

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ИНОРОДНЫХ УПРУГИХ ВКЛЮЧЕНИЙ И ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ТРЕЩИН ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ СДВИГЕ КОМПОЗИТА

Мехтиев Р.К.

Азербайджанский технический университет, г. Баку, Азербайджан

АННОТАЦИЯ

Рассматривается упругая среда, ослабленная двояко периодической системой круглых отверстий, заполненных шайбами из инородного упругого материала, поверхность которых покрыта цилиндрической пленкой. Среда (связующее) ослаблена двояко периодическими системами прямолинейных сквозных трещин. Внешняя нагрузка τ_{xy}^{∞} в такой среде вокруг отверстий образует зону повышенных напряжений, расположение которого имеет двояко периодический характер. Представленные напряжения и их смещения выражены через аналитическую функцию. Строятся общие представления решений, описывающие класс задач с двоякопериодическим распределением напряжений вне круговых отверстий и прямолинейных трещин.

Для решения используется известное положение о том, что смещение в случае поперечного сдвига является гармонической функцией. Применяется известное представление решения в каждой области через соответствующую комплексную аналитическую функцию. Три аналитические функции представляются рядами Лорана. Удовлетворяя краевым условиям на контурах отверстий и берегах трещин, задача сводится к двум бесконечным алгебраическим системам относительно искомым коэффициентов и к одному сингулярному интегральному уравнению. Затем сингулярное интегральное уравнение методом Мультотпа-Каландия сведено к конечной алгебраической системе уравнений. Приводится процедура вычисления коэффициентов интенсивности напряжений. Для численной реализации изложенного способа были взяты случаи расположения отверстий в вершинах треугольной и квадратной сеток. Представлены результаты расчетов критической нагрузки в зависимости от длины трещины и упругих геометрических параметров перфорированной среды.

Актуальность таких исследований вызвана широким использованием в технике конструкций и изделий из композиционных материалов. Исследования по разработке математических моделей теоретически описываемого напряженно-деформируемого состояния армированного композита вблизи включения при сдвиге и трещин практически мала.

Рассматривается поперечный сдвиг линейно армированной среды, обладающей тремя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии, находящейся в состоянии сдвига в плоскости, перпендикулярной к ориентации волокон. Благодаря симметрии среды, деформации ее вдоль ориентации наполнителя отсутствуют, и напряженно-деформированное состояние является функцией только переменных x_2 и x_3 ; очевидно, что сдвиги среды в рассматриваемой плоскости будут независимы от деформаций сдвига в плоскости армирования. Все перечисленные условия сводятся к выполнению равенств $\gamma_{12} = 0$, $\gamma_{13} = 0$, $\varepsilon_{11} = 0$ и $u_1 = 0$. Как всегда, ось Ox_1 направлена вдоль ориентации волокон.

Ключевые слова: двоякопериодическая решетка; толщина покрытия; волокна-покрытия; покрытие-связующее; средние напряжения; линейные алгебраические уравнения; сингулярные уравнения; прямолинейная трещина; критическая нагрузка; круговое отверстие

INTERACTION OF THE TWO-PERIODIC SYSTEM FOREIGN ELASTIC INCLUSIONS AND STRAIGHT LINE CRACKS AT LATERAL SHIFT OF THE COMPOSITE

Mehtiyev R.K.

Azerbaijan Technical University, Baku, Azerbaijan

ABSTRACT

An elastic medium weakened by a doubly periodic system of circular holes filled with washers of foreign elastic material, the surface of which is covered with a cylindrical film, is considered. The medium (binder) is weakened by doubly periodic systems of straight through cracks. An external load τ_{xy}^{∞} in such an environment around the holes is formed by zones of increased stress, the location of which has a doubly periodic character. The presented stresses and their displacements are expressed in terms of an analytical function. General representations of solutions are constructed that describe the class of problems with a doubly periodic stress distribution outside circular holes and straight-line cracks.

For the solution, the well-known position is used that the displacement in the case of a transverse shear is a harmonic function. A known representation of the solution in each area is applied through the corresponding complex analytical function. The three analytical functions are represented by Laurent series. Satisfying the boundary condition on the contours of holes and crack faces, the problem is reduced to two infinite algebraic systems with respect to the sought coefficients and to one singular integral equation. Then the singular integral equation is reduced to a finite algebraic system of equations by the Multopp – Kalandia method. A procedure for calculating the stress intensity factors is presented. For the numerical implementation of the described method, the cases of the location of the holes at the vertices of the triangular and square meshes were taken. The results of calculations of the critical load depending on the crack length and elastic geometric parameters of the perforated medium are presented.

The relevance of such studies is due to the widespread use in engineering of structures and products made of composite materials. Research on the development of mathematical models of the theoretically described stress-strain state of the reinforced composite near the inclusion at shear and cracks is practically small.

The transverse shear of a linearly reinforced medium with three mutually perpendicular planes of symmetry in a shear state in a plane perpendicular to the orientation of the fibers is considered. Due to the symmetry of the medium, its deformations along the orientation of the filler are absent, and the stress – strain state is a function of only the variables x_2 and x_3 ; it is obvious that the shears of the medium in the plane under consideration will be independent of the shear deformations in the reinforcement plane. All of the above conditions reduce to the fulfillment of the equalities $\gamma_{12} = 0$, $\gamma_{13} = 0$, $\varepsilon_{11} = 0$ and $u_1 = 0$. As always, the Ox_1 axis is directed along the fiber orientation.

Keywords: doubly periodic lattice; coating thickness; fiber-coatings; coating-binder; medium voltages; linear algebraic equations; singular equations; straight crack; critical load; circular hole

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задача трещины является важной проблемой теории прочности. Отметим, что большое число работ посвящено фундаментальной проблеме концентрации напряжений в системе взаимодействующих между собой трещин [1-10]. Постановка задачи о трещинообразовании существенно расширяет первоначальную концепцию А. Гриффитса. По мере увеличения интенсивности

внешней нагрузки в волокне возникает зона предразрушения, которая моделируется областью с ослабленными межчастичными связями в материале. Взаимодействие берегов этой зоны моделируется путем введения между берегами зоны предразрушения связей с заданной диаграммой деформирования. Физическая природа таких связей и размер зон предразрушения зависят от вида материала. Поскольку указанная зона мала по сравнению с остальной частью сечения волокна, ее можно мысленно удалить, заменив разрезом, поверхности которого взаимодействуют между собой по некоторому закону, соответствующему действию удаленного материала. В наиболее общем случае регулярной структуры основная площадка S содержит n волокон различных диаметров при произвольном расположении их осей в пределах этой площадки, а микроструктура остальной части макро сечения армированного материала получается при двоякопериодическом продолжении основной площадки на все сечения [10,11] (рис.1).

Ось Oz системы декартовых координат совмещена с осью произвольного волокна; ω_1 и ω_2 – базисные векторы, равные по модулю длинам соответствующих сторон основной ячейки, из которых составлена макроструктура материала; α – угол между векторами ω_1 и ω_2 . В дальнейшем следует воспользоваться представлением ω_2 через комплексные величины $\omega_2 = \omega_1 b e^{i\alpha}$, $\alpha \neq 0$, где $\omega_1 b$ – длина наклонной стороны ячейки, $0 < b < \infty$.

