelli F.A. *A proposed three-dimensional constitutive model for shape memory alloy*. J. Intell. Mater. Syst. Struct., 1994, Vol.5, Pp.78-79.
7. Yan W., Wang C.H., Zhang X.P., Mai Y.W. *Theoretical modeling of the effect of plasticity on reverse transformation in superelastic shape memory alloys.* Mater. Sci. Eng., 2003, Vol.A354, Pp.146-157.
8. Olsen J.S., Zhang Z.L., Hals J.K., Lu H. *Effect of notches on the behavior of superelastic round-bar NiTi specimens.* Smart Mater. Struct., 2011, Vol.20, 025014 (12 pp).
9. Cisse C., Zaki W., Zineb T.B. *A review of constitutive models and modeling techniques for shape memory alloys.* Intern. J. of Plasticity, 2016, Vol.76, Pp.244-284.
10. Gu X., Zhang W., Zaki W., Moumni Z. *An extended thermomechanically coupled 3D rate-dependent model for pseudoelastic SMAs under cyclic loading.* Smart Mater. Struct., 2017, Vol.26, 095047 (16pp).
11. Tikhomirova K. *Computation of phase and structural deformations in shape memory alloys. One-dimensional model.* Materials Today: Proceedings, 2017, No.4, Pp.4626-4630.
12. Tanaka K. *A phenomenological description on thermomechanical behavior of shape memory alloys.* J. Pressure Vessel Technology. Trans. ASME, 1990, Vol.112, No.2, Pp.158-163.
13. Hill R. *The mathematical theory of plasticity.* Oxford, Clarendon press, 1950, 608 p.
14. Drucker D.C. *A more fundamental approach to plastic stress-strains relations.* Proc. 1st U.S. Nat. Congr. Appl. Mech. 1951, Pp.487-491.
15. Koiter W.T. *General theorems for elastic – plastic solids*. In: Progress in solids mechanics. Delft, Thehnological university, 1960, Vol.1, Chapt.IV, 80 p.
16. Nushtaev D.V., Zhavoronok S.I. *Dynamics of martensite phase transitions in shape memory beams under buckling and postbuckling conditions.* IFAC, 2018, Vol.51, No.2, Pp.873-878.
17. Nushtaev D.V., Zhavoronok S.I. *Abnormal buckling of thin-walled bodies with shape memory effects under thermally induced phase transitions.* In: Recent Developments in the Theory of Shells. Advanced Structured Materials. Berlin, Springer, 2019, Vol.110, Pp.227-250.
18. Movchan A.A. *Consideration of the elastic modulus variability and the effect of stresses on the phase composition in shape memory alloys.* Mechanics of Solids, Allerton Press, Inc. 1998, Vol.33, No.1, Pp.64-72.
19. Saganov E.B. *Chislennoe modelirovanie yavleniya martensitnoj neuprugosti v splavakh s pamyat'yu formy s uchetom ikh raznosprotivlyaemosti [Numerical modeling of the phenomena of martensite inelasticity in shape memory alloys with account of their tension-compression asymmetry]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2019, Vol.25, No.2, Pp.281-294.
20. Saganov E.B. *Reshenie zadachi o tolstostennom tsilindre iz splava s pamyat'yu formy, nakhodyashhemsya pod davleniem, s uchetom raznosoprotivlyaemosti [Solution of the problem of a thick – walled cylinder under pressure from shape memory taking into account of tension – compression asymmetry]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2019, Vol.25, No.4, Pp.563-573.
21. Movchan A.A., Sil'chenko L.G., Sil'chenko T.L. *Taking into account of the martensite inelasticity in reverse phase transformation in shape memory alloys*. Mechanics of Solids, 2011, Vol.46, No.2, Pp.194-203.

22. Movchan A.A., Kazarina S.A. *Shape memory materials as an object of solid state mechanics: experimental study, constitutive relations, solution of boundary value problems*. Physical Mesomechanics, 2012, Vol.15, No.3-4, Pp.214-223.
23. Mishustin I.V. *Nanostructural model of shape memory alloy with resistance asymmetry behavior.* Nanoscience and Technology: An International Journal, 2018, Vol.9, Iss.2, Pp.165-181.
24. Movchan A.A., Mishustin I.V. *Nanostructural prediction of shape memory alloys resistance asymmetry.* Nanoscience and Technology: An International Journal, 2019, Vol.10, No.3, Pp.233-245.
25. Movchan A.A. *Model for the Effect of the Phase Mechanism of Deformation on the Structural Mechanism in Shape Memory Alloys.* Russian Metallurgy (Metally), 2020, Vol.2020, No.4, Pp.282-290.
26. Gaganova N.V. *Rasprostranenie modeli deformirovaniya splavov s pamyat'yu formy pri fazovykh i strukturnykh prevrashheniyakh na sluchaj ucheta razvitiya martensitnykh ehlementov [Extension of the model of deformation of shape memory alloys during phase and structural transformations in the case of taking into account the development of martensitic elements]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2019, Vol.25, No.4, Pp.543-562.
27. Movchan A.A. *Phenomenological Model of Changes in Phase-Structural Deformations in Shape Memory Alloys.* Mechanics of Solids, 2020, Vol.55, No.4, Pp.573-583.
28. Movchan A.A. *Joint Model for the Phase-Structural Deformation of Shape Memory Alloys*. Russian Metallurgy (Metally), 2021, Vol.2021, No.4, Pp.333-340.
29. Movchan A.A. *Model' neuprugogo deformirovaniya splavov s pamyat'yu formy [Model of inelastic deformation of shape memory alloys]*. Deformatsiya i razrushenie materialov, 2021, No.3, Pp.8-17.
30. Movchan A.A., Kazarina S.A., Sil'chenko A.L. *Vliyanie neuprugikh deformatsij na temperaturu nachala obratnogo termouprugogo prevrashheniya v splavakh s pamyat'yu formy. Chast' 1. Analiz ehksperimental'nykh dannykh [The effect of inelastic deformations on the temperature of the beginning of the reverse thermoelastic transformation in shape memory alloys. Part 1. Analysis of experimental data]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2018, Vol.24, No.3, Pp.362-366.
31. Movchan A.A., Kazarina S.A., Sil'chenko A.L. *Vliyanie neuprugikh deformatsij na temperaturu nachala obratnogo termouprugogo prevrashheniya v splavakh s pamyat'yu formy [Effect of inelastic deformations on the temperature of the beginning of the reverse thermoelastic transformation in shape memory alloys]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2019, Vol.25, No.1, Pp.3-18.
32. Movchan A.A., Davydov V.V. *Inkremental'nye opredelyayushhie sootnosheniya dlya ob"emnoj doli martensitnoj fazy v splavakh s pamyat'yu formy [Incremental determining relations for the volume fraction of the martensitic phase in shape memory alloys]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2010, Vol.16, No.5, Pp.653-661.

Поступила в редакцию 02 июня 2021 года.

Сведения об авторе:

Мовчан Андрей Александрович – д.ф.-м.н., проф., гл.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: movchan47@mail.ru