

МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ГИБКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ АРМИРОВАННЫХ ОБОЛОЧЕК В РАМКАХ УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ*

Янковский А.П.

*ФГБУН Институт теоретической и прикладной механики
им. С.А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия*

АННОТАЦИЯ

Сформулирована динамическая задача упруговязкопластического деформирования гибких цилиндрических замкнутых круговых оболочек с традиционными перекрестными структурами армирования по эквидистантным поверхностям и с пространственными структурами. Неупругое поведение материалов композиции описывается определяющими соотношениями теории течения с изотропным упрочнением при учете зависимости пластических свойств от скорости деформирования. Используемые двумерные кинематические и динамические уравнения, а также соответствующие им начально-краевые условия позволяют определять механическое поведение гибких цилиндрических композитных оболочек с точностью разных порядков. Эти соотношения позволяют моделировать возможное слабое сопротивление таких конструкций поперечным сдвигам. В простейшем варианте приведенные уравнения, граничные и начальные условия редуцируются в соотношения неклассической теории Амбарцумяна. Численное решение поставленной нелинейной начально-краевой задачи строится по явной схеме типа «крест». Проведен сравнительный анализ упругопластического и упруговязкопластического деформирования армированных цилиндрических оболочек, динамически нагруженных внутренним давлением. Исследовано поведение стеклопластиковых и металлокомпозитных конструкций разной относительной толщины. Показано, что учет зависимости пластических свойств материалов композиции от скорости их деформирования приводит к неадекватному описанию динамического неупругого поведения таких композитных оболочек. Продемонстрировано, что даже в случае относительно тонких армированных конструкций использование теории Амбарцумяна может приводить к существенному отличию от решения, полученному по уточненной теории. Это может привести к качественно неверным результатам при решении обратных задач (например, рационального армирования) с применением теории Амбарцумяна. Расчеты по уточненной теории показали, что замена традиционной перекрестной структуры армирования по эквидистантным поверхностям на пространственную структуру армирования в случае длинных цилиндрических оболочек разной относительной толщины не приводит к положительному результату. Положительный эффект от такой замены структур армирования наблюдается только для относительно толстых коротких стеклопластиковых конструкций.

Ключевые слова: круговая цилиндрическая оболочка; армирование волокнами; чувствительность к скорости деформирования; теория Амбарцумяна; уточненная теория изгиба; нагрузки взрывного типа; геометрическая нелинейность; явная численная схема

* Работа выполнена в рамках государственного задания (№ гос.регистрации 121030900260-6).

MODELING THE ELASTIC-VISCOPLASTIC DYNAMIC BEHAVIOR OF FLEXIBLE CYLINDRICAL REINFORCED SHELLS WITHIN THE FRAMEWORK OF A REFINED DEFORMATION THEORY

Yankovskii A.P.

Khrstianovich Institute of theoretical and applied mechanics the Siberian Branch of the Russian Academy of Science, Novosibirsk, Russia

ABSTRACT

A dynamic problem of elastic-viscoplastic deformation of flexible cylindrical closed circular shells is formulated. Traditional criss-cross reinforcement structures along equidistant surfaces and spatial structures are considered. The inelastic deformation of the materials of the composition is described by the constitutive relations of the theory of flow with isotropic hardening, taking into account the dependence of the plastic properties on the rate of deformation. The two-dimensional kinematic and dynamic equations used, as well as the corresponding initial-boundary conditions, make it possible to calculate the mechanical behavior of flexible cylindrical composite shells with an accuracy of different orders. These equations allow simulating the possible weak transverse shear resistance of such structures. In the simplest version, two-dimensional equations, boundary and initial conditions are reduced to equations of Ambartsumyan's non-classical theory. The numerical solution of the formulated nonlinear initial-boundary value problem is constructed according to an explicit "cross"-scheme. A comparative analysis of elastic-plastic and elastic-viscoplastic deformation of reinforced cylindrical shells dynamically loaded by internal pressure is carried out. The deformation of fiberglass and metal-composite constructions of different relative thicknesses has been investigated. It is shown that if the dependence of the plastic properties of the materials of the composition on the rate of their deformation is not taken into account, then this leads to an inadequate calculation of the dynamic inelastic deformation of such composite shells. It is shown that even in the case of relatively thin reinforced shells, the use of Ambartsumian's theory can lead to a significant difference from the solution obtained by the refined theory. This can lead to qualitatively incorrect results when solving inverse problems (for example, rational reinforcement) using Ambartsumyan's theory. Calculations based on the refined theory showed that replacing the traditional criss-cross structure of reinforcement along equidistant surfaces with a spatial structure of reinforcement in the case of long cylindrical shells of different relative thicknesses does not lead to a positive result. The positive effect of such a replacement of reinforcement structures is observed only for relatively thick short fiberglass shells.

Keywords: circular cylindrical shell; fiber reinforcement; sensitivity to strain rate; Ambartsumian's theory; refined bending theory; explosive loads; geometric nonlinearity; explicit numerical scheme

ВВЕДЕНИЕ

Цилиндрические оболочки из композиционных материалов (КМ) широко применяются в качестве тонкостенных силовых элементов различных изделий [1-10]. Современные КМ-конструкции часто подвергаются воздействию высокоинтенсивных динамических нагрузок [5,8,10-12], при которых материалы компонентов композиции могут деформироваться неупруго. Поэтому актуальна проблема математического моделирования механического поведения цилиндрических армированных оболочек при действии на них кратковременного интенсивного нагружения взрывного типа. При этом степень адекватности

используемой механической модели, описывающей неупругое деформирование КМ-оболочек, определяется количеством учитываемых моделью экспериментально наблюдаемых фактов и порядком точности используемой теории расчета изгибного поведения таких конструкций.

Несмотря на актуальность указанной проблемы ее теоретические разработки пока остаются немногочисленными [5,13-15]. Как правило, исследуется лишь линейно-упругое деформирование КМ-конструкций [1,4-10]. В работе [5] рассчитывалось упругопластическое динамическое поведение слоистых оболочек из изотропных материалов; в [16] численно исследовалось аналогичное механическое поведение цилиндрических армированных оболочек, а в [17] – вязкоупругопластическое деформирование таких конструкций. В последнем случае удалось рассчитать остаточные состояния КМ-оболочек после их динамического неупругого деформирования. Однако в [5,16,17] не учитывался известный из экспериментов факт зависимости пластических свойств материалов от скорости их деформирования. Согласно терминологии, предложенной в [18], такое неупругое поведение материала будем называть упруговязкопластическим. В работе [19] была разработана структурная модель армированной среды, механическое поведение компонентов композиции которой описывается определяющими уравнениями упруговязкопластической теории. До настоящего времени такое неупругое динамическое деформирование армированных цилиндрических оболочек теоретически не рассматривалось.

Для учета возможного слабого сопротивления армированных пластин и оболочек и расчета волновых процессов, возникающих в них при динамических нагрузках, обычно используют простейшие неклассические теории Рейсснера [1,5,8,9], Амбарцумяна [17,19,20] или Редди–Немировского [4,6,7], реже используются теории деформирования более высоких порядков [5,16,21,22], которые базируются, как правило, на гипотезе ломаной линии [5,21]. Сравнение результатов расчетов, выполненных в [19,22], показывает, что для адекватного описания динамического упруговязкопластического поведения армированных пластин необходимо использовать уточненную теорию их изгиба. До настоящего времени открытым остается вопрос: следует ли использовать уточненную теорию деформирования и при изучении динамического неупругого поведения КМ-оболочек при учете зависимости пластических свойств компонентов композиции от скорости их деформирования?

Численное интегрирование нелинейных начально-краевых задач динамики тонкостенных КМ-конструкций осуществляют с использованием явной схемы типа «крест» [5,16,17,19,22] или неявных схем из семейства методов Ньюмарка [11,23].

Настоящая работа посвящена моделированию упруговязкопластического динамического поведения гибких армированных цилиндрических оболочек в рамках уточненной теории их изгибного деформирования. Численное решение соответствующей начально-краевой задачи строится с использованием явной схемы типа «крест».

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается тонкая замкнутая цилиндрическая оболочка длиной L , радиуса R и толщиной $2h \ll \min(L, R)$ (рис.1); с ней связаны цилиндрические координаты: x_1 – в осевом ($0 \leq x_1 \leq L$), x_2 – в окружном ($0 \leq x_2 < 2\pi$), x_3 –

в радиальном ($R - h \leq x_3 \leq R + h$) направлениях (см. рис.1а). Оболочка усилена перекрестно K семействами волокон с плотностями армирования ω_k ($1 \leq k \leq K$). Структура армирования по толщине конструкции квазиоднородна. Оболочка армирована либо традиционно по эквидистантным поверхностям (см. рис.1б), либо, для устранения такого негативного явления как ее плохое сопротивление поперечным сдвигам, пространственно [12]. На рис.2а изображена традиционная ортогональная структура армирования представительного элемента композиции в двух ($K = 2$) направлениях [12,24], а на рис.2б – пространственная структура с укладкой волокон в четырех ($K = 4$) направлениях [12].