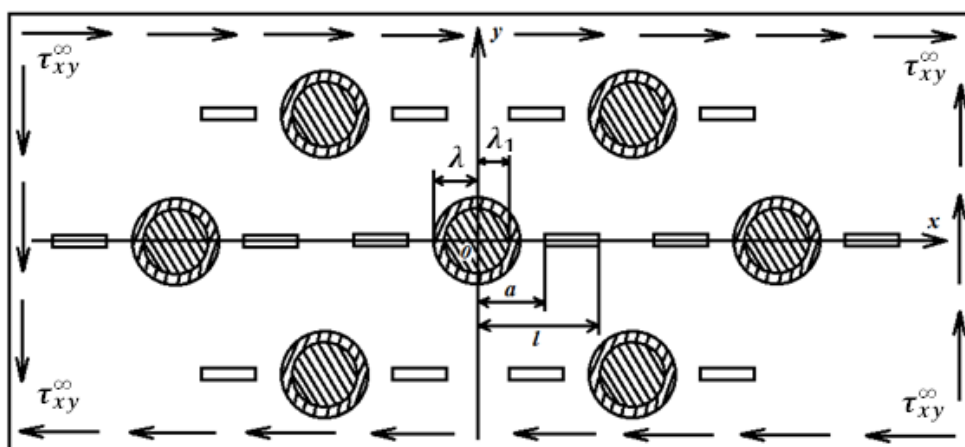


Рис.1. Расчетная схема задачи трещины сдвига в волокне композита.

Круговые отверстия решетки заполнены шайбами (волокнами) из инородного упругого материала, поверхность которых равномерно покрыта однородной цилиндрической пленкой. Решетка (связующая среда) ослаблена двоякопериодической системой прямолинейных сквозных трещин. Берега трещин свободны от внешних усилий. В решетке имеют место средние напряжения $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = \tau_{xy}^\infty$ (сдвиг на бесконечности). При деформации кусочно-однородного составного тела в случае идеального контакта смежные точки контуров на границе «включение–покрытие», а также «покрытие–плоскость» будут иметь одинаковые перемещения и напряжения.

Достаточно полное представление о характерном распределении напряжений в микроструктуре линейно армированных материалов можно получить, исследуя распределение напряжений при сдвиге во взаимно перпендикулярных плоскостях, проходящих через оси волокон, и в плоскости, перпендикулярной к ориентации

волокон. Следует ожидать, что решение задачи об оптимальном объемном содержании волокнистого наполнителя в композиции, о влиянии вида упаковки волокон в материале и свойств исходных компонентов на распределение напряжений в микроструктуре, об изменении напряженного состояния в структуре в зависимости от условий на границах контакта волокон со связующим, о хрупком разрушении и других может быть получено только при вскрытии поля напряжений в структуре материала.

Граничные условия в рассматриваемой задаче имеют вид [10,12]

$$\begin{aligned} (\sigma_r - i\tau_{r\theta})_{b|\omega_{mn}} &= (\sigma_r - i\tau_{r\theta})_{t|\omega_{mn}}, & (u + iv)_{b|\omega_{mn}} &= (u + iv)_{t|\omega_{mn}}, \\ (\sigma_r - i\tau_{r\theta})_{t|\Omega_{mn}} &= (\sigma_r - i\tau_{r\theta})_{s|\Omega_{mn}}, & (u + iv)_{t|\Omega_{mn}} &= (u + iv)_{s|\Omega_{mn}}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь удовлетворяются краевые условия на границах волокно – покрытие ω_{mn} и покрытие – связующее Ω_{mn} , где индексы $m, n = 0, \pm 1, \dots, \pm \infty$ определяют условия на контуре m, n -го волокна. $\sigma_r - i\tau_{r\theta} = 0$ – на контурах отверстий, $\sigma_y - i\tau_{xy} = 0$ – на края трещин коллинеарных оси абсцисс.

Исходя из симметрии граничных условий и геометрии области S , занятой связующей средой, напряжения являются двоякопериодическими функциями с основными периодами ω_1 и ω_2 .

Появление новых материалов открывает широкие перспективы в развитии различных областей техники. К таким материалам относятся волокнистые и армированные композиционные материалы, волокна которых покрыты пленками специального состава. Покрытия повышают прочность материала при высоких температурах и оказывают влияние на его физико-механические свойства.

Композиционные материалы представляют собой гармоническое соединение различных по форме и свойствам макроскопических тел, сохраняющих присущие им свойства и в композиции. В любом сложном композиционном материале всегда можно выделить характерные элементы – наполнитель, покрытие и связующее. Первый чаще всего представляет собой «дисперсные» частицы хлопья или волокна, а последний – среду, заполняющую пространство между элементами наполнителя и играющую роль связки. Роль противодиффузионного жаростойкого покрытия чаще всего играют карбиды, нитриды, алюминиды и окислы; известны также покрытия из каучука и других материалов, наносимые для улучшения работы волокон при периодических нагрузках. Покрытие должно быть совместимо с другими компонентами материала и ограждать волокна от диффузионного проникновения частиц связующего. Примерами таких материалов могут служить сплавы, упрочненные дисперсными частицами, керметы, состоящие из карбидов металлов, используемых в качестве наполнителей, и металлов, используемых в качестве связующего. Кроме того, такими материалами могут служить волокнистые композиции типа стекло- или металлопластиков, у которых в качестве наполнителей применяются волокна из стекла или нитевидные кристаллы из волокнообразующих соединений, а связующим являются полимеры различного химического состава и строения.

Межфазное взаимодействие оказывает непосредственное влияние на формирование сильных или слабых связей между компонентами композита, что определяет его прочность, вязкость разрушения, термостойкость и другие свойства. Поэтому управление процессом межфазного взаимодействия является важным звеном в формировании свойств композита.

Напряжения и смещения представим [13] через потенциалы Колосова – Мусхелишвили $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$

$$\begin{aligned}\sigma_x + \sigma_y &= \sigma_r + \sigma_\theta = 2\left[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}\right], \quad (z = x + iy), \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= e^{-2i\theta}(\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta}) = 2\left[\bar{z}\Phi'(z) + \psi'(z)\right].\end{aligned}\quad (2)$$

Здесь $\Phi(z) = \varphi'(z) = \frac{f'(z)}{8(1-\nu)}$, $\psi(z) = \varphi'(z)$ – комплексные потенциалы Колосова – Мусхелишвили. $f(z)$ является функцией только z .

Смещения связаны с комплексными потенциалами соотношениями, являющимися непосредственными следствиями приведенных выше формул

$$2\mu(u + iv) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\Phi(z)} - \overline{\psi(z)}, \quad (3)$$

$$\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{– для плоской деформации} \\ (3 - \nu)/(1 + \nu) & \text{– для плоского напряженного состояния} \end{cases}$$

μ – модуль сдвига; ν – коэффициент Пуассона, r, θ – полярные координаты.

Для определения предельной величины внешней нагрузки, при которой происходит трещинообразование, постановку задачи необходимо дополнить условием (критерием) появления трещины (предельного сдвига межчастичных связей в материале). В качестве такого условия примем [4] критерий критического сдвига берегов зоны предразрушения

$$V = \left| (u^+ - u^-) + i(v^+ - v^-) \right| = \delta_{cr},$$

где δ_{cr} – характеристика сопротивления материала трещинообразованию.

