УДК 539.3
DOI 10.33113/mkmk.ras.2021.27.04.587_593.11

ОБРАТНЫЕ ИНКРЕМЕНТАЛЬНЫЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ СОВМЕСТНОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ ДЛЯ СПЛАВА С ПАМЯТЬЮ, ПРЕТЕРПЕВАЮЩИХ СТРУКТУРНЫЕ ПРЕВРАЩЕНИЯ*

Жаворонок С.И.

ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия
НИУ Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Получены обратные инкрементальные определяющие соотношения и уравнения совместности для сплава с эффектом памяти, претерпевающего изотермический структурный переход при изменении напряжения в мартенситном состоянии. Уравнения выведены на основе однократно связной модели термоупругих фазово-структурных превращений в сплавах с памятью в геометрически линейной постановке задачи. Предполагается, что в начальной точке процесса структурного перехода сплав представляет собой полностью сдвойникованный мартенсит при нулевых напряжениях. В процессе перехода происходит раздвойникование. При этом фазовый состав сплава остается полностью мартенситным, что соответствует т.н. явлению мартенситной неупругости. При построении определяющих соотношений и уравнений совместности, во-первых, тензор линейной деформации представлен аддитивным разложением на тензор упругой деформации и девиатор структурной деформации, во-вторых, введено аддитивное разложение тензоров упругой и структурной деформации на накопленную деформацию и некоторые малые приращения. Тензор суммарной накопленной деформации предполагается удовлетворяющим уравнению совместности. Приращение девиатора структурной деформации определяется линейной зависимостью от приращения интенсивности девиатора напряжения. Приращение дилатации порождается только упругим деформированием. Получена линеаризованная относительно приращений тензоров суммарной деформации и напряжения форма записи инкрементальных определяющих соотношений, аналогичная уравнениям закона Гука для анизотропной среды, причем мгновенная анизотропия описывается тензором структурной податливости, представляющим собой билинейную функцию компонентов девиатора напряжения. Получены новые инкрементальные уравнения совместности в форме Бельтрами.

Ключевые слова: сплавы с эффектом памяти; превращения структурные; деформации упругие; деформации структурные; уравнения определяющие; совместности уравнения

INVERSE INCREMENTAL CONSTITUTIVE RELATIONS AND COMPATIBILITY EQUATIONS FOR A SHAPE MEMORY ALLOY UNDERGOING STRUCTURE TRANSITIONS

* *Работа выполнена в рамках Государственного задания ИПРИМ РАН (номер гос. регистрации темы 121112200124-1) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №19-01-00695-а).*

Zhavoronok S.I.

Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
National Research University MGSU, Moscow, Russia

ABSTRACT

New inverse incremental constitutive relations and compatibility equations are derived for a shape memory alloy undergoing the stress-induced isothermal structural transition in the entirely martensite phase state. The once coupled model of thermoelastic phase and structure transitions in shape memory alloys together with the geometrically linear statement of the solid mechanics problem is used as a background. The initial state of the alloy under vanishing stresses is assumed be entirely twinned martensite. The structural transition consists in the untwining of the crystalline structure of entirely martensite phase constitution (so-called martensitic inelasticity phenomenon). To derive the constitutive equations and the appropriate compatibility equations, first the additive decomposition of the linear strain tensor into a sum of the elastic strain tensor and the structural deviatoric strain introduced; secondly the additive decomposition of the aforementioned tensors into sums of accumulated strains and some small increments is used assuming that the summary accumulated strain satisfies the compatibility equations. The structural deviatoric strain increment is defined as linear function of the deviatoric stress increment while the summary dilatation is resulted by only elastic strain. The obtained new compatibility relations are linearized with respect to both strain and stress increments and similar to the Hookean law for anisotropic elastic media where the instantaneous anisotropy is resulted by the structural compliance tensor being a bilinear function of covariant deviatoric tensors of accumulated stress. The new compatibility equations for the stress tensor increment are obtained accordingly to the Beltrami form. Finally, the stress function tensor is introduced and the appropriate formulation of the Beltrami equations for the stress function increment are derived.