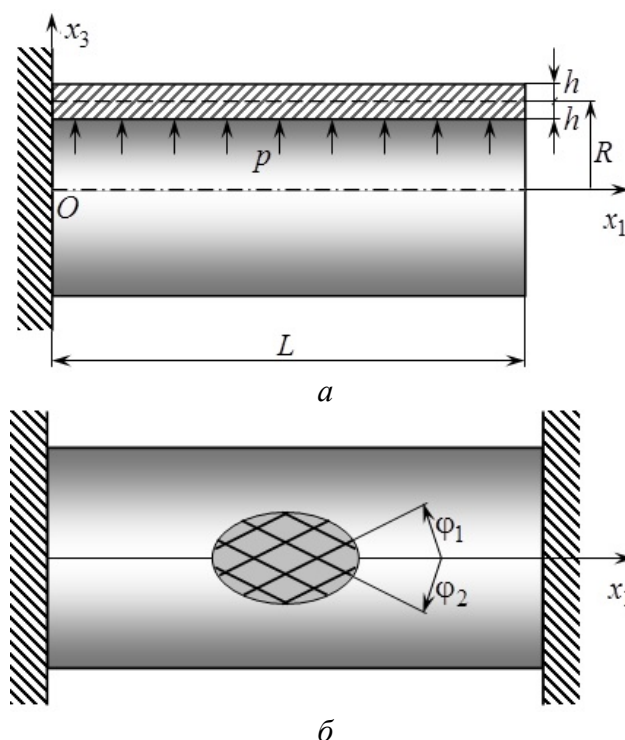


Рис.1. Цилиндрические армированные оболочки: а – жесткое закрепление левой кромки; б – жесткое закрепление обеих кромок.

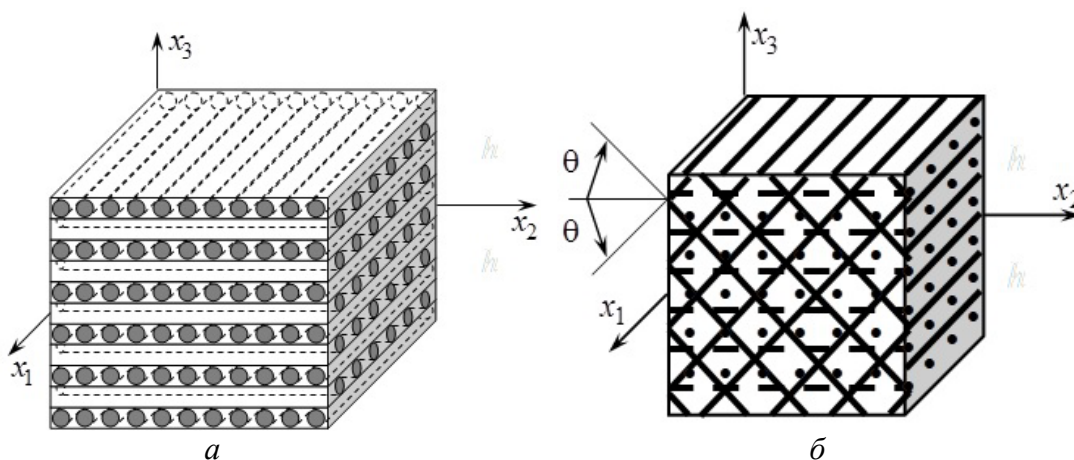


Рис.2. Представительный элемент композиции оболочки: а – с перекрестным армированием по эквидистантным поверхностям; б – с пространственным армированием в четырех направлениях.

С каждым k -м семейством арматуры свяжем локальную ортогональную систему координат $x_i^{(k)}$ так, чтобы ось $x_1^{(k)}$ совпадала с направлением армирования, а ее ориентацию в пространстве определим углами сферической системы координат θ_k и φ_k (рис.3). Направляющие косинусы $l_{ij}^{(k)}$ осей $x_i^{(k)}$ в глобальной системе координат x_j ($i, j = \overline{1, 3}, 1 \leq k \leq K$) определяются соотношениями (2.12) из [19].

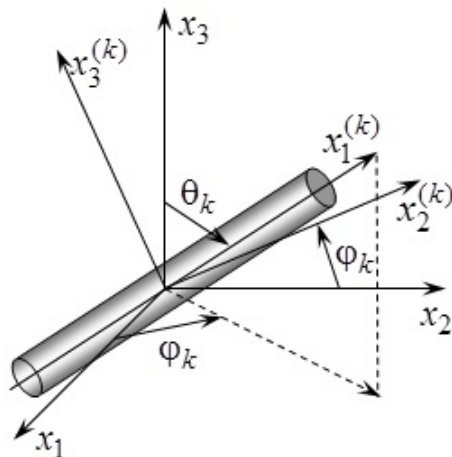


Рис.3. Локальная система координат, связанная с волокнами k -го семейства.

По тем же причинам, что и в [16,19], предполагаем: касательными внешними нагрузками на лицевых поверхностях оболочки можно пренебречь; структуры пространственного армирования должны обладать таким свойством: если есть некоторое наклонное k -ое семейство волокон ($0 < \theta_k < \pi/2$), то обязательно должно быть и некоторое наклонное l -ое семейство волокон, изготовленное из того же материала и характеризующееся следующими параметрами армирования: $\theta_l = \pi - \theta_k$, $\varphi_l = \varphi_k$, $\omega_l = \omega_k$, $1 \leq k, l \leq K$, $l \neq k$ (рис.3). Пространственные структуры армирования с таким свойством часто встречаются в инженерной практике [12]. К ним, в частности, относится ортогональная структура армирования в трех направлениях, а также более сложные структуры, аналогичные той, что изображена на рис.2б. Согласно [16] при выполнении указанных предположений деформации композиции ε_{ij} и перемещения точек цилиндрической КМ-оболочки U_i при учете изменения метрики по ее толщине в рамках уточненной теории изгиба аппроксимируем соотношениями (геометрическую нелинейность задачи учитываем в приближении Кармана)

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11}(t, \mathbf{r}) &= \partial_1 u_1 - z \partial_1^2 w + \sum_{m=0}^M f_1^{(m)}(z) \partial_1 \varepsilon_{13}^{(m)} + \frac{1}{2} (\partial_1 w)^2, \\
 \varepsilon_{22}(t, \mathbf{r}) &= \frac{1}{R+z} \left[\frac{R+z}{R} \partial_2 u_2 + \partial_2^2 w + w + \sum_{m=0}^M f_2^{(m)}(z) \partial_2 \varepsilon_{23}^{(m)} \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_2 w}{R+z} \right)^2, \\
 2\varepsilon_{12}(t, \mathbf{r}) &= \frac{1}{R+z} \left[\partial_2 u_1 - z \partial_1 \partial_2 w + \sum_{m=0}^M f_1^{(m)}(z) \partial_2 \varepsilon_{13}^{(m)} \right] + \frac{R+z}{R} \partial_1 u_2 + \\
 &\quad + \partial_1 \partial_2 w + \sum_{m=0}^M f_2^{(m)}(z) \partial_1 \varepsilon_{23}^{(m)} + \frac{1}{R+z} \partial_1 w \partial_2 w, \\
 \varepsilon_{i3}(t, \mathbf{r}) &= \frac{h^2 - z^2}{h^2} \sum_{m=0}^M \left(\frac{z}{h} \right)^m \varepsilon_{i3}^{(m)}(t, \mathbf{x}), \quad x_3 \equiv R+z, \quad i=1, 2; \\
 U_1(t, \mathbf{r}) &= u_1(t, \mathbf{x}) - z \partial_1 w + \sum_{m=0}^M f_1^{(m)}(z) \varepsilon_{13}^{(m)}(t, \mathbf{x}), \\
 U_2(t, \mathbf{r}) &= \frac{R+z}{R} u_2(t, \mathbf{x}) + \partial_2 w + \sum_{m=0}^M f_2^{(m)}(z) \varepsilon_{23}^{(m)}(t, \mathbf{x}), \\
 U_3(t, \mathbf{r}) &= w(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = \{x_1, x_2\}, \quad \mathbf{r} = \{x_1, x_2, x_3\}, \\
 \mathbf{x} \in G, \quad |z| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad G &= \{\mathbf{x}: 0 \leq x_1 \leq L, 0 \leq x_2 < 2\pi\},
 \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$\begin{aligned}
 f_i^{(m)}(z) &\equiv 2 \left[\Phi_i^{(m)}(z) - \Phi_i^{(m+2)}(z) \right] \quad (i=1, 2), \quad \Phi_1^{(m)}(z) \equiv \frac{z^{m+1}}{h^m(1+m)}, \\
 \Phi_2^{(m)}(z) &\equiv \frac{R+z}{h^m} \Psi_m(z), \quad \Psi_m(z) \equiv \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(-1)^l R^l z^{m-l}}{m-l} - R^m \ln(R+z);
 \end{aligned} \tag{3}$$

\mathbf{r} – вектор места; \mathbf{x} – то же для точек срединной поверхности ($z=0$); t_0 – начальный момент времени t ; z – введенная для удобства новая радиальная координата, отсчитываемая от срединной поверхности; w – прогиб точек этой поверхности; u_1, u_2 – перемещения точек срединной поверхности в осевом и окружном направлениях; M – целое число, которое задает количество слагаемых в степенных разложениях деформаций поперечных сдвигов $\varepsilon_{i3}^{(m)}$; G – область, занимаемая срединной поверхностью в координатах x_1 и x_2 ; ∂_i – оператор дифференцирования по переменной x_i ($i=1, 2$). При $M=0$ из (1)-(3) вытекают кинематические соотношения, соответствующие неклассическим теориям Амбарцумяна [20] и Редди–Немировского [4,6,7]. В равенствах (1) и (2) неизвестны функции w, u_i и $\varepsilon_{i3}^{(m)}$ ($i=1, 2, 0 \leq m \leq M$), зависящие от времени t и двух координат x_1 и x_2 .