Задача о напряженно-деформированном состоянии кусочно-неоднородной среды в плоскости $x = const$, как видно, сводится к построению каждой из областей двух функции $\Phi(z)$ и $\psi(z)$ по заданным условиям на границах сред. Условия совершенного контакта на границах фаз выражается через равенство напряжений и смещений при $z = \tau$. Согласно формулам (3) эти условия, например, на границе волокна–покрытия ω_{mn} и покрытия–связующее S_{mn} (где индексы $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ определяют условия на контуре mn -го волокна, координаты которых равны P_{mn}) [12,14]

$$\begin{aligned}\Phi_b(\tau_1) + \overline{\Phi_b(\tau_1)} - [\bar{\tau}\Phi'_b(\tau_1) + \psi_b(\tau_1)]e^{2i\theta} &= \\ = \Phi_t(\tau_1) + \overline{\Phi_t(\tau_1)} - [\bar{\tau}_1\Phi'_t(\tau_1) + \psi_t(\tau_1)]e^{2i\theta},\end{aligned}\quad (4)$$

вследствие чего второе условие в формуле (4) заменяется следующим

$$\begin{aligned}-\kappa_b\overline{\Phi_b(\tau_1)} + \Phi_b(\tau_1) - [\bar{\tau}\Phi'_b(\tau_1) + \psi_b(\tau_1)]e^{2i\theta} &= \\ = \frac{\mu_b}{\mu_t} \left\{ -\kappa_t\overline{\Phi_t(\tau_1)} + \Phi_t(\tau_1) - [\bar{\tau}_1\Phi'_t(\tau_1) + \psi_t(\tau_1)]e^{2i\theta} \right\},\end{aligned}\quad (5)$$

Путем вычитания этого уравнения из первого равенства в формуле (4) удается упростить второе краевое условие. Окончательно граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned}\Phi_t(\tau) + \overline{\Phi_t(\tau)} - [\bar{\tau}\Phi'_t(\tau) + \psi_t(\tau)]e^{2i\theta} &= \\ = \Phi_s(\tau) + \overline{\Phi_s(\tau)} - [\bar{\tau}\Phi'_s(\tau) + \psi_s(\tau)]e^{2i\theta},\end{aligned}\quad (6)$$

$$\begin{aligned}
 & -\kappa_s \overline{\Phi_s(\tau)} + F_s(\tau) - [\overline{\tau} \Phi'_s(\tau) + \psi_s(\tau)] e^{2i\theta} = \\
 & = \frac{\mu_s}{\mu_t} \left\{ -\kappa_t \overline{\Phi_t(\tau)} + \Phi_t(\tau) - [\overline{\tau} \Phi'_t(\tau) + \psi_t(\tau)] e^{2i\theta} \right\},
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
 & \Phi_s(t^*) + \overline{\Phi_s(t^*)} + t^* \overline{\Phi'_s(t^*)} + \overline{\psi_t(t^*)} = 0, \\
 & \tau \subset S_{mn}, \tau_1 \subset \omega_{mn}, \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).
 \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь $\tau = \lambda e^{i\theta} + m\omega_1 + n\omega_2$, $\tau_1 = (\lambda - h^*) e^{i\theta} + m\omega_1 + n\omega_2$, $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, h^* – толщина покрытия, t^* – аффикс точек берегов трещин. Величины, относящиеся к покрытию, волокну, и связующему, в дальнейшем отмечаются соответственно индексами t, b и s .

Краевые условия можно упростить. Можно показать [12], что приведенная система уравнений будет следующей

$$\begin{aligned}
 & \left(1 - \frac{\mu_t}{\mu_b}\right) \Phi_b(\tau_1) + \left(1 + \kappa_b \frac{\mu_t}{\mu_b}\right) \overline{\Phi_b(\tau_1)} - \\
 & - \left(1 - \frac{\mu_t}{\mu_b}\right) [\overline{\tau_1} \Phi'_b(\tau_1) + \psi'_b(\tau_1)] e^{2i\theta} = (1 + \kappa_t) \overline{\Phi_b(\tau)},
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(1 - \frac{\mu_s}{\mu_t}\right) \Phi_t(\tau) + \left(1 + \kappa_t \frac{\mu_s}{\mu_t}\right) \overline{\Phi_t(\tau)} - \\
 & - \left(1 - \frac{\mu_s}{\mu_t}\right) [\overline{\tau} \Phi'_t(\tau) + \psi'_t(\tau)] e^{2i\theta} = (1 + \kappa_s) \overline{\Phi_s(\tau)}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

μ_s, μ_t, μ_b и $\kappa_s, \kappa_t, \kappa_b$ – модули сдвига и постоянная Мусхелишвили для плоскости и включения соответственно.

Таким образом, необходимо определить три пары аналитических функций $\Phi_t(z), \Psi_t(z), \Phi_b(z), \psi'_b(z)$ и $\Phi_s(z), \psi'_s(z)$ из краевых условий (4), (6), (8), (9), (10).

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Решение краевой задачи (4), (6), (8)-(10) ищем в виде [14]

$$\Phi_s(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \quad \psi'(z) = \psi'_1(z) + \psi'_2(z), \tag{11}$$

$$\Phi_b(z) = i \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} z^{2k}, \quad \psi_b(z) = i \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k} z^{2k}, \tag{12}$$

$$\Phi_t(z) = i \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_{2k} z^{2k}, \quad \psi_t(z) = i \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{2k} z^{2k}, \tag{13}$$

$$\Phi_1(z) = i\tau_{xy}^{\infty} + i\alpha_0 + i \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \rho^{(2k)}(z)}{(2k+1)!}, \tag{14}$$

$$\psi_1(z) = i\tau_{xy}^{\infty} + i \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \rho^{(2k)}(z)}{(2k+1)!} - i \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} S^{(2k)}(z)}{(2k+1)!},$$

$$\Phi_2(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_L g(t) \zeta(t-z) dt + A, \quad (15)$$

$$\psi_2(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_L g(t) [\zeta(t-z) + Q(t-z) - t\gamma(t-z)] dt + B,$$

где интегралы (15) берутся по линии $L = \{-l, -a\} + \{a, l\}$,

$$\rho(z) = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2 \sin^{-2}\left(\frac{\pi}{\omega}z\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2, \quad S(z) = \sum'_m \left[\frac{P}{(z-P)^2} - \frac{2z}{P_m} - \frac{1}{P_m} \right].$$

Штрих у суммы означает, что при суммировании исключается индекс $m=0$, A и B – постоянные, $g(t)$ – искомая функция, характеризующая сдвиг на края зоны предразрушения

$$g(x) = -\frac{2\mu_s i}{1+\kappa_s} \frac{d}{dx} [u_s^+(x,0) - u_s^-(x,0)] \text{ на } L, \quad (16)$$

Условие постоянства главного вектора всех сил, действующих на дугу, соединяющую две конгруэнтные точки в S , с учетом (15) и свойств функций $\gamma(z)$ и $\zeta(z)$ в конгруэнтных точках приводит к соотношению

$$\text{Im} [A\omega_1 + i\delta_j b - \alpha_2 \lambda^2 \delta_j] = 0, \quad (j=1,2),$$

$$b = -\frac{1}{\pi} \int_L \text{tg}(t) dt.$$

Из условий симметрии относительно координатных осей, будем иметь, что [2]

$$\text{Im} \alpha_{2k} = 0, \quad \text{Im} \beta_{2k} = 0, \quad (k=0,1,2).$$

К соотношениям (11)-(15) следует добавить [3,14] дополнительное условие, вытекающее из физического смысла задачи

$$\int_{-l}^{-a} g(t) dt = 0, \quad \int_a^l g(t) dt = 0. \quad (17)$$

Неизвестная функция $g(t)$ и постоянные $a_{2k}, b_{2k}, g_{2k}, h_{2k}, \alpha_{2k}, \beta_{2k}$ должны быть определены из краевых условий (4) и (8).