Keywords: shape memory alloys; structure transitions; elastic strains; structure strains; constitutive equations; compatibility equations

ВВЕДЕНИЕ

В большинстве случаев решение краевых задач о деформировании сплавов с памятью формы (СПФ), подверженных тепловым и силовым внешним воздействиям и претерпевающих фазово-структурные превращения [1], опирается на введение в качестве неизвестных компонентов вектора перемещения [2-4]. При этом в рамках однократно связной феноменологической модели [1] могут быть получены только дифференциальные определяющие соотношения, связывающие малые приращения как фазовых, так и структурных деформаций с приращениями интенсивности тензора напряжения и объемной доли мартенситной фазы. Последнее, в свою очередь, зависит от приращений интенсивности напряжения и температуры [2]. Соответственно, решение задач в перемещениях приводит к необходимости обращения инкрементальных определяющих уравнений – численно в каждой точке диаграммы деформирования при конечно-элементной дискретизации задачи [3,4], либо аналитически, что затрудняет решение краевых задач для СПФ, поставленных в перемещениях. В то же время формулировка краевой задачи для приращений компонентов тензора напряжения позволяет избежать операции обращения инкрементальных определяющих уравнений, однако приводит к необходимости построения для СПФ уравнений совместности, записанных относительно приращения тензора напряжения. Такие уравнения получены на базе модели [1] для случая обратного фазового перехода в работах [5,6]. В данной работе предложены инкрементальные определяющие соотношения и соответствующие им уравнения Бельтрами для приращений компонентов тензора напряжения или приращения компонентов тензор-функции напряжения в случае изотермического структурного перехода в СПФ, находящемся в полностью мартенситном состоянии (т. е. для явления мартенситной неупругости СПФ).

1. ИНКРЕМЕНТАЛЬНЫЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ СПФ, ПРЕТЕРПЕВАЮЩЕГО СТРУКТУРНЫЕ ПРЕВРАЩЕНИЯ В ПОЛНОСТЬЮ МАРТЕНСИТНОМ ФАЗОВОМ СОСТОЯНИИ

Пусть $V \in \mathbb{R}^3$, $\bar{V} = V \oplus \partial V$ – некоторый объем СПФ, находящийся в полностью мартенситном состоянии, т. е. $\forall M \in \bar{V}\ \ q(M) \equiv 1$ в соответствии с определением параметра фазового состава как объемной доли мартенсита [1,2], что соответствует выполнению условий (1.1) в начальной точке превращения $\tau = \tau_0$

$$\sigma^{ij}\Big|_{\tau=\tau_0} \equiv 0, \quad T_\sigma = T < M_F, \tag{1.1}$$

где T – абсолютная температура, T_σ – приведенная температура, учитывающая влияние напряжения на фазовые превращения [1,2], M_F – температура окончания прямого фазового перехода $A \to M$, $\tau \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ – время процесса. Предположим также, что структурный переход является изотермическим: $T \neq T(\tau)$, а весь объем V мартенситной фазы СПФ находится в полностью сдвойникованном состоянии. Тогда в соответствии с аддитивным представлением деформации [1] получим

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^E + \varepsilon_{ij}^S, \quad i, j = 1,2,3. \tag{1.2}$$

Здесь ε_{ij}^E – упругая деформация, ε_{ij}^S – структурная деформация СПФ [2]

$$\varepsilon_{ij}^E = E_{\mathrm{M}}^{-1}\left[(1+\nu)\sigma_{ij} - 3\nu\sigma g_{ij}\right], \quad \sigma = \tfrac{1}{3} g^{ij}\sigma_{ij}; \tag{1.3}$$

$$\delta\varepsilon_{ij}^S = \tfrac{3}{2}\rho_D \Psi(\sigma_i)\sigma_i^{-1} s_{ij}\delta\sigma_i; \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma g_{ij}, \quad \sigma_i^2 = \tfrac{2}{3} s^{kl} s_{kl}; \tag{1.4}$$

E_{M} – модуль Юнга СПФ при $q \equiv 1$, ρ_D – верхняя грань амплитуды деформации полного структурного превращения в M – состоянии [1], $\Psi(\sigma_i)$ [Па$^{-1}$] – материальная функция – плотность интенсивности микронапряжений при $q \equiv 1$.

$$\varphi_1(\sigma_i) = F_1(\sigma_i - \sigma_1) + F_1(\sigma_i + \sigma_1) - 1, \quad F_1(\sigma_i) = \operatorname{erf}\left(\sigma_i / \sqrt{2}\right).$$

