УДК 539.3
DOI 10.33113/mkmk.ras.2021.27.04.447_458.01

О КОРРЕКТНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОСТАНОВКИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В ГРАДИЕНТНОЙ УПРУГОСТИ*

Лурье С.А.[1], Белов П.А.[1], Шрамко К.К.[2], Кривень Г.И.[2]

[1]ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия
[2]ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Градиентные теории упругости содержат по определению масштабные параметры и поэтому, естественно, что они являются весьма привлекательными для моделирования масштабных эффектов в механике материалов с микро-наноструктурой, для исследования фазовых превращений с образованием межфазных слоев, меняющих микроструктуру материалов, модифицированных композитов с наноструктурами на волокнах, а также при исследовании связных проблем термомеханики и гидродинамики и др. Появление параметров масштаба в градиентных моделях связано с тем, что в качестве аргументов при вариационном описании таких моделей рассматриваются не только деформации, но и их градиенты. В результате, определяющие уравнения в градиентных моделях первого порядка определяются не только тензором упругих свойств четвертого ранга, но и в общем случае тензорами упругости пятого и шестого ранга, отличающихся по размерности от классических модулей упругости. В работе обсуждается симметрия тензоров модулей упругости шестого ранга при перестановке индексов дифференцирования в градиентной упругости, которая является следствием того, что вторые производные вектора перемещений не зависят от порядка дифференцирования. Отмечается, что имеют место случаи, когда для корректных постановок прикладных краевых задач необходимо использовать в краевых условиях тензоры модулей упругости шестого ранга, симметричные при перестановке индексов дифференцирования (симметричные по последним индексам моментные напряжения) даже если формально построенные варианты прикладных градиентных теорий лишены этого признака симметрии. Показано, что игнорирование свойства симметрии тензора модулей шестого ранга при перестановке индексов дифференцирования может приводить к существенным погрешностям по сравнению с корректными решениями, учитывающими этот признак.

Ключевые слова: упругость; градиентная теория; вариационные модели; классификация условий симметрии; корректность

ON THE CORRECTNESS OF THE MATHEMATICAL STATEMENT OF BOUNDARY PROBLEMS IN GRADIENT ELASTICITY

Lurie S.A.[1], Belov P.A.[1], Shramko K.K.[2], Kriven G.I.[2]

[1]Institute of Applied Mechanics RAS, Moscow, Russia
[2]Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

* *Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Москвы в рамках научного проекта №21-38-70008.*

ABSTRACT

Gradient elasticity theories contain, by definition, scale parameters and therefore, naturally. that they are very attractive for modeling scale effects in the mechanics of materials with a micro-nano structure, for studying phase transformations with the formation of interphase layers that change the microstructure of materials, modified composites with nanostructures on fibers, as well as for studying connected problems of thermo-mechanics and hydrodynamics, and etc. The appearance of scale parameters in gradient models is due to the fact that not only deformations, but also their gradients are considered as arguments in the variational description of such models. As a result, the governing equations in first-order gradient models are determined not only by the tensor of elastic properties of the fourth rank, but also in the general case by elastic tensors of the fifth and sixth rank, which differ in dimension from the classical elastic moduli. The paper discusses the symmetry of the tensors of the moduli of elasticity of the sixth rank under the permutation of the indices of differentiation in the gradient elasticity, which is a consequence of the fact that the second derivatives of the displacement vector do not depend on the order of differentiation. It is noted that there are cases when, for correct formulations of applied boundary value problems, it is necessary to use in the boundary conditions the tensors of the elastic moduli of the sixth rank, symmetric when rearranging the differentiation indices (moment stresses symmetric in the last indices), even if the formally constructed versions of applied gradient theories lack this symmetry feature. It is shown that ignoring the symmetry property of the tensor of moduli of the sixth rank when rearranging the differentiation indices can lead to significant errors in comparison with correct solutions that take this feature into account.

Keywords: elasticity; gradient theory; variational models; classification of symmetry conditions; correctness

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что в изотропной теории упругости свойства материала описывают всего две физические постоянные – коэффициенты Ламе. Редуцирование от общего случая с 21 физической постоянной до двух реализуется путем учета свойств симметрии, связанных с изотропией (в том числе центральной симметрии), с учетом симметрии тензора напряжений и симметрии в тензоре модулей упругости четвертого ранга, связанной с потенциальностью плотности потенциальной энергии. Следовательно, признаки симметрии играют существенную роль при упрощении физической модели материала.

Известно, что в градиентной теории [1-4] для общей анизотропной среды имеется 300 независимых физических постоянных, в то время как для изотропного тела их всего семь: коэффициенты Ламе – две физические постоянные и пять градиентных модулей упругости. Чрезвычайно большое число физических независимых постоянных для градиентных моделей сред делает принципиально невозможным использовать такие модели в прикладных задачах. Использование условий симметрии позволяет упростить градиентные модели и сделать их доступными для решения прикладных проблем в механике материалов, проблемах тепло- и массопереносе, электроупругости и др. [5-8]. Однако возникает вопрос о том не теряем ли мы при таких упрощениях корректность при постановке соответствующих краевых задач.

В этой работе мы продолжаем изучать свойства симметрии тензора градиентных модулей упругости, начатое в недавних работах [9,10]. Сначала мы исследуем свойства симметрии тензоров модулей упругости градиентных теорий, характерные и для классической теории упругости и для градиентной упругости, обращая внимание на особый вид симметрии, характерный только для градиентных теорий. Затем рассматривается структура градиентной части плотности потенциальной энергии и ее вариация, определяющая структуру краевых неклассических условий. В результате решается вопрос о том, является ли существенным учет этих условий при постановке краевых условий и формулировки математических моделей сред в целом. Обсуждаются возможные ошибки в постановке краевых условий, связанные с потерей некоторых свойств симметрии. Формулируются критерии корректности, позволяющие исправить ситуацию, что представляются нам важным и для теорий градиентной упругости в целом и для приложений.