Для того чтобы армированная среда находилась в однородном напряженном состоянии, необходимо еще наложить условия двоякой периодичности напряженного состояния [11,12]

$$(\sigma_{22} + \sigma_{33})|_{z+\omega_j} = \sigma_{22} + \sigma_{33}, \quad (\sigma_{33} - \sigma_{22} + 2i\sigma_{23})|_{z+\omega_j} = \sigma_{33} - \sigma_{22} + 2i\sigma_{23}.$$

Условия симметрии перемещений при сдвиге могут быть записаны в виде

$$u_2(z) + iu_3(z) = -u_2(ze^{i\pi}) - iu_3(ze^{i\pi}),$$

$$u_2(z) + iu_3(z) = -u_2(\bar{z}) - iu_3(\bar{z})$$

в чем нетрудно убедиться, рассмотрев смещения в смежных ячейках.

Функции $\Phi_s(z)$ и $\psi_s(z)$, описывающие напряженно-деформированное состояние в области, занимаемой связующей средой, и голоморфные в ней, должны удовлетворять условиям периодичности, что дает

$$\Phi_s(z + \omega_j) = \Phi_s(z), \quad (\bar{z} + \omega_j)\Phi'_s(z + \omega_j) + \psi_s(z + \omega_j) = z\Phi'_s(z) + \psi_s(z).$$

Подставив в краевые условия (9), (10) вместо $\Phi_t(z)$, $\psi'_t(z)$, $\Phi_b(z)$, $\psi'_b(z)$ и $\Phi_1(z)$, $\psi'_1(z)$ из разложения в ряды Лорана, а вместо $\Phi_2(z)$, $\psi'_2(z)$ – ряд Фурье на $|\tau| = \lambda$ и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\exp(i\theta)$, получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$g_{2k} \lambda_1^{2k} = \left[\frac{\mu_b - \mu_t}{\mu_b (\kappa_t + 1)} \right] \{ (2k + 1) a_{2k} \lambda_1^{2k} + b_{2k-2} \lambda_1^{2k-2} \}, \tag{18}$$

$$g_{-2} \lambda_1^{-2k} = \left[\frac{\mu_b + \kappa_b \mu_t}{\mu_b (\kappa_t + 1)} \right] a_{2k} \lambda_1^{2k},$$

$$h_{-2k-2} \lambda_1^{2k-2} = (2k + 1) a_{2k} \lambda_1^{2k} + b_{2k-2} \lambda_1^{2k-2} + \left[\frac{\mu_b - \mu_t}{\mu_b (\kappa_t + 1)} \right] (2k + 1) a_{2k} \lambda_1^{2k} - \frac{\mu_b - \mu_t}{\mu_b (\kappa_t + 1)} (2k - 1) 2k a_{2k} \lambda_1^{2k} - \frac{\mu_b - \mu_t}{\mu_b (\kappa_t + 1)} (2k - 1) b_{2k-2} \lambda_1^{2k+2}, \tag{19}$$

$$h_{-2k-2} \lambda_1^{-2k-2} = a_{2k} \lambda_1^{2k} + \frac{\mu_b - \kappa_b \mu_t}{\mu_b (\kappa_t + 1)} (2k + 1) a_{2k} \lambda_1^{2k-2} - \frac{\mu_b - \mu_t}{\mu_b (\kappa_t + 1)} \{ (2k - 1) a_{2k} \lambda_1^{2k} + b_{2k-2} \lambda_1^{2k+2} \}, \quad (k=1,2,\dots),$$

$$\frac{\mu_s (\kappa_t + 1)}{\mu_t} i g_0 = -(\kappa_s + 1) \left[i \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{2j+2} \lambda^{2j+2} r_{0,j} - i \tau_{xy}^{\infty} + A_0 \right],$$

$$-\left(1 - \frac{\mu_s}{\mu_t} \right) i (2k - 1) g_{2k} \lambda^{2k} - \left(1 + \kappa_t \frac{\mu_s}{\mu_t} \right) i g_{-2k} \lambda^{-2k} - \left(1 - \frac{\mu_s}{\mu_t} \right) i h_{-2k-2} \lambda^{2k-2} = (\kappa_s + 1) \left[i \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{2j+2} \lambda^{2j+2k+2} r_{j,k} + A_{2k} \right],$$

$$\left(1 - \frac{\mu_s}{\mu_t} \right) (2k + 1) i g_{-2k} \lambda^{-2k} - \left(1 + \kappa_t \frac{\mu_s}{\mu_t} \right) i g_{2k} \lambda^{2k} - \left(1 - \frac{\mu_s}{\mu_t} \right) i h_{-2k-2} \lambda^{-2k-2} = -(\kappa_s + 1) (i \alpha_{-2k} + A_{-2k}),$$

$$i (g_2 \lambda^2 - g_{-2} \lambda^{-2}) - i h_0 = -i \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{2j+2} \lambda^{2j+4} r_{1,j} - i \sum_{j=0}^{\infty} \beta_{2j+2} \lambda^{2j+2} r_{0,j} + i \sum_{j=0}^{\infty} (2j + 2) \alpha_{2j+2} \lambda^{2j+2} s_{0,j} - i \tau_{xy}^{\infty} + A_0,$$

$$-i (2k - 1) g_{2k} \lambda^{2k} - i g_{-2k} \lambda^{-2k} - i h_{2k-2} \lambda^{2k} = -i \sum_{j=0}^{\infty} \beta_{2j+2} \lambda^{2j+2} r_{k-2,j} + i \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{2j+2} \lambda^{2j+2} r_{j,k} 2k \lambda^{2k} + i \sum_{j=0}^{\infty} (2j + 2) \alpha_{2j+2} \lambda^{2j+2} s_{k-1,j} + A_{2k},$$

$$i (2k + 1) g_{-2k} \lambda^{-2k} - i g_{2k} \lambda^{2k} - i h_{2k-2} \lambda^{-2k-2} = i 2k \lambda^{2k} - i \beta_{2j+2} + A_{-2k},$$

где

$$S_{j,k} = -\frac{(2j+2k+2)!g_{j+k+1}}{(2j)!(2k+2)!2^{2j+2k+2}}, \quad r_{j,k} = \frac{(2j+2k+1)!g_{j+k+2}}{(2j)!(2k+2)!2^{2j+2k+2}}, \quad S_{0,0} = 0, \quad r_{0,0} = 0,$$

$$g_{j+k+1} = \sum_{mn} \frac{1}{T^{2j+2k+2}}, \quad T = \frac{1}{2} P_{mn},$$

$$A_{2k} = -\frac{1}{\omega i} \int_{L_1} g(t) f_{2k}(t) dt, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$f_{2k}(t) = \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \gamma^{(2k)}(t) - \frac{\lambda^{2k+2}}{(2k+1)!} \gamma^{(2k+2)}(t), \quad \gamma(t) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} t, \quad (20)$$

$$f_{2k}(t) = \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \gamma^{(2k)}(t) - \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} \gamma^{(2k+1)}(t); \quad \gamma(t) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} t.$$

μ_t, μ_b и μ_s – упругие постоянные материала покрытия, волокна и связующего соответственно.