В настоящем исследовании армированная оболочка рассматривается как гибкая тонкостенная механическая система, поэтому нормальные напряжения $\sigma_{33}(t, \mathbf{r})$ с приемлемой для инженерных приложений точностью можно аппроксимировать так [1]

$$\sigma_{33}(t, \mathbf{r}) = \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) - \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2h} z + \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) + \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2}, \quad (4)$$

$$\mathbf{x} \in G, \quad |z| \leq h, \quad t \geq t_0,$$

где $\sigma_{33}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) \equiv \sigma_{33}(t, \mathbf{x}, \pm h)$ – напряжения на внешней (+) и внутренней (–) лицевых поверхностях оболочки, которые известны из граничных условий.

Уравнения движения гибкой цилиндрической оболочки в рамках уточненной теории изгиба при учете выражения (4) имеют вид [16]

$$\begin{aligned} \rho \ddot{u}_1^{(l)} &= \partial_1 \left(M_{11}^{(l)} - M_{13}^{(l)} \partial_1 w \right) + \partial_2 \left(\bar{M}_{12}^{(l)} - \bar{M}_{23}^{(l)} \partial_1 w \right) - l M_{13}^{(l-1)} + l M_{33}^{(l-1)} \partial_1 w - \\ &\quad - h^l \left[\sigma_{33}^{(+)} - (-1)^l \sigma_{33}^{(-)} \right] \partial_1 w, \\ \rho \ddot{u}_2^{(l)} &= \partial_1 \left(M_{21}^{(l)} - \bar{M}_{13}^{(l)} \partial_2 w \right) + \partial_2 \left(\bar{M}_{22}^{(l)} - \bar{M}_{23}^{(l)} \partial_2 w \right) - l M_{23}^{(l-1)} + l \bar{M}_{33}^{(l-1)} \partial_2 w - \\ &\quad - h^l \left[(R+h)^{-1} \sigma_{33}^{(+)} - (-1)^l (R-h)^{-1} \sigma_{33}^{(-)} \right] \partial_2 w + \bar{M}_{23}^{(l)}, \\ 2h\rho \ddot{w} &= \partial_1 \left(M_{13}^{(0)} + M_{11}^{(0)} \partial_1 w + \bar{M}_{12}^{(0)} \partial_2 w \right) + \partial_2 \left(\bar{M}_{23}^{(0)} + \bar{M}_{21}^{(0)} \partial_1 w + \bar{M}_{22}^{(0)} \partial_2 w \right) - \\ &\quad - \bar{M}_{22}^{(0)} + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}, \quad \mathbf{x} \in G, \quad t \geq t_0, \quad 0 \leq l \leq M+1, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} M_{ij}^{(l)}(t, \mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h \sigma_{ij}(t, \mathbf{r}) z^l dz, \quad \bar{M}_{ij}^{(l)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h \frac{\sigma_{ij}(t, \mathbf{r})}{R+z} z^l dz, \\ \bar{\bar{M}}_{ij}^{(l)}(t, \mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h \frac{\sigma_{ij}(t, \mathbf{r})}{(R+z)^2} z^l dz, \quad u_s^{(l)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h U_s(t, \mathbf{r}) z^l dz, \\ \rho &= \rho_0 \omega_0 + \sum_{k=1}^K \rho_k \omega_k, \quad \omega_0 = 1 - \sum_{k=1}^K \omega_k, \\ l M_{33}^{(l-1)}(t, \mathbf{x}) &= l \int_{-h}^h \sigma_{33}(t, \mathbf{r}) z^{l-1} dz = \frac{h^l}{2} \left[\left(\sigma_{33}^{(+)} + \sigma_{33}^{(-)} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(1 - (-1)^l \right) + \frac{l}{l+1} \left(\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)} \right) \left(1 + (-1)^l \right) \right], \\ l \bar{M}_{33}^{(l-1)}(t, \mathbf{x}) &= l \int_{-h}^h \frac{\sigma_{33}(t, \mathbf{r})}{R+z} z^{l-1} dz = \frac{l}{2h} \left(\sigma_{33}^{(+)} + \sigma_{33}^{(-)} \right) \left(\Psi_l(h) - \Psi_l(-h) \right) + \\ &\quad + \frac{l}{2} \left(\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)} \right) \left(\Psi_{l-1}(h) - \Psi_{l-1}(-h) \right), \end{aligned} \quad (6)$$

$$i, j = \overline{1, 3}, \quad s = 1, 2, \quad 0 \leq l \leq M+1;$$

ρ_0, ρ_k – объемная плотность материала связующего и арматуры k -го семейства; σ_{ij} – усредненные напряжения в композиции; $M_{ij}^{(l)}, \bar{M}_{ij}^{(l)}, \bar{\bar{M}}_{ij}^{(l)}$ – обобщенные силовые факторы; $u_s^{(l)}$ – обобщенные кинематические переменные; функции $\Psi_l(z)$ определены в (3); точка – дифференцирование по времени. Объемные внешние нагрузки в соотношениях (5) не учитываются.

Материалы композиции предполагаются изотропными; их упруговязкопластическое поведение описывается численно-аналитической

моделью, разработанной в [19]. В текущий дискретный момент времени t определяющие соотношения для КМ в рамках структурной модели механики композитов из [19] можно записать в матричной форме

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{V}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{p}, \quad (7)$$

где

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv (\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{23} \ \sigma_{31} \ \sigma_{12})^T, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \equiv (\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ 2\varepsilon_{23} \ 2\varepsilon_{31} \ 2\varepsilon_{12})^T; \quad (8)$$

$\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – векторы-столбцы усредненных напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} в композиции; 6×6 -матрица \mathbf{V} и шестикомпонентный вектор-столбец \mathbf{p} вычисляются по формулам (2.17) в [19], значения их элементов определяются механическими характеристиками материалов композиции, текущим упруговязкопластическим состоянием и параметрами структуры (углами θ_k , φ_k и плотностями ω_k ($1 \leq k \leq K$) армирования); индекс T – операция транспонирования. Если зависимость пластических свойств материалов компонентов композиции от скорости их деформирования не учитывается, то вектор $\mathbf{p} \equiv \mathbf{0}$ и соотношение (7) редуцируется в матричное определяющее уравнение для упругопластического КМ, компоненты которого подчиняются теории пластического течения Прандтля – Рейсса – Хилла [5,18]. При учете же вязкопластических свойств материалов композиции вектор \mathbf{p} содержит в себе информацию о механическом состоянии КМ в предшествующий дискретный момент времени, т.е. информацию о предыстории нагружения элемента КМ.

После линеаризации по методу переменных параметров упругости [25] матричное соотношение (7) представляет собой систему шести линейных алгебраических уравнений. Учитывая обозначения (8), из третьего уравнения этой системы получаем

$$\dot{\varepsilon}_{33} = b_{33}^{-1} (\dot{\sigma}_{33} - p_3 - b_{31}\dot{\varepsilon}_{11} - b_{32}\dot{\varepsilon}_{22} - 2b_{34}\dot{\varepsilon}_{23} - 2b_{35}\dot{\varepsilon}_{31} - 2b_{36}\dot{\varepsilon}_{12}), \quad (9)$$

где b_{3i} ($i = \overline{1, 6}$) и p_3 – компоненты матрицы \mathbf{V} и вектора \mathbf{p} в уравнении (7); скорость $\dot{\varepsilon}_{33}$ определяется путем дифференцирования по t выражения (4). Производные $\dot{\varepsilon}_{ij}$ в правой части равенства (9) вычисляются дифференцированием по времени соотношений (1).

Для однозначного интегрирования исследуемой задачи нелинейной динамики цилиндрических КМ-оболочек следует задать начальные и граничные условия (см. формулы (12)-(16) в [16]).

2. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА

Численное решение рассматриваемой начально-краевой задачи будем строить с использованием алгоритма шагов по времени [5,11,16,17,19,22,23,25], поэтому значения искомых функций будем определять в дискретные моменты времени $t_{n+1} = t_n + \tau$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), где $\tau = \text{const} > 0$ – шаг по времени. Предполагаем, что в моменты времени t_m уже рассчитаны значения следующих величин [16,19,22]

$$\begin{aligned}
w(\mathbf{x}) &\equiv w(t_m, \mathbf{x}), \quad u_s^{(l)}(\mathbf{x}) \equiv u_s^{(l)}(t_m, \mathbf{x}), \quad \sigma_{33}^{(\pm)}(\mathbf{x}) \equiv \sigma_{33}^{(\pm)}(t_m, \mathbf{x}), \\
\dot{\sigma}_{33}^{(\pm)}(\mathbf{x}) &\equiv \dot{\sigma}_{33}^{(\pm)}(t_m, \mathbf{x}), \quad \sigma_{ij}^m(\mathbf{r}) \equiv \sigma_{ij}^m(t_m, \mathbf{r}), \quad \sigma_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) \equiv \sigma_{ij}^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), \\
\varepsilon_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) &\equiv \varepsilon_{ij}^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) \equiv \dot{\varepsilon}_{ij}^{(k)}(t_{n-1}, \mathbf{r}), \quad \ddot{\varepsilon}_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) \equiv \ddot{\varepsilon}_{ij}^{(k)}(t_{n-1}, \mathbf{r}), \\
\chi^{(k)}(\mathbf{r}) &\equiv \chi^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), \quad s=1, 2, \quad i, j=\overline{1, 3}, \quad m=n-1, n, \\
0 \leq l \leq M+1, \quad 0 \leq k \leq K, \quad \mathbf{x} \in G, \quad |z| \leq h,
\end{aligned} \tag{10}$$

где $\sigma_{ij}^{(k)}$, $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ – тензоры напряжений и деформаций в k -м компоненте композиции ($k=0$ – связующая матрица, $k \geq 1$ – волокна k -го семейства); $\chi^{(k)}$ – параметр Одквиста (параметр упрочнения) того же материала.