С учетом (1.3), (1.4) определяющее уравнение для инкремента суммарной упруго-структурной деформации может быть приведено к следующему виду

$$\delta\varepsilon_{ij}^S = \Pi_{ijkl}^{\Sigma}\delta\sigma^{kl}, \quad \Pi_{ijkl}^{\Sigma} = \Pi_{ijkl}^{E} + \Pi_{ijkl}^{S}; \tag{1.5}$$

$$\Pi_{ijkl}^{E} \equiv \Pi_{ijkl}^{\mathrm{M}} = E_{\mathrm{M}}^{-1}\left[(1+\nu) g_{ik} g_{jl} - \nu g_{ij} g_{kl}\right], \tag{1.6}$$

$$\Pi_{ijkl}^{S} = \rho_D \Psi(\sigma_i)\sigma_i^{-2} s_{ij} s_{kl} \quad \Rightarrow \quad \Pi_{ijkl}^{S} = \Pi_{lkji}^{S}. \tag{1.7}$$

Здесь Π_{ijkl}^{M} – контравариантные компоненты тензора податливости СПФ при $q \equiv 1$, соответствующие линейной упругости; Π_{ijkl}^{S} – компоненты тензора структурной податливости при действии в СПФ напряжения с девиатором s_{ij}. Таким образом, определяющее соотношение, определяющее зависимость малого приращения деформации от малого приращения напряжения при условиях (1.1), по форме записи аналогично обратной форме закона Гука для анизотропной среды; мгновенная (наведенная) анизотропия СПФ при структурном переходе порождена его напряженным состоянием (1.7). В свою очередь, приращение дилатации $\delta\theta$ в СПФ при структурном превращении вызвано только упругими деформациями (1.6)

$$\begin{aligned} & g^{ij}\Pi^{S}_{ijkl} = \rho_D \Psi\left(\sigma_i\right)\sigma_i^{-1}\left(g^{ij}s_{ij}\right)s_{kl} \equiv 0 \quad \Rightarrow \\ & \quad \Rightarrow \quad \delta\theta = g^{ij}\Pi^{\Sigma}_{ijkl}\delta\sigma^{kl} = 3\left(1-2\nu\right)E_{\text{М}}^{-1}\sigma. \end{aligned} \tag{1.8}$$

2. ОБОБЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ БЕЛЬТРАМИ ДЛЯ СПЛАВА С ПАМЯТЬЮ, ПРЕТЕРПЕВАЮЩЕГО СТРУКТУНОЕ ПРЕВРАЩЕНИЕ

Уравнения совместности деформаций в линейной постановке имеют вид [7]

$$\epsilon^{ikl}\epsilon^{jln}\nabla_k\nabla_l\varepsilon_{mn} = 0. \tag{2.1}$$

Введем разложение деформации на накопленную деформацию и приращение

$$\varepsilon_{mn} = \varepsilon^0_{mn} + \delta\varepsilon^E_{mn} + \delta\varepsilon^S_{mn}.$$

Предполагая [5], что для накопленной деформации ε^0_{mn} выполняется условие (2.1), с учетом (1.2) получим инкрементальное уравнение совместности в виде [8]

$$\begin{aligned} & \nabla_i\nabla_j\delta\theta + \Delta\delta\varepsilon^E_{ij} - g^{kl}\nabla_l\left(\nabla_j\delta\varepsilon^E_{ik} + \nabla_i\delta\varepsilon^E_{jk}\right) = \\ & \quad = g^{kl}\nabla_l\left(\nabla_j\delta\varepsilon^S_{ik} + \nabla_i\delta\varepsilon^S_{jk}\right) - \Delta\delta\varepsilon^S_{ij}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Так как $E_{\text{М}} = \text{Const}$, левая часть (2.2) полностью идентична уравнению совместности упругой среды [8] и может быть представлена в форме Бельтрами

$$E_{\text{М}}^{-1}\left\{\left(1+\nu\right)\left[\Delta\delta\sigma_{ij} - g^{kl}\nabla_l\left(\nabla_i\delta\sigma_{jk} + \nabla_i\delta\sigma_{jk}\right)\right] + 3\left(\nabla_i\nabla_j\delta\sigma - \nu g_{ij}\Delta\delta\sigma\right)\right\}; \tag{2.3}$$