Требую, чтобы функции (11) удовлетворяли краевому условию на края разреза L получаем сингулярное интегральное уравнение относительно функции $g(x)$

$$\frac{1}{\omega} \int_{L_1} g(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (t-x) dt + H(x) = 0,$$

$$H(x) = x \overline{\Phi'_s(x)} + \overline{\psi'_s(x)}, \quad \Phi_s(x) = \Phi_1(x) + \Phi_3(x), \quad (21)$$

$$\psi'_s(x) = \psi'_1(x) + \psi'_3(x).$$

Сингулярное уравнение (21) и алгебраические системы (18), (19) являются основными уравнениями задачи, позволяющими определить функцию $g(x)$ и коэффициенты α_{2k}, β_{2k} . Зная функции $g(x), \Phi_1(z), \psi_1(z)$, можно найти напряженно-деформированное состояние перфорированной пластины. Система (18), (19) и уравнение (21) оказались связанными должны решаться совместно.

В механике хрупкого разрушения [7,15] особый интерес представляет коэффициент интенсивности напряжений в окрестности концов трещины. Касательные напряжения τ_{xy} при $a > \lambda$ независимо от вида граничных условий на контурах круговых отверстий имеют в окрестности обоих концов разреза особенность порядка $1/2$. В частности, для коэффициента интенсивности напряжений iK_{II} у вершин трещины будем иметь формулу

$$iK_{II} = \pm \lim_{x \rightarrow c} \left[\sqrt{2\pi|x-c|} g(x) \right]. \quad (22)$$

В формуле (22) причем верхний знак берется при $c = a$, а нижний знак при $c = l$.

Отметим предельные случаи. Материал включения, покрытия и связующего одинаков, т.е. $\mu_b = \mu_t = \mu_s, \kappa_b = \kappa_s = \kappa_t$.

Из поставленного решения следует

$$\Phi_1(z) = i\tau_{xy}^\infty, \quad \psi'_1(z) = i\tau_{xy}^\infty, \quad \Phi_b(z) = 0, \quad \psi'_b(z) = 0, \quad \Phi_t(z) = 0, \quad \psi'_t(z) = 0,$$

то получим решение для рядов трещин без отверстий.

При $\omega_1 \rightarrow \infty$ и $\omega_2 \rightarrow \infty$ общие представления (11)-(15) дают решение задачи для одиночного включения, равномерно покрытого однородной пленкой, с трещинами вдоль осей координат для связующего. Для получения решения

по одиночному отверстию с трещинами надо дополнительно принять $\mu_b/\mu_s = 0$, $\mu_t/\mu_s = 0$.

Воспользовавшись разложениями функций $\gamma(z)$, $\zeta(z)$, $Q(z)$ в основном параллелограмме периодов, а также учитывая $g(x) = -g(-x)$ и применяя замену переменных, уравнение (22) к виду

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{p(\tau) d\tau}{\tau - \eta} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 p(\tau) B(\eta, \tau) d\tau - \frac{1}{\omega} [\alpha_2 \lambda^2 (\delta_1 + \bar{\gamma}_1) + \beta_2 \lambda^2 \bar{\delta}_1] - \eta l \Phi_1(l\eta) - \psi'_1(l\eta) = 0, \tag{23}$$

Здесь

$$B(\eta, \tau) = -\frac{1 - \lambda_1^2}{2} \sum_{j=0}^{\infty} (K_j^* - K_j) \left(\frac{l}{2}\right)^{2j+2} \cdot u_0^j A_j, \quad P(\tau) = g(\tau),$$

$$A_j = \left[(2j+1) + \frac{(2j+1)(2j)(2j-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{u}{u_0}\right) + \dots + \frac{(2j+1)(2j)(2j-1) \dots [(2j+1) - (2j+1-1)]}{1 \cdot 2 \dots (2j+1)} \cdot \left(\frac{u}{u_0}\right)^j \right],$$

$$\lambda_1 = \frac{\lambda}{l}, \quad p(\tau) = g(\tau), \quad u = \frac{1 - \lambda_1^2}{2} (\tau + 1) + \lambda_1^2, \quad u_0 = \frac{1 - \lambda_1^2}{2} (\eta + 1) + \lambda_1^2,$$

$$K_0^* = -\frac{\omega_1}{2} (\gamma_1 + \delta_1), \quad K_j^* = (j+1)(P_{j+1} - g_{j+1}), \quad K_0 = \omega_1 \delta_1, \quad K_j = g_{j+1}, \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Сингулярное интегральное уравнение обычное регулируют по Карлеману – Векуа путем сведения его к уравнению Фредгольма. Однако при решении задач, представляющих интерес для приложений, по видимому, целесообразнее воспользоваться одним из способов прямого решения сингулярных уравнений [16]. Ниже применяется способ, развитый в [17].

Решение представим в виде

$$p(\eta) = \frac{P_0(\eta)}{\sqrt{1 - \eta^2}}. \tag{24}$$

Здесь $P_0(\tau)$ непрерывна по Гельдеру на $[-1, 1]$, причем функция $P_0(\tau)$ заменяется интерполяционным [17] полином Лагранжа, построенным по чебышевским

$$L_n [P_0, \eta] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} P_k^0 \frac{\cos n\theta \cdot \sin \theta_k}{\cos \theta - \cos \theta_k}, \quad \eta = \cos \theta, \\ P_k^0 = P_0(\eta_k), \quad \eta_m = \cos \theta_m, \quad \theta_m = \frac{2m-1}{2n} \pi, \quad m = 1, 2, \dots n. \tag{25}$$

Используя (25) и соотношения

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos n\pi d\tau}{\cos \tau - \cos \theta} = \frac{\sin n\theta}{\sin \theta}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad n = 1, 2, \dots \\ \int_{-1}^1 \frac{F(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{n} \sum_{\nu=1}^n F(\cos \theta_\nu),$$