Все производные по t (исключая случаи, оговоренные формулами (2.8), (2.9) из [19]) аппроксимируем центральными конечными разностями на трехточечном шаблоне по времени $\{t_{n-1}, t_n, t_{n+1}\}$ [5,16,17,19,22]. Это позволяет построить явную схему типа «крест». После замены в уравнениях движения (5) вторых производных по t от обобщенных кинематических переменных и прогиба их конечно-разностными аналогами с учетом выражений (2) и обозначений типа (10) будем иметь

$$\begin{aligned}
\frac{2h\rho}{\tau^2} \left(w^{n+1} - 2w^n + w^{n-1} \right) &= \partial_1 \left(M_{13}^{(0)} + M_{11}^{(0)} \partial_1 w + \bar{M}_{12}^{(0)} \partial_2 w \right) + \\
&+ \partial_2 \left(\bar{M}_{23}^{(0)} + \bar{M}_{21}^{(0)} \partial_1 w + \bar{M}_{22}^{(0)} \partial_2 w \right) - \bar{M}_{22}^{(0)} + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}, \\
\frac{\rho}{\tau^2} \left(u_1^{(l)n+1} - 2u_1^{(l)n} + u_1^{(l)n-1} \right) &= \partial_1 \left(M_{11}^{(l)} - M_{13}^{(l)} \partial_1 w \right) + \partial_2 \left(\bar{M}_{12}^{(l)} - \bar{M}_{23}^{(l)} \partial_1 w \right) - \\
&- l M_{13}^{(l-1)} + l M_{33}^{(l-1)} \partial_1 w - h^l \left[\sigma_{33}^{(+)} - (-1)^l \sigma_{33}^{(-)} \right] \partial_1 w, \\
\frac{\rho}{\tau^2} \left(u_2^{(l)n+1} - 2u_2^{(l)n} + u_2^{(l)n-1} \right) &= \partial_1 \left(M_{21}^{(l)} - \bar{M}_{13}^{(l)} \partial_2 w \right) + \partial_2 \left(\bar{M}_{22}^{(l)} - \bar{M}_{23}^{(l)} \partial_2 w \right) - \\
&- l M_{23}^{(l-1)} + l \bar{M}_{33}^{(l-1)} \partial_2 w - h^l \left[(R+h)^{-1} \sigma_{33}^{(+)} - (-1)^l (R-h)^{-1} \sigma_{33}^{(-)} \right] \partial_2 w + \\
&+ \bar{M}_{23}^{(l)}, \quad 0 \leq l \leq M+1, \quad \mathbf{x} \in G, \quad n=1, 2, 3, \dots
\end{aligned} \tag{11}$$

Используя выражения (6) с учетом предположений (10) в текущий момент времени t_n можем определить все силовые факторы и внешние поверхностные нагрузки $\sigma_{33}^{(\pm)}$, входящие в правые части равенств (11). Добавив к соотношениям (11) требуемые граничные условия (см. (12)-(14) в [16]), по явной схеме вычисляем значения функций w и $u_i^{(l)}$ ($0 \leq l \leq M+1$) в следующий момент времени t_{n+1} , после чего по формуле (17) из [16] получаем u_i^{n+1} и $\varepsilon_{i3}^{(m)}$ ($0 \leq m \leq M$)

и, используя соотношения (1), определяем усредненные деформации композиции ε_{ij}^{n+1} ($i=1, 2, j=\overline{1, 3}$). Далее численное решение исследуемой задачи с учетом выражений (4) и (9) строится совершенно так же, как и в [16,19,22].

Для начала расчетов по уравнениям (11) ($n=1$) требуется знание значений функций w^0 и $u_i^{(l)0}$, которые известны из начальных условий (см. (15), (16) в [16]), а также функций w^1 и $u_i^{(l)1}$ ($i=1, 2, 0 \leq l \leq M+1$), которые с точностью порядка τ^2 можно заранее вычислить по формуле Тейлора [26], используя при этом начальные условия и уравнения движения в момент времени $t=t_0=0$ (см. (9) в [16]). Необходимые условия устойчивости разработанной численной схемы типа «крест» получаются из критерия Куранта и приведены в [5,19].

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТОВ

Рассмотрим динамическое упругопластическое и упруговязкопластическое поведение замкнутых длинных круговых цилиндрических оболочек длиной $L=4$ м, радиуса $R=1$ м и разной толщины, которые жестко закреплены на обеих торцевых поверхностях $x=0, L$ (см. рис.1б и граничные условия (13), (14) в [16] при $U_{*3} \equiv 0$ и $u_{*i}^{(l)} \equiv 0, i=1, 2, 0 \leq l=M+1$) и до момента времени $t=t_0=0$ покоятся (см. начальные условия (15), (16) в [16] при $U_{0i} \equiv 0$ и $V_{0i} \equiv 0, i=\overline{1, 3}$). Оболочки нагружаются изнутри давлением $p(t)$, соответствующим воздушной взрывной волне [23]

$$\sigma_{33}^{(+)} \equiv 0, \quad -\sigma_{33}^{(-)} \equiv p(t) = \begin{cases} p_{\max} t/t_{\max}, & 0 \leq t \leq t_{\max}, \\ p_{\max} \exp[-\alpha(t-t_{\max})], & t > t_{\max}, \end{cases} \quad (12)$$

$$\alpha = -\ln(0,01)/(t_{\min} - t_{\max}) > 0, \quad t_{\min} \gg t_{\max}, \quad p(t_{\min}) = 0,01 p_{\max},$$

где смысл параметров нагружения p_{\max} , t_{\max} и t_{\min} очевиден и подробно описан в [16]. Исходя из экспериментальных данных [23], для проведения расчетов примем $t_{\max} = 0,1$ мс и $t_{\min} = 2$ мс.

Конструкции изготовлены из магниевых сплавов ВМ65 [27] и армированы стальной проволокой марки У8А [24] (металлокомпозит) или из эпоксисвязующего [28] и усилены стекловолокнами [24] (стеклопластик). Упруговязкопластическое поведение компонентов композиции при постоянной скорости деформации $\dot{\varepsilon}$ характеризуется диаграммой растяжения–сжатия с линейным упрочнением

$$\sigma = \begin{cases} E^{(k)} \varepsilon, & |\varepsilon| \leq \varepsilon_s^{(k)} = \sigma_s^{(k)} / E^{(k)}, \\ \text{sign}(\varepsilon) \sigma_s^{(k)} + E_s^{(k)} (\varepsilon - \text{sign}(\varepsilon) \varepsilon_s^{(k)}), & |\varepsilon| > \varepsilon_s^{(k)}, \quad 0 \leq k \leq K, \end{cases}$$

где σ, ε – осевое напряжение и соответствующая деформация; $E^{(k)}$, $E_s^{(k)} = E_s^{(k)}(\dot{\varepsilon})$ – модули упругости и упрочнения k -го материала композиции; $\sigma_s^{(k)} = \sigma_s^{(k)}(\dot{\varepsilon})$ – условный предел текучести того же компонента. Физико-механические характеристики материалов рассматриваемых композиций

приведены в таблице, где ν – коэффициент Пуассона. (Аппроксимации зависимостей $\sigma_s^{(k)}(\dot{\epsilon})$, $E_s^{(k)}(\dot{\epsilon})$ по табличным данным описаны в [19].)

Физико-механические характеристики компонентов композиций [24,27,28].

| Материал | $\dot{\epsilon}$, с ⁻¹ | ρ , кг / м ³ | E , ГПа | ν | σ_s , МПа | E_s , ГПа |
|---------------------------|------------------------------------|------------------------------|-----------|-------|------------------|-------------|
| Эпоксидная смола | $5 \cdot 10^{-4}$ | 1210 | 2,8 | 0,33 | 20 | 1,114 |
| | 104,0 | | | | 22 | 1,238 |
| Стекланные волокна | $5 \cdot 10^{-4}$ | 2520 | 86,8 | 0,25 | 4500 | 6,230 |
| | 104,0 | | | | 4600 | 6,314 |
| Магниевый сплав ВМ65 (Mg) | $5 \cdot 10^{-4}$ | 1800 | 43,0 | 0,33 | 267 | 0,379 |
| | 0,417 | | | | 306 | 0,589 |
| | 104,0 | | | | 385 | 1,010 |
| Стальная проволока У8А | $5 \cdot 10^{-4}$ | 7800 | 210,0 | 0,31 | 3968 | 6,973 |
| | 104,0 | | | | 4100 | 7,035 |

Анализируется поведение оболочек с двумя типами однородных ($\omega_k = \text{const}$, $\theta_k = \text{const}$ и $\varphi_k = \text{const}$) структур армирования: 1. Ортогональная укладка волокон по двум ($K = 2$) направлениям (см. рис.2а), когда первое семейство арматуры уложено в осевом направлении x_1 с интенсивностью $\omega_1 = 0,1$, а второе семейство – в окружном направлении x_2 с плотностью армирования $\omega_2 = 0,3$; 2. Пространственная ориентация волокон в четырех ($K = 4$) направлениях (см. рис.2б), причем первое и второе семейства также уложены в осевом x_1 и окружном x_2 направлениях, а третье и четвертое уложены наклонно и задаются углами (см. рис.3): $\theta_3 = \pi/4$, $\theta_4 = 3\pi/4$, $\varphi_3 = \varphi_4 = 0$ (на рис.2б $\theta = \pi/4$ и оси x_1 , x_2 следует поменять местами). Плотности армирования во второй структуре такие: $\omega_1 = 0,05$, $\omega_2 = 0,3$ и $\omega_3 = \omega_4 = 0,025$. Общий расход волокон в обеих структурах одинаков.