в случае структурного перехода инкремент упругой деформации $\delta\varepsilon^E_{ij}$ несовместен; (2.3) не обращается в нуль. При главном векторе массовых сил $F_i \neq F_i\left(x^j\right)$ соотношение (2.2) приводится с учетом уравнения равновесия $\nabla_j\delta\sigma^{ij} = \rho F^i$ к (2.4)

$$\begin{aligned} & E_{\text{М}}^{-1}\left[\left(1+\nu\right)\Delta\delta\sigma_{ij} + 3\left(\nabla_i\nabla_j\delta\sigma - \nu g_{ij}\Delta\delta\sigma\right)\right] = \\ & \quad = g^{kl}\nabla_l\left(\nabla_j\delta\varepsilon^S_{ik} + \nabla_i\delta\varepsilon^S_{jk}\right) - \Delta\delta\varepsilon^S_{ij}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Свертка уравнения (2.4) по двум индексам i, j, в свою очередь, приводит к уравнению для двойной дивергенции приращения структурной деформации $\delta\varepsilon^{ij}_S$

$$\nabla_i\nabla_j\delta\varepsilon^{ij}_S = 3E_{\text{М}}^{-1}\left(1-\nu\right)\Delta\sigma. \tag{2.5}$$

Правая часть (2.2) или (2.4) с учетом (1.5) и (1.7) имеет вид

$$\begin{aligned} & \bar{\Pi}^{mn}_{ijkl}\nabla_m\nabla_n\delta\sigma^{kl} + \left(\nabla_n\bar{\bar{\Pi}}^{nkl}_{ij} - \Delta\Pi^{\cdot\cdot kl(S)}_{ij\cdot\cdot}\right)\delta\sigma^{kl} + \\ & \quad + \left(\nabla_n\bar{\Pi}^{mn}_{ijkl} + \bar{\bar{\Pi}}^{m}_{ijkl} - 2g^{mn}\nabla_n\Pi^S_{ijkl}\right)\nabla_m\delta\sigma_{kl}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

где введены обозначения линейных комбинаций тензоров $\Pi_{ij\cdot\cdot}^{\cdot\cdot kl(S)}$ и производных

$$\bar{\Pi}_{ijkl}^{mn} = \delta_i^m \Pi_{j\cdot kl}^{\cdot n\cdot\cdot(S)} + \delta_j^m \Pi_{i\cdot kl}^{\cdot n\cdot\cdot(S)} = \bar{\Pi}_{jilk}^{mn}; \quad \bar{\bar{\Pi}}_{ijkl}^{n} = \nabla_i \Pi_{j\cdot kl}^{\cdot n\cdot\cdot(S)} + \nabla_j \Pi_{i\cdot kl}^{\cdot n\cdot\cdot(S)} = \bar{\bar{\Pi}}_{jilk}^{n}.$$

Уравнения совместности (2.4) при учете (2.6) приводятся к следующей записи относительно контравариантных компонентов инкремента тензора напряжения

$$\begin{gathered}\left\{E_{\text{M}}^{-1}\left[\left(1+\nu\right)g_{ik}g_{jl}g^{mn} + 3\left(g_{kl}\delta_i^m\delta_j^n - \nu g_{ij}g_{kl}g^{mn}\right)\right] - \bar{\Pi}_{ijkl}^{mn}\right\}\nabla_m\nabla_n\delta\sigma^{kl} - \\ -\left(\nabla_n\bar{\Pi}_{ijkl}^{mn} + \bar{\bar{\Pi}}_{ijkl}^{m} - 2g^{mn}\nabla_n\Pi_{ijkl}^{S}\right)\nabla_m\delta\sigma^{kl} - \left(\nabla_n\bar{\bar{\Pi}}_{ijkl}^{n} - \Delta\Pi_{ijkl}^{S}\right)\delta\sigma^{kl} = 0.\end{gathered} \tag{2.7}$$

Обобщенные уравнения Бельтрами (2.7) для СПФ, претерпевающего изотермический структурный переход, линейны относительно инкрементов напряжения $\delta\sigma^{kl}$ и однородны при $F_i \neq F_i\left(x^j\right)$. Переменные коэффициенты уравнений (2.7) зависят от девиатора напряжения s_{ij} и интенсивности напряжения σ_i, известных из решения задачи на предыдущем шаге итерационного процесса, и могут быть вычислены с учетом (1.7) и (2.5).