а также выражения (20), (23), получаем квадратурные формулы

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{P(\tau)}{\tau - \eta} d\tau &= \frac{1}{n \sin \theta} \sum_{\nu} P_{\nu}^0 \sum_{m=0}^{n-1} \cos \theta_{\tau} \sin m\theta, \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 P(\tau) B(\eta, \tau) d\tau &= \frac{1}{2n} \sum_{\nu=1}^n P_{\nu}^0 (\eta_{\nu}, \tau_{\nu}), \quad \tau_{\nu} = \eta_{\nu}, \\ A_{2k} &= -\frac{1 - \lambda_1^2}{2} \frac{1}{2n} \sum_{\nu=1}^n P_{\nu}^0 f_{2k}^*(\tau_{\nu}), \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь

$$f_{2k}^*(\tau) = f_{2k}^*(\xi^2), \quad \xi f_{2k}^*(\xi^2) = l f_{2k}(t). \quad (27)$$

Формулы (26), (27) позволяют заменить основные уравнения (19) и (23) бесконечной системой линейных алгебраических уравнений относительно приближенных значений P_{ν}^0 искомой функции в узловых точках, а также коэффициентов α_{2k} . После некоторых выкладок сингулярное уравнение заменяется следующей системой

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^n a_{m\nu} P_{\nu}^0 - \frac{1}{2} H_*(\eta_m) &= 0, \quad (m = 1, 2, \dots, n), \\ a_{m\nu} &= \frac{1}{2n} \left[\frac{1}{\sin \theta_m} \operatorname{ctg} \frac{\theta_m + (-1)^{|m-\nu|}}{2} + B(\eta_m, \tau_{\nu}) \right], \quad \tau_m = \eta_m, \end{aligned} \quad (28)$$

К системе (28) необходимо присоединить дополнительное условие, которое в дискретной форме имеет вид [14]

$$\sum_{k=1}^M \frac{P_k^0}{\sqrt{1/2(1 - \lambda_1^2)(\tau_k + 1) + \lambda_1^2}} = 0. \quad (29)$$

Система (28), (29) является связанной (замыкается) двумя бесконечными системами (19), в которых вместо A_{2k} подставлено соотношение (27). Отмеченные три системы полностью определяют решение задачи. После нахождения значения P_{ν}^0 коэффициента интенсивности напряжений, iK_{II} определяется на основании соотношений (22), (24) (25)

$$\begin{aligned} K_{II}^a &= \sqrt{\frac{\pi l (1 - \lambda_1^2)}{\lambda_1}} \frac{1}{2n} \sum_{\nu=1}^n (-1)^{\nu+n} P_{\nu}^0 \operatorname{tg} \frac{\theta_{\nu}}{2} = 0, \\ K_{II}^l &= \sqrt{\pi l (1 - \lambda_1^2)} \frac{1}{2n} \sum_{\nu=1}^n (-1)^{\nu+n} P_{\nu}^0 \operatorname{ctg} \frac{\theta_{\nu}}{2} = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ

Для численной реализации изложенного способа были выполнены расчеты на компьютере ИВМ по программе МАТЛАБ. Исследовались поперечный сдвиг треугольной решетки $\omega_1 = 2$, $\omega_1 = 2e^{\frac{1}{3}\pi i}$ и квадратной решетки $\omega_1 = 2$, $\omega_1 = 2i$ с постоянными условиями τ_{xy}^{∞} . В численных расчетах полагалось $n = 10$, $n = 20$, что отвечает разбиению интервала на 10 и 20 чебышевских узлах соответственно

(n – число в зависимости от расстояния между волокнами). Полученные системы решались методом Гаусса, с выбором главного элемента.

Для анализа предельного равновесия трещин с концевыми зонами необходимы два условия (двухпараметрический критерий) разрушения. Первый критерий это условие продвижение вершины трещины, а второй это условие разрыва связей на краю концевой зоны.

В качестве первого условия разрушения используем силовой критерий разрушения Ирвина. Состоянию предельного равновесия вершины трещины соответствует выполнение условия

$$K_{II} = K_{IIc},$$

где K_{IIc} – постоянная материала, определяемая опытным путем.

В качестве второго условия разрушения используем критерий критического сдвига берегов трещины и считаем, что разрыв связей на краю концевой зоны ($x_* = l - a$) происходит при выполнении условия

$$V(x_*) = \sqrt{(u^+ - u^-)^2 + (v^+ - v^-)^2} = \delta_{cr},$$

где δ_{cr} – предельная длина связи.

Решение системы алгебраических уравнений (18), (19), (28) и (29) позволяет (при заданной длине трещин и характеристик связей) найти критическую внешнюю нагрузку τ_{xy}^∞ и предельный сдвиг концевой зоны в состоянии предельного равновесия трещин.

Для заданных размеров трещин и концевых зон, используя предельные значения K_{IIc} и δ_{cr} можно выделить режимы равновесия и роста трещин при монотонном нагружении [18]. Если выполняются условия

$$K_{II} \geq K_{IIc}, V(x_*) < \delta_{cr},$$

то происходит продвижение вершины трещины с одновременным увеличением длины концевой зоны без разрыва связей.

Этот этап развития трещин можно рассматривать, как процесс приспособляемости к заданному уровню внешних нагрузок.

Рост вершины трещины с одновременным разрывом связей на краю концевой зоны будет происходить при выполнении условий

$$K_{II} \geq K_{IIc}, V(x_*) \geq \delta_{cr}.$$

Так, например, при выполнении условий

$$K_{II} < K_{IIc}, V(x_*) \geq \delta_{cr}$$

происходит разрыв связей без продвижения вершины трещины и размер концевой зоны сокращается, стремясь к критическому значению для данного уровня нагрузки.

При выполнении условий

$$K_{II} < K_{IIc}, V(x_*) < \delta_{cr}$$

положения вершины трещины и концевой зоны не будут изменяться.

Трещины начнут расти, если выполняется условие $K_{II} = K_{IIc}$ (K_{IIc} – постоянная, характеризующая сопротивление материала распространению в нем трещин). Это условие (локальный критерий разрушения Ирвина) позволяет определить величину предельного (критического) значения внешних усилий.

При $a = \lambda$ поведение касательных напряжений зависит от вида граничных условий, задаваемых вдоль обвода круговых отверстий. Здесь следует различать два основных случая:

1. Отверстие заполнено жестким ядром, т.е. трещина выходит на границу жесткого включения. В этом случае особенность в кончике $x = a$ зависит [15] от коэффициента Пуассона материала ν и при $\nu = 0,3$ приблизительно равна $1/3$.

2. Отверстие ничем не заполнено. В рассматриваемом случае трещина одним концом $x = a$ выходит на поверхность отверстия, свободного от внешних усилий. В этом случае напряжения в кончике $x = a$ ограничены и имеют особенность на другом конце.

После нахождения величины iK_{II} в окрестности обеих вершин трещины, используя критерий хрупкого разрушения Гриффитса–Ирвина, определяются предельные (критические) усилия, вызывающие развитие трещин у соответствующего кончика.

Меняя отношение жесткости волокна к жесткости связующего, можно получить все варианты, начиная со свободного от сил кругового отверстия и кончая абсолютно жестким включением.

На рис.2 для треугольной решетки представлены результаты расчетов критической (предельной) нагрузки $\tau_*^l = \tau_{xy}^\infty \sqrt{\omega_1} / K_{IIc}$ в зависимости от длины трещины ($l_* = l - a$) для следующих значений радиуса отверстия $\lambda = 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6$ (кривые 1-5).