Рассматриваются относительно толстые (с толщиной $2h = 10$ см, $2h/R = 1/10$) и относительно тонкие ($2h = 2$ см, $2h/R = 1/50$) КМ-оболочки. Форма конструкций, их нагружение, закрепление и структура армирования осесимметричны, следовательно, решения соответствующих начально-краевых задач не зависят от координаты x_2 . В силу того что нагрузка (12) и толщина конструкций не зависят от осевой координаты x_1 , получаемые решения симметричны относительно центральных поперечных сечений цилиндрических оболочек $x_1 = L/2$, поэтому, например, $w(t, x) = w(t, -x)$, где $x = x_1 - L/2$, $|x| \leq L/2$ и $0 \leq x_1 \leq L$ и т.п.

На рис.4 изображены поперечные колебания точек центрального сечения ($w_0(t) \equiv w(t, x)$, $x = 0$) тонкой Mg–У8А-оболочки, полученные при $p_{\max} = 40$ МПа (см. (12)) по упруговязкопластической (рис.4а) и упругопластической (рис.4б) теориям в случае структуры армирования 1. На этом и последующих рисунках номера кривых совпадают с номерами структур армирования: кривые с номерами без штрихов соответствуют упруговязкопластическому расчету по уточненной

теории ($M = 7$); кривые, номера которых помечены одним штрихом, – упругопластическому расчету по этой же теории; кривые с номерами, помеченными двумя штрихами, – упруговязкопластическому расчету по теории Амбарцумяна ($M = 0$).

Сопоставление кривых I и I'' на рис.4а показывает, что для относительно тонких металлокомпозитных оболочек в случае учета чувствительности пластических свойств компонентов композиции от скорости их деформирования зависимости $w_0(t)$, полученные по теории Амбарцумяна и уточненной теории на рассматриваемом интервале времени ($0 \leq t \leq 100$ мс) визуально практически не различаются. Сравнение же кривых I и I' на рис.4 свидетельствует о том, что для таких КМ-оболочек поведение зависимостей $w_0(t)$, рассчитанных по упруговязкопластической (рис.4а) и упругопластической (рис.4б) теориям, существенно различно.

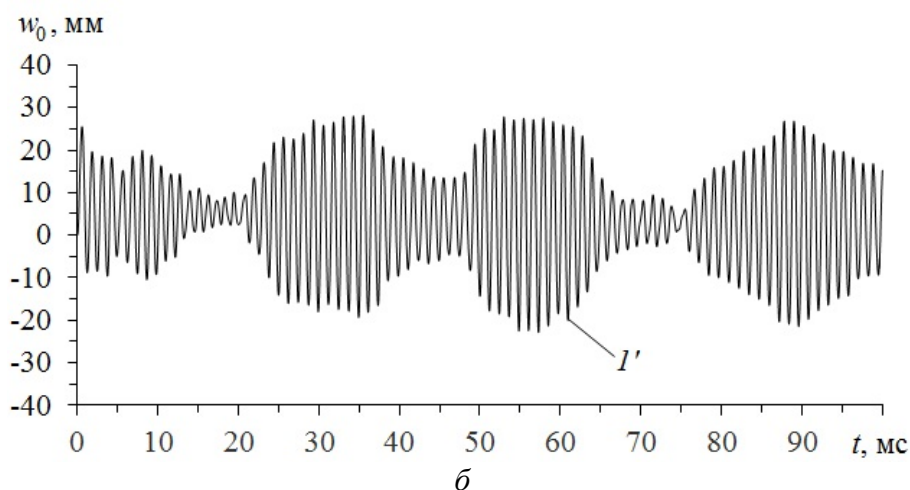
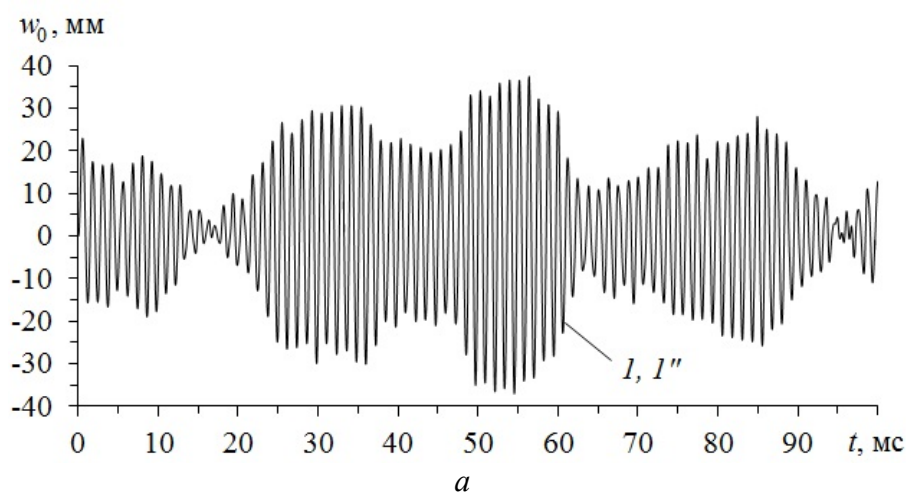


Рис.4. Поперечные колебания точек центрального сечения тонкой длинной Mg–У8А-оболочки с 2D-структурой армирования: а – упруговязкопластический расчет; б – упругопластический расчет.

Для дополнительной демонстрации этого различия на рис.5 изображены эпюры прогибов оболочек из разных композиций, рассчитанные в момент

времени $t = 100$ мс. (На рис.5 приведены зависимости $w(x)$ только для правых половин цилиндрических оболочек). На рис.5а изображены кривые $w(x)$, полученные для рассмотренной выше тонкой Mg–У8А-конструкции (см. рис.4). Сравнение кривых I и I' на рис.5а демонстрирует, что к моменту времени $t = 100$ мс зависимость $w(x)$, рассчитанная по упругопластической теории (кривая I'), существенно отличается от зависимости $w(x)$, полученной по упруговязкопластической теории (кривая I). При этом наибольшее различие наблюдается не в точках центрального сечения ($x = 0$).

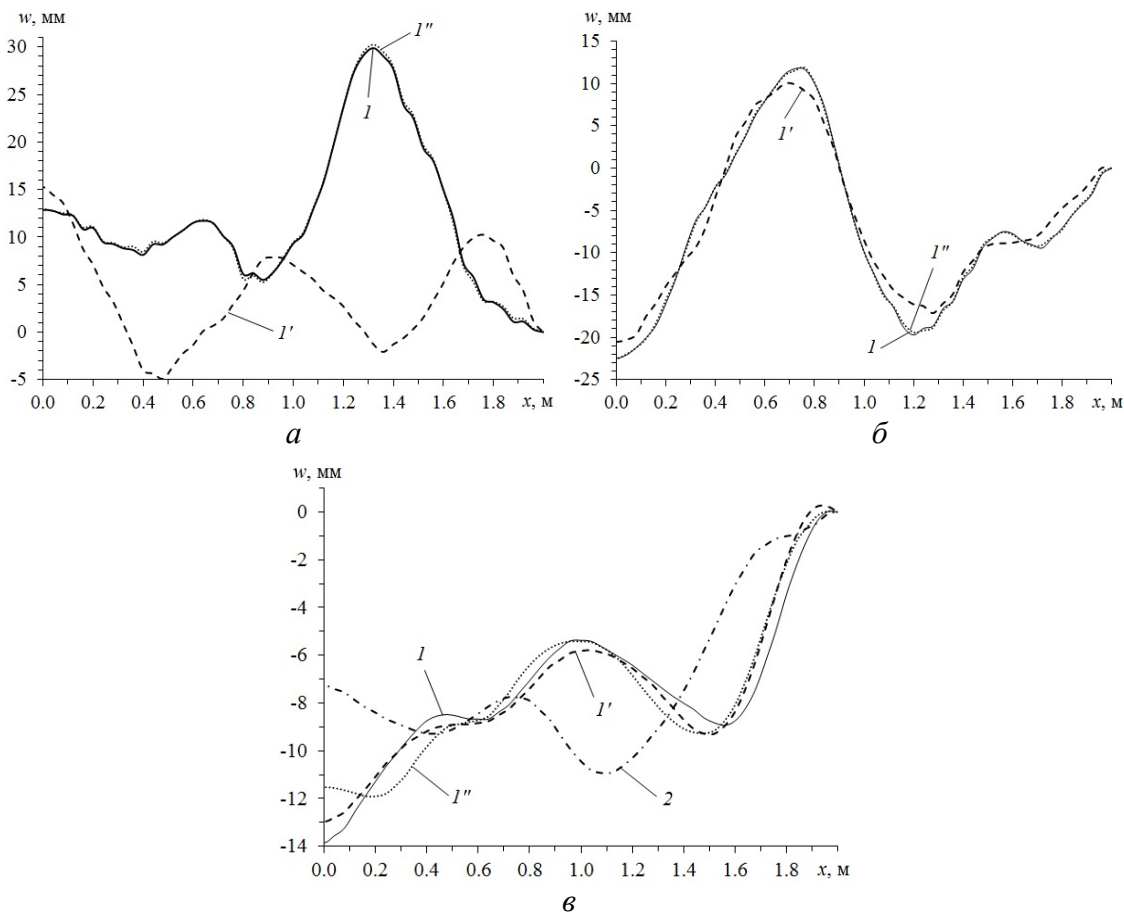
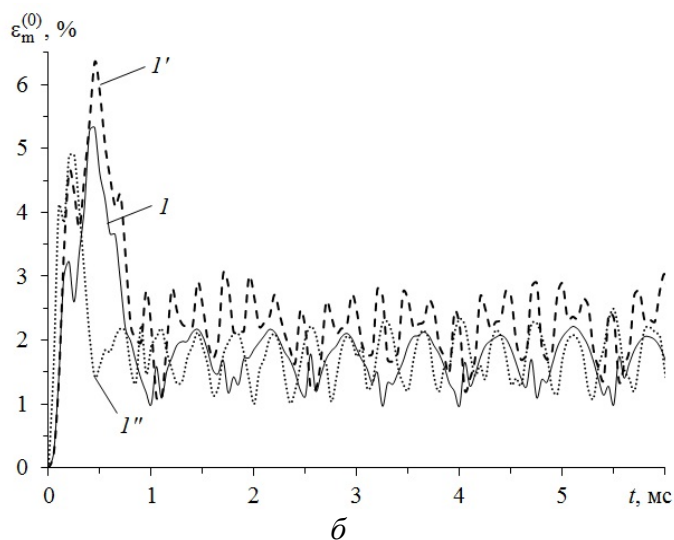
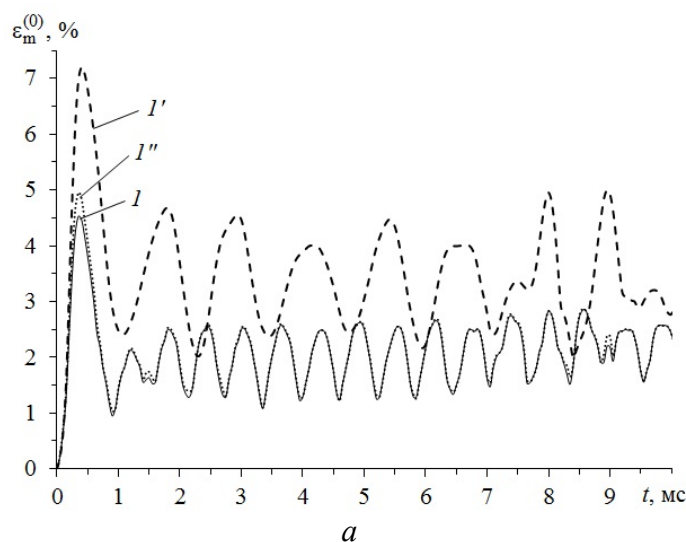