3. УРАВНЕНИЯ СОВМЕСТНОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ СПЛАВА С ПАМЯТЬЮ ОТНОСИТЕЛЬНО ТЕНЗОР-ФУНКЦИИ НАПРЯЖЕНИЯ

Определим тензор $\delta\sigma^{kl}$ через тензор-функцию напряжений $\delta\phi_{rs}$ [7]

$$\delta\sigma^{kl} = \epsilon^{kpr}\epsilon^{lqs}\nabla_p\nabla_q\delta\phi_{rs},$$

тогда при учете $g^{kl}\Pi_{ijkl}^{S} = 0$ (1.4), (1.7) постановка задачи о деформировании СПФ при изотермическом структурном превращении сводится к уравнениям совместности (2.7) относительно приращения тензора-функции $\delta\phi_{mn}$ в виде (3.1)

$$\begin{gathered}E_{\text{M}}^{-1}\left\{\left[\left(1-2\nu\right)g_{ij}\Delta + 3\nabla_i\nabla_j\right]\left(3\Delta\delta\phi - \nabla_p\nabla_q\delta\phi^{pq}\right) - \right.\\ \left. -\left(1+\nu\right)\Delta\left[3\nabla_i\nabla_j\delta\phi + \Delta\delta\phi_{ij} - \nabla_p\left(\nabla_i\delta\phi_{j\cdot}^{\cdot p} + \nabla_j\delta\phi_{i\cdot}^{\cdot p}\right)\right]\right\} + \\ + 3\bar{\Pi}_{ij}^{mn,qp}\nabla_m\nabla_n\nabla_p\nabla_q\delta\phi + \bar{\Pi}_{ij}^{mn,sr}\nabla_m\nabla_n\Delta\delta\phi_{rs} - \\ -\left(\bar{\Pi}_{ij}^{mn,qr}\nabla_m\nabla_n\nabla_p\nabla_q\delta\phi_{r\cdot}^{\cdot p} + \bar{\Pi}_{ij}^{mn,sp}\nabla_m\nabla_n\nabla_p\nabla_q\delta\phi_{\cdot s}^{q\cdot}\right) + \\ + 3\tilde{\Pi}_{ij}^{m,qp}\nabla_m\nabla_p\nabla_q\delta\phi + \tilde{\Pi}_{ij}^{m,rs}\nabla_m\Delta\delta\phi_{rs} - \\ -\left(\tilde{\Pi}_{ij}^{m,qr}\nabla_m\nabla_p\nabla_q\delta\phi_{r\cdot}^{\cdot p} - \tilde{\Pi}_{ij}^{m,sr}\nabla_m\nabla_p\nabla_q\delta\phi_{\cdot s}^{q\cdot}\right) + \\ + 3\breve{\Pi}_{ij}^{pq}\nabla_p\nabla_q\delta\phi + \breve{\Pi}_{ij}^{rs}\nabla_p\nabla_q\delta\phi_{rs} - \\ -\left(\breve{\Pi}_{ij}^{qr}\nabla_p\nabla_q\delta\phi_{r\cdot}^{\cdot p} + \breve{\Pi}_{ij}^{ps}\nabla_p\nabla_q\delta\phi_{\cdot s}^{q\cdot}\right) = 0.\end{gathered} \tag{3.1}$$

Здесь $\delta\phi = \frac{1}{3}g^{rs}\delta\phi_{rs}$; введены следующие обозначения

$$\tilde{\Pi}_{ij}^{m,qp} = \nabla_n\bar{\Pi}_{ij}^{mn,qp} + \bar{\bar{\Pi}}_{ij}^{m,qp} - 2g^{mn}\nabla_n\Pi_{ij\cdot\cdot}^{\cdot\cdot qp(S)}; \quad \breve{\Pi}_{ij}^{pq} = \nabla_n\bar{\bar{\Pi}}_{ij}^{n,pq} - \Delta\Pi_{ij\cdot\cdot}^{\cdot\cdot pq(S)}.$$