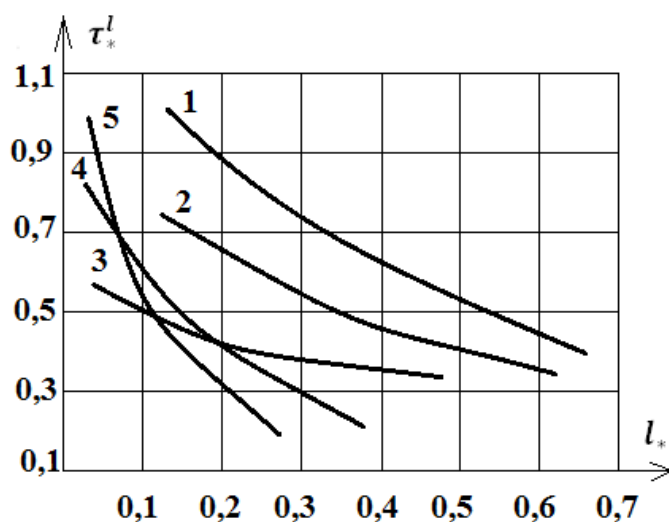


Рис.2. Зависимость критической нагрузки $\tau_*^l = \tau_{xy}^\infty \sqrt{\omega_1} / K_{IIc}$ от длины трещины ($l_* = l - a$) для следующих значений радиуса отверстия $\lambda = 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6$ (кривые 1-5).

На рис.3 на основании полученных результатов приведены зависимость критической (предельной) нагрузки $\tau_* = \tau_{xy}^\infty \sqrt{\omega_1} / K_{IIc}$ от расстояния ($a_* = a - \lambda$) для следующих значений радиуса отверстия $\lambda = 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6$ (кривые 1-5), жесткого включения без покрытия для треугольной решетки.

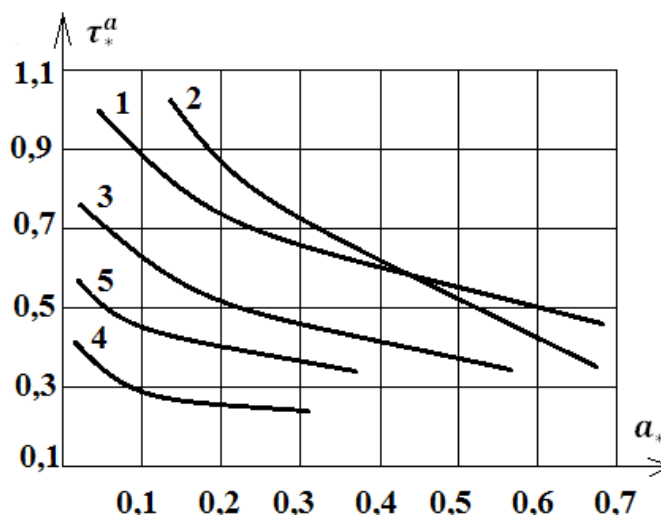


Рис.3. Зависимость критической нагрузки $\tau_*^a = \tau_{xy}^\infty \sqrt{a_1} / K_{IIC}$ от длины трещины ($a_* = a - \lambda$) для следующих значений радиуса отверстия $\lambda = 0, 2; 0, 3; 0, 4; 0, 5; 0, 6$ (кривые 1-5).

Как видно из рис.3 при некоторых значениях радиуса отверстия λ возможно устойчивое развитие системы трещин (их взаимное упрочнение). Проведенный параметрический анализ задачи показал, что концентрация напряжений около включений в связующем оказывает существенное влияние на развитие очень малых трещин. С ростом длины трещин с концевыми зонами это влияние затухает, и уже при $l - \lambda > \lambda$ им можно пренебречь, однако при этом начинается сказываться взаимодействие трещин. В зависимости от геометрических и физических параметров задачи наблюдается устойчивое развитие трещин с концевыми зонами.

Взаимное размещение армирующих волокон в поперечном сечении линейно армированного материала, структура которого образована системой более или менее выпрямленных волокон, оказывает влияние на его физико-механические свойства и зависит от метода формования материала, поэтому интересно установить расположение и размеры диаметров сечений волокон в реальных материалах, изготовленных по одной технологии.

Зоны предразрушения находятся в связующем, поэтому взяты размеры отверстий. Величина λ связана с радиусом λ_1 инородного включения $\lambda = \lambda_1 + h^*$.

Толщина барьерных покрытий металлических волокон обычно порядка одной десятой диаметра волокна ($h^* \approx 0,1$). Для выбранного h^* определим изменение сдвиговой жесткости линейно армированного материала в зависимости от объемного содержания волокон $\xi_0 = h^2 \xi$ и заданного отношения $\frac{\mu_b}{\mu_s}$ и $\frac{\mu_t}{\mu_s}$.

Результаты вычислений применительно к стеклопластику. Здесь изменение отношения $\frac{\mu_b}{\mu_s}$ ростом ξ для стеклопластика без покрытия $\left(\frac{\mu_b}{\mu_s} = 25 \right)$,

а для стеклопластика с покрытием, у которого $\frac{\mu_b}{\mu_t} = 50$. Для более жестких покрытий макроскопический модуль сдвига изменяется весьма мало. С помощью

покрытий, как это следует из найденных результатов, можно изменять жесткость композиции в широких пределах [12].

Наличие гибкого включения повышает коэффициент интенсивности напряжений, тогда как жесткие включения по сравнению с материалом связующего уменьшают его. Влияние включения особенно эффективно сказывается на близко расположенную вершину трещины.

Модель трещины с концевыми зонами позволяет исследовать закономерности распределения усилий в связях при различных законах деформирования, проводить анализ предельного равновесия трещин с учетом деформационного и силового критерий разрушения, а также прогнозировать критическую внешнюю нагрузку и трещиностойкости составного композита.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Задача прямолинейных сквозных трещин поперечного сдвига в композитах с двоякопериодической структурой решена впервые.

Для анализа решения численных расчетов был взят случай расположения отверстий в вершинах треугольной решетки. Полученные системы решались методом Гаусса с выбором главного элемента. Рассмотрен случай, когда трещины имеются только в связующем. В треугольной решетке представлены результаты расчетов критической (предельной) нагрузки в зависимости от длины трещины ($l_* = l - a$) и от расстояния ($a_* = a - \lambda$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г.И., Черепанов Г.П. *О хрупких трещинах продольного сдвига* // Прикладная математика и механика. – 1961. – Т.25. – №6. – С.1110-1119.
2. Саврук М.П. *Двумерные задачи упругости для тел с трещинами*. – Киев: Наукова думка, 1981, 323 с.
3. Мирсалимов В.М. *Взаимодействие периодической системы упругих включений и прямолинейных трещин в изотропной среде* // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1978. – №1. – С.164-174.
4. Мирсалимов В.М. *Зарождение дефекта типа трещины во втулке контактной пары* // Математическое моделирование. – 2005. – Т.17. – №2. – С.35-45.
5. Иоване Дж., Сумбатян М.А. *Периодическая система коллинеарных трещин в упругой пористой среде* // Механика твердого тела. – 2009. – №3. – С.79-88.
6. Лермонтова А.С., Ребецкий Ю.Л. *Исследование взаимодействия трещин сдвига на основе приближенного аналитического решения задачи теории упругости* // Geodynamics & Tectonophysics. – 2012. – Т.3. – №3. – С.239-274.
7. Vaghari A.R., Mirsalimov V.M. *Nucleation of cracks in a perforated heart-releasing material with temperature-dependent elastic properties* // J. Appl. Mech. Tech. Phys. – 2012. – Vol.53. – No.7. – Pp.589-598.
8. Мамедов А.Т., Мехтиев Р.К. *Моделирование волокнистого композита, армированного однонаправленными ортотропными волокнами, ослабленного прямолинейными трещинами при продольном сдвиге* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2017. – Т.23. – №4. – С.579-591.