Рис.5. Эпюры прогибов точек длинных КМ-оболочек в момент времени $t = 100$ мс, рассчитанные по разным теориям: а – тонкая Mg–У8А-конструкция при $p_{\max} = 40$ МПа; б – тонкая стеклопластиковая оболочка при $p_{\max} = 10$ МПа; в – толстая стеклопластиковая конструкция при $p_{\max} = 40$ МПа.

Сопоставление кривых I и I'' на рис.5а показывает, что к моменту времени $t = 100$ мс начинает проявляться некоторое различие в прогибах тонкой Mg–У8А-оболочки, полученных по простейшей неклассической теории Амбарцумяна (кривая I'') и по уточненной теории (кривая I), причем это различие также наиболее заметно не в точках центрального поперечного сечения конструкции (не при $x = 0$).

На рис.6 изображены осцилляции максимальных значений интенсивности деформаций связующего $\varepsilon_*^{(0)}$ ($\varepsilon_m^{(0)}(t) = \max_{\mathbf{r}} \varepsilon_*^{(0)}(t, \mathbf{r})$, $0 \leq x_1 \leq L$, $|z| \leq h$) в исследуемых КМ-конструкциях. Кривые на рис.6а получены для обсуждаемой тонкой Mg-У8А-оболочки с 2D-структурой армирования. Поведение кривых I и I' на этом рисунке свидетельствует о том, что упругопластический расчет (кривая I') существенно завышает интенсивности деформаций магниевого связующего металлокомпозитной конструкции по сравнению с расчетом, проведенным по упруговязкопластической теории (кривая I). Так, значения $\varepsilon_m^{(0)}$, соответствующие глобальным максимумам на кривых I и I' , различаются на 59,2%. Сравнение же аналогичных максимумов на кривых I и I'' показывает, что расчет по теории Амбарцумяна завышает значение $\varepsilon_{\max}^{(0)} = \max_t \varepsilon_m^{(0)}(t)$ на 9,5 % по сравнению с расчетом по уточненной теории.



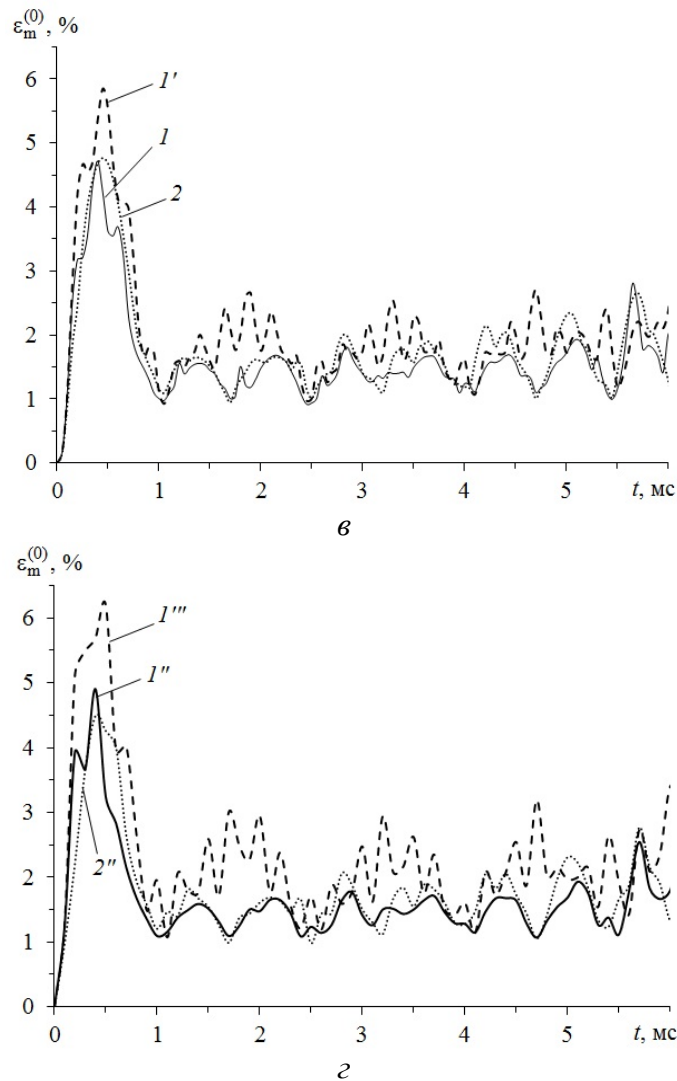


Рис.6. Осцилляции наибольших значений интенсивности деформаций связующего в длинных КМ-оболочках, рассчитанные по разным теориям: *а* – тонкая Mg–У8А-конструкция при $p_{\max} = 40$ МПа; *б* – тонкая стеклопластиковая оболочка при $p_{\max} = 10$ МПа; *в* – толстые стеклопластиковые конструкции при $p_{\max} = 40$ МПа (расчет по уточненной теории изгиба); *г* – то же, что и (*в*), но расчет выполнен по теории Амбарцумяна.

Дополнительные расчеты, выполненные для металлокомпозитных конструкций, позволяют сделать следующие выводы: 1) с увеличением относительной толщины Mg–У8А-оболочки разность значений $\varepsilon_{\max}^{(0)}$, полученных по упругопластической и упруговязкопластической теориям возрастает; 2) замена 2D-структуры армирования (см. рис.2*а*) на 4D-структуру (см. рис.2*б*) не приводит к положительному результату как для относительно тонких, так и относительно толстых металлокомпозитных конструкций. Последний результат справедлив как для длинных, так и коротких оболочек и объясняется тем, что в таких КМ-конструкциях степень анизотропии мала (для рассматриваемой Mg–У8А-композиции $E^{(1)}/E^{(0)} \approx 5$ [24,27]), поэтому «жесткое» металлическое связующее

удовлетворительно сопротивляется поперечным сдвигам металлокомпозитной оболочки с 2D-структурой армирования.

Выше анализировалось поведение цилиндрических Mg-U8A-оболочек, пластические свойства связующего (сплава ВМ65) которых сильно зависят от скорости деформирования, поэтому расчеты, выполненные для таких металлокомпозитных конструкций по упруговязкопластической и упругопластической теориям, существенно различаются (см. кривые I и I' на рис.4, 5a и 6a). Далее исследуем динамическое неупругое поведение стеклопластиковых оболочек, материалы композиции которых слабо чувствительны к изменению скорости деформирования по сравнению с магниевым сплавом ВМ65 (см. таблицу).

На рис.5б приведены эпюры прогибов $w(x)$, полученные для тонкой ($2h = 2$ см) стеклопластиковой оболочки с первой структурой армирования в момент времени $t = 100$ мс при $p_{\max} = 10$ МПа (см. (12)). Кривые I и I' на рис.5б существенно различаются, хотя и в значительно меньшей степени, чем на рис.5a. Сравнение же кривых I и I'' на рис.5б показывает, что при $t = 100$ мс начинает проявляться заметное различие прогибов, рассчитанных по теории Амбарцумяна (кривая I'') и по уточненной теории (кривая I), причем это различие имеет тот же порядок, что и на рис.5a (металлокомпозитная оболочка). При увеличении расчетного времени ($t > 100$ мс) указанные различия между кривыми I' , I'' и кривой I возрастают.