Статические краевые условия, соответствующие (3.1), аналогичны принимаемым в теории упругости. Формулировка кинематических краевых условий при постановке задачи о деформировании СПФ при структурных превращениях в приращениях напряжений требует дополнительного изучения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, на базе геометрически линейной постановки задачи в рамках однократно связной модели термоупругих фазово-структурных превращений впервые получены в обратной записи линейные инкрементальные определяющие соотношения для сплава с памятью в мартенситном состоянии, претерпевающего изотермический структурный переход, аналогичные уравнениям Гука для анизотропной среды, причем мгновенная анизотропия порождается действующими напряжениями. Выведены соответствующие уравнения совместности в обобщенной форме Бельтрами относительно приращений тензора напряжения, а также линейные инкрементальные уравнения совместности в форме Бельтрами относительно приращений компонентов тензор-функции напряжения. Предложенная формулировка задачи, в отличие от постановки в перемещениях, не требует операции обращения инкрементальных определяющих соотношений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мовчан А.А., Казарина С.А. *Материалы с памятью формы как объект механики деформируемого твердого тела: экспериментальные исследования, определяющие соотношения, решение краевых задач* // Физическая мезомеханика. – 2012. – Т.15. – №1. – С.105-116.
2. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г., Сильченко Т.Л. *Учет явления мартенситной неупругости при обратном фазовом превращении в сплавах с памятью формы* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2011. – №2. – С.44-56.
3. Nushtaev D.V., Zhavoronok S.I. *Dynamics of martensite phase transitions in shape memory beams under buckling and postbuckling conditions* // IFAC Papers Online. – 2018. – Vol.51. – No.2. – Pp.873-878.
4. Nushtaev D.V., Zhavoronok S.I. *Abnormal Buckling of Thin-Walled Bodies with Shape Memory Effects Under Thermally Induced Phase Transitions* // Advanced Structured Materials. – 2019. – Vol.110. – Pp.493-524.
5. Жаворонок С.И. *Уравнения совместности деформаций для сплавов с памятью, претерпевающих термоупругие фазовые превращения* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2020. – Т.26. – №3. – С.403-408.
6. Zhavoronok S.I. *On the coupled model of the thermoelastic behavior of a shape memory alloy in intrinsic variables and some statement of buckling problems of shape memory elements* // AIP Conference Proceedings. – 2021. – Vol.2343. – 120004.
7. Лурье А.И. *Теория упругости*. – М.: Наука, 1970. – 940 с.
8. Победря Б.Е., Георгиевский Д.В. *Лекции по теории упругости.* – М.: Эдиториал УРСС, 1999. – 206 с.

REFERENCES

1. Movchan A.A., Kazarina S.A. *Shape memory materials as an object of solid state mechanics: Experimental study, constitutive relations, solution of boundary value problems*. Physical Mesomechanics, 2012, Vol.15, Nos.3-4, Pp.214-223.

2. Movchan A.A., Silchenko L.G., Silchenko T.L. *Taking account of the martensite inelasticity in the reverse phase transformation in shape memory alloys*. Mechanics of Solids, 2011, Vol.46, No.2, Pp.194-203.
3. Nushtaev D.V., Zhavoronok S.I. *Dynamics of martensite phase transitions in shape memory beams under buckling and postbuckling conditions*. IFAC Papers Online, 2018, Vol.51, No.2, Pp.873-878.
4. Nushtaev D.V., Zhavoronok S.I. *Abnormal Buckling of Thin-Walled Bodies with Shape Memory Effects Under Thermally Induced Phase Transitions*. Advanced Structured Materials, 2019, Vol.110, Pp.493-524.
5. Zhavoronok S.I. *Uravneniya sovmestnosti deformatsij dlya splavov s pamyat'yu, preterpevayushhikh termouprugie fazovye prevrashheniya [New compatibility equations for shape memory alloys undergoing thermoelastic phase transitions*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2020, Vol.26, No.3, Pp.403-408.
6. Zhavoronok S.I. *On the coupled model of the thermoelastic behavior of a shape memory alloy in intrinsic variables and some statement of buckling problems of shape memory elements*. AIP Conference Proceedings, 2021, Vol.2343, 120004.
7. Lurie A.I. *Theory of Elasticity*. Berlin, Springer Verlag, 2005, 1054 p.
8. Pobedria B.E., Georgievskii D.V. *Lektsii po teorii uprugosti [Lectures on Elasticity Theory]*. Moskva, Ehditorial URSS, 1999, 206 p.

Поступила в редакцию 25 октября 2021 года.

Сведения об авторе:

Жаворонок Сергей Игоревич – в.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: zhavoronok@iam.ras.ru