9. Мехтиев Р.К. *Трещины в композите, армированном однонаправленными ортотропными волокнами при продольном сдвиге* // Молодой учёный. Международный научный журнал. – 2017. – №46(180). – С.63-73
10. Мехтиев Р.К. *Продольный сдвиг тел со сложной структурой ослабленной прямолинейными трещинами* // Строительная механика и расчет сооружений. – 2017. – №5. – С.69-72.
11. Григолюк Э.И., Фильштинский Л.А. *Перфорированные пластины и оболочки*. – М.: Наука, 1970, 556 с.
12. Ван Фо, Фы Г.А. *Теория армированных материалов с покрытиями*. – Киев, Наукова думка, 1971. – 230 с.
13. Мусхелишвили Н.И. *Некоторые основные задачи математической теории упругости*. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
14. Мирсалимов В.М. *Неоднородные упругопластические задачи*. – М.: Наука, 1987. – 256 с.
15. Черепанов Г.П. *Механика разрушения композиционных материалов*. – М.: Наука, 1983. – 296 с.
16. Ladopoulos E.G. *Singular integral Equations, Linear and Non-Linear Theory and its Applications in Science and Engineering*. – New York, Berlin: Springer Verlag, 2000. – 547 p.
17. Каландия А.И. *Математические методы двумерной упругости*. – М.: Наука, 1973. – 303 с.
18. Гольдштейн Р.В., Перельмутер М.Н. *Моделирование трещиностойкости композиционных материалов* // Вычислительная механика сплошных сред. – 2009. – Т.2. – №2. – С.22-39.

REFERENCES

1. Barenblatt G.I., Cherepanov G.P. *O khрупkikh treshhinakh prodol'nogo sdviga [On brittle cracks of longitudinal shear]*. Prikladnaya matematika i mekhanika, 1961, Vol.25, No.6, Pp.1110-1119.
2. Savruk M.P. *Dvumernye zadachi uprugosti dlya tel s treshhinami [Two-dimensional elasticity problems for bodies with cracks]*. Kiev, Naukova dumka, 1981, 323 p.
3. Mirsalimov V.M. *Vzaimodejstvie periodicheskoy sistemy uprugikh vklyucheniij i pryamolinejnykh treshhin v izotropnoj srede [Interaction of a periodic system of elastic inclusions and rectilinear cracks in an isotropic medium]*. Zhurnal prikladnoj mekhaniki i tekhnicheskoy fiziki, 1978, No.1, Pp.164-174.
4. Mirsalimov V.M. *Zarozhdenie defekta tipa treshhiny vo vtulke kontaktnoj pary [The origin of a defect such as a crack in the bushing of the contact pair]*. Matematicheskoe modelirovanie, 2005, Vol.17, No.2, Pp.35-45.
5. Iovane G., Sumbatyan M.A. *Periodicheskaya sistema kollinearnykh treshhin v uprugoj poristoj srede [Periodic system of collinear cracks in an elastic porous medium]*. Mekhanika tverdogo tela, 2009, No.3, Pp.79-88.
6. Lermontova A.S., Rebetskij Yu.L. *Issledovanie vzaimodejstviya treshhin sdviga na osnove priblizhennogo analiticheskogo resheniya zadachi teorii uprugosti [Investigation of the interaction of shear cracks based on an approximate analytical solution of the problem of elasticity theory]*. Geodynamics & Tectonophysics, 2012, Vol.3, No.3, Pp.239-274.

7. Vaghari A.R., Mirsalimov V.M. *Nucleation of cracks in a perforated heart-releasing material with temperature-dependent elastic properties*. J. Appl. Mech. Tech. Phys., 2012, Vol.53, No.7, Pp.589-598.
8. Mamedov A.T., Mekhtiev R.K. *Modelirovanie voloknistogo kompozita, armirovannogo odnonapravlenными ortotropnymi voloknami, oslablennogo pryamolinejnymi treshhinami pri prodol'nom sdvige [Modeling of a fiber composite reinforced with unidirectional orthotropic fibers weakened by rectilinear cracks during longitudinal shear]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2017, Vol.23, No.4, Pp.579-591.
9. Mekhtiev R.K. *Treshhiny v kompozite, armirovannom odnonapravlenными ortotropnymi voloknami pri prodol'nom sdvige [Cracks in a composite reinforced with unidirectional orthotropic fibers during longitudinal shear]*. Molodoj uchyonyj. Mezhdunarodnyj nauchnyj zhurnal, 2017, No.46(180), Pp.63-73
10. Mekhtiev R.K. *Prodol'nyj sdvig tel so slozhnoj strukturoj oslablennoj pryamolinejnymi treshhinami [Longitudinal shear of bodies with a complex structure weakened by rectilinear cracks]*. Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenij, 2017, No.5, Pp.69-72.
11. Grigolyuk E.I., Fil'shtinskij L.A. *Perforirovannye plastiny i obolochki [Perforated plates and shells]*. Moskva, Nauka, 1970, 556 p.
12. Van Fo, Fy G.A. *Teoriya armirovannykh materialov s pokrytiami [Theory of reinforced materials with coatings]*. Kiev, Naukova dumka, 1971, 230 p.
13. Muskhelishvili N.I. *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti [Some basic problems of the mathematical theory of elasticity]*. Moskva, Nauka, 1966, 707 p.
14. Mirsalimov V.M. *Neodnomernye uprugoplasticheskie zadachi [Non-dimensional elastic-plastic problems]*. Moskva, Nauka, 1987, 256 p.
15. Cherepanov G.P. *Mekhanika razrusheniya kompozitsionnykh materialov [Mechanics of destruction of composite materials]*. Moskva, Nauka, 1983, 296 p.
16. Ladopoulos E.G. *Singular integral Equations, Linear and Non-Linear Theory and its Applications in Science and Engineering*. New York, Berlin, Springer Verlag, 2000, 547 p.
17. Kalandiya A.I. *Matematicheskie metody dvumernoj uprugosti [Mathematical methods of two-dimensional elasticity]*. Moskva, Nauka, 1973, 303 p.
18. Gol'dshtejn R.V., Perel'muter M.N. *Modelirovanie treshhinostojkosti kompozitsionnykh materialov [Modeling of crack resistance of composite materials]*. Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred, 2009, Vol.2, No.2, Pp.22-39.

Поступила в редакцию 02 мая 2021 года.

Сведения об авторе:

Мехтиев Рафаиль Керим оглы – к.ф.-м.н., доц. кафедры «Технология материалов», Азербайджанский технический университет, г. Баку, Азербайджан; e-mail: rafail60mehtiyev@mail.ru