На рис.6б изображены зависимости $\varepsilon_m^{(0)}(t)$ для рассматриваемой тонкой стеклопластиковой оболочкой с 2D-структурой армирования. Сопоставление глобальных максимумов на кривых I и I' свидетельствует о том, что упруговязкопластический расчет завышает значение $\varepsilon_{\max}^{(0)}$ на 19,3% по сравнению с упруговязкопластическим расчетом. Сравнение же аналогичных максимумов на кривых I и I'' на рис.6б демонстрирует, что при упруговязкопластическом расчете использование теории Амбарцумяна (кривая I'') приводит к уменьшению величины $\varepsilon_{\max}^{(0)}$ по сравнению с уточненной теорией (кривая I) на 8,3%.

Дополнительные расчеты показали, в случае тонких длинных цилиндрических стеклопластиковых оболочек замена традиционной 2D-структуры армирования (рис.2a) на пространственную 4D-структуру (рис.2б) не приводит ни к уменьшению максимальных по модулю значений прогибов конструкции, ни к уменьшению наибольших значений интенсивности деформаций связующего материала, т.е. такая замена неэффективна.

Рассмотрим теперь поведение относительно толстых ($2h = 10$ см) стеклопластиковых конструкций при $p_{\max} = 40$ МПа. На рис.5в изображены зависимости $w(x)$, рассчитанные для этого случая. Сравнение кривых I и I' показывает, что для толстых длинных стеклопластиковых оболочек различие в прогибах, определенных в момент времени $t = 100$ мс по упругопластической и упруговязкопластической теориям, даже несколько меньше, чем в случае относительно тонких аналогичных КМ-конструкций (см. кривые I и I' на рис.5б). Однако сопоставление кривых I и I'' на рис.5в свидетельствует о том, что для толстой оболочки из стеклопластика прогибы, рассчитанные по теории

Амбарцумяна (кривая I''), существенно отличаются от зависимости $w(x)$, полученной по уточненной теории (кривая I) особенно в окрестности центрального сечения этой конструкции ($x = 0$).

На рис.6в,г приведены зависимости $\varepsilon_m^{(0)}(t)$, полученные для рассматриваемой толстой стеклопластиковой оболочки по уточненной теории (рис.6в) и по теории Амбарцумяна (рис.6г). Сравнение кривых I и I' на рис.6в и кривых I'' и I''' на рис.6г (кривая I''' соответствует упругопластическому расчету) демонстрирует, что в рамках обеих обсуждаемых теорий изгибного поведения КМ-оболочек упругопластический расчет (кривые I' и I''') приводит к завышению значения $\varepsilon_{\max}^{(0)}$ примерно на 25% по сравнению с упруговязкопластическим расчетом. Кроме того, по теории Амбарцумяна (рис.6г) значения $\varepsilon_{\max}^{(0)}$ получаются на 5,8% и 3,8% больше, чем по уточнённой теории при упругопластическом и упруговязкопластическом расчетах соответственно.

На рис.5в, 6в,г для сравнения приведены кривые 2 и $2''$, полученные по упруговязкопластическим расчетам относительно толстой стеклопластиковой оболочки с пространственной 4D-структурой армирования (см. рис.2б), выполненным по уточненной теории и теории Амбарцумяна. Сопоставление кривых 1 и 2 на рис.5в свидетельствует о том, что при замене структуры армирования 1 на структуру 2 происходит существенное изменение прогибов точек относительно толстой стеклопластиковой конструкции.

Сравнение значений $\varepsilon_{\max}^{(0)}$ на кривых $1''$ и $2''$ на рис.6г показывает, что согласно теории Амбарцумяна замена традиционной 2D-структуры армирования (рис.2а) на пространственную 4D-структуру в относительно толстой длинной цилиндрической оболочке позволяет уменьшить наибольшее значение интенсивности деформаций связующего на 8,2%. Однако сопоставление величин $\varepsilon_{\max}^{(0)}$ на кривых 1 и 2 на рис.6в свидетельствует о том, что согласно уточненной теории указанная замена структур армирования в таких КМ-конструкциях не является эффективной, так как не позволяет уменьшить наибольшее, достигаемое в процессе осцилляций, значение интенсивности деформаций эпоксисвязующего.

Таким образом, расчеты, выполненные по уточненной теории изгиба, показали, что в длинных цилиндрических оболочках как относительно тонких, так и относительно толстых замена традиционной перекрестной структуры армирования по эквидистантным поверхностям (рис.2а) на пространственную 4D-структуру армирования (рис.2б) является неэффективной не только в металлокомпозитных, но и в стеклопластиковых конструкциях. Дополнительные расчеты продемонстрировали, что положительный эффект от указанной замены структур армирования проявляется в относительно толстых и коротких стеклопластиковых цилиндрических замкнутых оболочках.

ВЫВОДЫ

Разработанная уточненная модель динамического деформирования гибких цилиндрических замкнутых армированных оболочек позволяет более точно по сравнению с простейшей неклассической теорией Амбарцумяна рассчитывать

их неупругое поведение при учете чувствительности пластических свойств компонентов композиции к изменению скорости их деформирования.

Сравнительные динамические расчеты, проведенные по упругопластической и упруговязкопластической теориям для длинных цилиндрических КМ-оболочек, показали, что неучет чувствительности компонентов композиции к скорости деформирования значительно завышает максимальные значения интенсивности деформаций материалов композиции и существенно искажает зависимости прогибов от времени и пространственных координат. Эти результаты справедливы и для металлокомпозитных оболочек, пластические свойства материалов которых сильно чувствительны к скорости деформирования, и для стеклопластиковых конструкций, неупругое поведение компонентов композиции которых в меньшей степени зависит от скорости деформирования. Сделанные выше выводы относятся и к относительно тонким, и к относительно толстым цилиндрическим армированным конструкциям. В случае стеклопластиковых оболочек различие в указанных расчетах для тонких конструкций проявляется даже в большей мере, чем для относительно толстых оболочек (имеющих относительную толщину порядка 1/10).

Установлено, что расчеты упруговязкопластического динамического поведения даже относительно тонких КМ-оболочек, выполненные по теории Амбарцумяна, как правило, завышают максимальные значения интенсивности деформаций связующего материала, достигаемые в процессе осцилляций, примерно на 4-9% по сравнению с расчетами, выполненными по уточненной теории изгиба. Показано, что в случае относительно толстых длинных стеклопластиковых цилиндрических оболочек расчеты, выполненные по теории Амбарцумяна, предсказывают эффективность замены традиционной перекрестной структуры армирования по эквидистантным поверхностям (рис.2а) на пространственную 4D-структуру (рис.2б). Согласно этим расчетам, при такой замене структур армирования наблюдается уменьшение максимальных значений интенсивности деформаций эпоксисвязующего. Расчеты же, проведенные по уточненной теории изгиба цилиндрических оболочек, продемонстрировали, что указанная замена структур армирования является неэффективной для длинных оболочек (уменьшение наибольших значений интенсивности деформаций связующего при этом не происходит). Замена 2D-структуры армирования на 4D-структуру целесообразна лишь в относительно толстых коротких цилиндрических замкнутых стеклопластиковых оболочках.

Таким образом, использование простейшей неклассической теории Амбарцумяна для расчета изгибного упруговязкопластического поведения цилиндрических замкнутых армированных оболочек при решении задач рационального и оптимального проектирования может приводить к качественно неверным результатам. Следовательно, для решения соответствующих прямых и обратных динамических задач целесообразно использовать разработанную в настоящем исследовании уточненную теорию изгиба таких КМ-конструкций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Богданович А.Е. *Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек*. – Рига: Зинатне, 1987. – 295 с.
2. Bannister M. *Challenger for composites into the next millennium – a reinforcement perspective* // Composites. – 2001. – Part A32. – Pp.901-910.

3. Mouritz A.P., Gellert E., Burchill P., Challis K. *Review of advanced composite structures for naval ships and submarines* // Compos. Struct. – 2001. – Vol.53. – No.1. – Pp.21-42.
4. Андреев А.Н., Немировский Ю.В. *Многослойные анизотропные оболочки и пластины. Изгиб, устойчивость и колебания.* – Новосибирск: Наука, 2001. – 287 с.
5. Абросимов Н.А., Баженов В.Г. *Нелинейные задачи динамики композитных конструкций.* – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. – 400 с.
6. Reddy J.N. *Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis.* – Boca Raton: CRC Press, 2004. – 831 p.
7. Андреев А. *Упругость и термоупругость слоистых композитных оболочек. Математическая модель и некоторые аспекты численного анализа.* – Saarbrucken (Deutschland): Palmarium Academic Publishing, 2013. – 93 с.
8. Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П., Недбай А.Я., Андрюшин В.А. *Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек.* – М.: Физматлит, 2014. – 408 с.
9. Каледин В.О., Аульченко С.М., Миткевич А.Б., Решетникова Е.В., Седова Е.А., Шпакова Ю.В. *Моделирование статике и динамики оболочечных конструкций из композиционных материалов.* – М.: Физматлит, 2014. – 196 с.
10. Димитриенко Ю.И. *Механика композитных конструкций при высоких температурах.* – М.: Физматлит, 2019. – 448 с.
11. Kazanci Z. *Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses* // Intern. J. of Non-Linear Mechanics. – 2011. – Vol.46. – Pp.807-817.
12. Гарнопольский Ю.М., Жигун И.Г., Поляков В.А. *Пространственно-армированные композиционные материалы: Справочник.* – М.: Машиностроение, 1987. – 224 с.
13. Mao-hong Yu. *Advances in strength theories for materials under complex stress state in the 20th century* // ASME. Appl. Mech. Rev. – 2002. – Vol.55. – No.3. – Pp.169-200.
14. Qatu M.S, Sullivan R.W., Wang W. *Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000-2009* // Composite Structures. – 2010. – Vol.93. – Pp. 14-31.
15. Alderliesten R.C., Benedictus R. *Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates. – A review* // Intern. J. Impact Eng. – 2014. – Vol.67. – Pp.27-38.
16. Янковский А.П. *Моделирование упругопластического динамического поведения гибких цилиндрических пространственно-армированных оболочек в рамках уточненной теории изгиба* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2019. – Т.25. – №2. – С.154-172.
17. Янковский А.П. *Моделирование вязкоупругопластического изгибного поведения цилиндрических оболочек с пространственными структурами армирования* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2020. – Т.26. – №4. – С.560-578.
18. Коларов Д., Балтов А., Бончева Н. *Механика пластических сред.* – М.: Мир, 1979. – 302 с.
19. Янковский А.П. *Моделирование упругопластического изгиба пространственно-армированных пластин при учете чувствительности*

- компонентов композиции к изменению скорости деформирования // Прикладная математика и механика. – 2019. – Т.83. – №4. – С.660-686.
20. Амбарцумян С.А. *Общая теория анизотропных оболочек*. – М.: Наука, 1974. – 446 с.
 21. Vasiliev V.V., Morozov E. *Advanced mechanics of composite materials and structural elements*. – Amsterdam: Elsevier, 2013. – 412 p.
 22. Янковский А.П. *Моделирование упруговязкопластического поведения армированных пластин в рамках уточненной теории изгиба* // Проблемы прочности и пластичности. – 2020. – Т.82. – №2. – С.201-214.
 23. Houlston R., DesRochers C.G. *Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading* // Computers & Structures. – 1987. – Vol.26. – No.1/2. – Pp.1-15.
 24. Карпинос Д.М. *Композиционные материалы: Справочник*. – Киев: Наукова думка, 1985. – 592 с.
 25. Хажинский Г.М. *Модели деформирования и разрушения металлов*. – М: Научный мир, 2011. – 231 с.
 26. Samarskii A.A. *The Theory of Difference Schemes*. – N.Y.: Marcel Dekker Inc., 2001. – 761 p.
 27. Безухов Н.И., Бажанов В.Л., Гольденблат И.И., Николаенко Н.А., Синюков А.М. *Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур*. – М.: Машиностроение, 1965. – 567 с.
 28. Любина Дж. *Справочник по композитным материалам: В 2-х кн. Кн. 1*. – М.: Машиностроение, 1988. – 448 с.

REFERENCES

1. Bogdanovich A.E. *Nelinejnye zadachi dinamiki tsilindricheskikh kompozitnykh obolochek [Nonlinear problems of the dynamics of cylindrical composite shells]*. Riga, Zinatne, 1987, 295 p.
2. Bannister M. *Challenger for composites into the next millennium – a reinforcement perspective*. Composites, 2001, Part A32, Pp.901-910.
3. Mouritz A.P., Gellert E., Burchill P., Challis K. *Review of advanced composite structures for naval ships and submarines*. Compos. Struct., 2001, Vol.53, No.1, Pp.21-42.
4. Andreev A.N., Nemirovskii Yu.V. *Mnogoslojnye anizotropnye obolochki i plastiny. Izgib, ustojchivost' i kolebaniya [Multilayered anisotropic shells and plates. Bending, stability and vibration]*. Novosibirsk, Nauka, 2001, 287 p.
5. Abrosimov N.A., Bazhenov V.G. *Nelinejnye zadachi dinamiki kompozitnykh konstruksij [Nonlinear problems of dynamics composites designs]*. Nizhniy Novgorod, Izdatel'stvo NNGU, 2002, 400 p.
6. Reddy J.N. *Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis*. Boca Raton, CRC Press, 2004, 831 p.
7. Andreev A.N. *Uprugost' i termouprugost' sloistykh kompozitnykh obolochek. Matematicheskaya model' i nekotorye aspekty chislennogo analiza [Elasticity and thermo-elasticity layered composite shells. Mathematical model and some aspects of the numerical analysis]*. Saarbrucken (Deutschland), Palmarium Academic Publishing, 2013, 93 p.

8. Solomonov Yu.S., Georgievskii V.P., Nedbai A.Ya., Andriushin V.A. *Prikladnye zadachi mekhaniki kompozitnykh tsilindricheskikh obolochek [Applied Problems of Mechanics of Composite Cylindrical Shells]*. Moskva, Fizmatlit, 2014, 408 p.
9. Kaledin V.O., Aul'chenko S.M., Mitkevich A.B., Reshetnikova E.V., Sedova E.A., Shpakova Yu.V. *Modelirovanie statiki i dinamiki obolocheknykh konstruksij iz kompozitsionnykh materialov [Modeling of a static's and dynamics of shelled designs from composite materials]*. Moskva, Fizmatlit, 2014, 196 p.
10. Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika kompozitnykh konstruksij pri vysokikh temperaturakh [Mechanics of composite structures at high temperatures]*. Moskva, Fizmatlit, 2019, 448 p.
11. Kazanci Z. *Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses*. Intern. J. of Non-Linear Mechanics, 2011, Vol.46, Pp.807-817.
12. Tarnopol'skii Yu.M., Zhigun I.G., Poliakov V.A. *Prostranstvenno-armirovannyye kompozitsionnye materialy: Spravochnik [Spatially reinforced composite materials: Handbook]*. Moskva, Mashinostroenie, 1987, 224 p.
13. Mao-hong Yu. *Advances in strength theories for materials under complex stress state in the 20th century*. ASME., Appl. Mech. Rev., 2002, Vol.55, No.3, Pp.169-200.
14. Qatu M.S, Sullivan R.W., Wang W. *Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000-2009*. Composite Structures, 2010, Vol.93, Pp.14-31.
15. Alderliesten R.C., Benedictus R. *Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates. – A review*. Intern. J. Impact Eng., 2014, Vol.67, Pp.27-38.
16. Yankovskii A.P. *Modelirovanie uprugoplasticheskogo dinamicheskogo povedeniya gibkikh tsilindricheskikh prostranstvenno-armirovannykh obolochek v ramkakh utochnennoj teorii izgiba [Modeling of elasto-plastic dynamic behavior of flexible cylindrical spatial-reinforced shells in the framework of refined bending theory]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2019, Vol.25, No.2, Pp.154-172.
17. Yankovskii A.P. *Modelirovanie vyazkouprugoplasticheskogo izgibnogo povedeniya tsilindricheskikh obolochek s prostranstvennymi strukturami armirovaniya [Modeling of viscoelastic-plastic bending behavior of cylindrical shells with spatial reinforcement structures]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2020, Vol.26, No.4, Pp.560-578.
18. Kolarov D., Baltov A., Boncheva N. *Mekhanika plasticheskikh sred [Mechanics of plastic mediums]*. Moskva, Mir, 1979, 302 p.
19. Yankovskii A.P. *Modeling the elasto-visco-plastic bending of spatially reinforced plates accounting for the strain-rate sensitivity of composition components*. Mechanics of Solids, 2019, Vol.54, No.5, Pp.832-852.
20. Ambarcumian S.A. *Obshhaya teoriya anizotropnykh obolochek [The general theory of anisotropic shells]*. Moskva, Nauka, 1974, 446 p.
21. Vasiliev V.V., Morozov E. *Advanced mechanics of composite materials and structural elements*. Amsterdam, Elsever, 2013, 412 p.
22. Yankovskii A.P. *Modelirovanie uprugovyazkoplasticheskogo povedeniya armirovannykh plastin v ramkakh utochnennoj teorii izgiba [Modeling of the elastic-viscoplastic behavior of reinforced plates within the refined bending theory]*. Problemy prochnosti i plastichnosti, 2020, Vol.82, No.2, Pp.201-214.

23. Houlston R., DesRochers C.G. *Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading*. Computers & Structures, 1987, Vol.26, No.1/2, Pp.1-15.
24. Karpinos D.M. *Kompozitsionnye materialy. Spravochnik [Composite materials. Reference Book]*. Kiev, Naukova dumka, 1985, 592 p.
25. Khazhinskii G.M. *Modeli deformirovaniya i razrusheniya metallov [Model of deformation and fracture of metals]*. Moskva, Nauchnyj mir, 2011, 231 p.
26. Samarskii A.A. *The Theory of Difference Schemes*. N.Y., Marcel Dekker Inc., 2001, 761 p.
27. Bezukhov N.I., Bazhanov V.L., Gol'denblat I.I., Nikolaenko N.A., Sinyukov A.M. *Raschety na prochnost', ustojchivost' i kolebaniya v usloviyakh vysokikh temperatur [Calculations on strength, stability and fluctuations in conditions of high temperatures]*. Moskva, Mashinostroenie, 1965, 567 p.
28. Lubin G. *Handbook of composites*. New York, Van Nostrand Reinhold Company Inc., 1982, 442 p.

Поступила в редакцию 09 апреля 2021 года.

Сведения об авторе:

Янковский Андрей Петрович – д.ф.-м.н., в.н.с., лаборатория «Физики быстропротекающих процессов», ФГБУН Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия; e-mail: lab4nemir@rambler.ru, yankovsky_ap@rambler.ru