1. О СВОЙСТВАХ СИММЕТРИИ КЛАССИЧЕСКОЙ И ГРАДИЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Определяющие уравнения в линейной теории упругости записываются через тензоры напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij}

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}. \tag{1}$$

Для линейной градиентной теории определяющие уравнения в линейной градиентной теории упругости в некоторой евклидовой системе координат также могут быть записаны в терминах деформаций для тензора напряжений σ_{ij} и тензора моментных напряжений σ_{ijk} [4,11]

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} + B_{ijklm}\varepsilon_{kl,m} \quad \text{и} \quad \sigma_{ijk} = B_{lmijk}\varepsilon_{lm} + A_{ijklmn}\varepsilon_{lm,n}, \tag{2}$$

где σ_{ij}, ε_{ij}, σ_{ijk} и $\varepsilon_{ij,k}$ являются компонентами тензоров $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\mu} = \{\sigma_{ijk}\}$ и $\nabla\boldsymbol{\varepsilon}$.

С другой стороны, определяющие соотношения градиентной упругости (2) в случае центрально симметричных материалов $B_{lmijk} = 0$ могут быть записаны в терминах перемещений

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}u_{k,l} \quad \text{и} \quad \sigma_{ijk} = A_{ijklmn}u_{l,mn}. \tag{3}$$

Рассмотрим возможные условия симметрии. Условия потенциальности, очевидно, имеют вид

$$C_{ijkl} = C_{klij}, \quad A_{ijklmn} = A_{lmnijk}. \tag{4}$$

Заметим, что и в общем случае (2) симметрия, связанная с потенциальностью, не навязывает никаких дополнительных свойств для тензора пятого ранга.

Отметим еще свойство, связанное с симметрией тензора деформации (strain symmetry conditions)

$$C_{ijkl} = C_{ijlk}, \quad B_{ijklm} = B_{jiklm} = B_{ijlkm}, \quad A_{ijklmn} = A_{ijkmln}. \tag{5}$$

Полагаем, что тензора С, В и А в (2) подчиняются условиям (5). Тогда и напряжения $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\mu}$ также удовлетворяют аналогичным условиям симметрии

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \text{и} \quad \sigma_{ijk} = \sigma_{jik}.$$

Укажем на еще одно свойство симметрии, которое имеет место только лишь для градиентной теории упругости. Очевидно, что в выражении (3) тензор третьего ранга $u_{l,mn}$ является симметричным в отношении перестановки индексов дифференцирования m, n, $u_{l,mn} = u_{l,nm}$. Указанная симметрия является необходимым и достаточным условием существования непрерывных первых производных вектора перемещений, которые по определению являются аргументами плотности потенциальной энергии в вариационной формулировке градиентных моделей. В противном случае имеет место неинтегрируемость $u_{i,jk}$, что соответствует кинематике сред с полями дефектов [12].

Следовательно, в определяющем уравнении для тензора третьего ранга μ_{ijk} могут присутствовать только симметричные компоненты тензора модулей упругости шестого ранга по последней паре индексов в первой и второй тройке индексов

$$A^s_{ijklmn} : A^s_{ijklmn} = A^s_{ijklmn}. \quad A^s_{ijklmn} = A^s_{ijklmn}. \tag{6}$$

Будем при этом говорить, что A_{ijklmn} являются физически существенными. Следовательно, только симметричные по порядку дифференцирования компоненты тензора A_{ijklmn} являются физически существенными. Для тензора шестого ранга несимметричного по указанным индексам дифференцирования

$$A^a_{ijklmn} : A_{ijklmn} = -A_{ikjlmn}. \quad A_{ijklmn} = -A_{ikjlnm}. \tag{7}$$

свертки (3) тождественно равны нулю, $\sigma_{ijk} = A^a_{ijklmn} u_{l,mn} = 0$ для произвольных A^a_{ijklmn}.

Очевидно, что и для градиентной составляющей плотности потенциальной энергии $w_g\left(u_{i,jk}\right)$, записанной в перемещениях, существенными (энергетически существенными) являются лишь компоненты тензора модулей упругости шестого ранга A^s_{ijklmn}

$$2w_g\left(u_{i,jk}\right) = \sigma_{ijk} u_{i,jk} = A_{ijklmn} u_{i,jk} u_{l,mn} = A^s_{ijklmn} u_{i,jk} u_{l,mn}. \tag{8}$$

Будем говорить, что компоненты A^a_{ijklmn} являются энергетически несущественными. При этом для любых значений A^a_{ijklmn} имеет место тождество

$$A^a_{ijklmn} u_{i,jk} u_{l,mn} \equiv 0. \tag{9}$$

Имеет место следующее утверждение.

Лемма. В градиентной теории дисторсий (градиентная теория, где симметрия тензоров модулей по первым индексам может не существовать) для корректной вариационной постановки градиентной модели достаточно, чтобы тензор моментных напряжений был симметричным по последней паре индексов.

Доказательство.

Для тензоров третьего ранга σ_{ijk} и $u_{i,jk}$ имеют место разложения на симметричные и несимметричные составляющие в отношении последних индексов (симметрии и несимметрии по порядку дифференцирования)

$$\begin{aligned} \sigma_{ijk} &= \frac{1}{2}\left(\sigma_{ijk} + \sigma_{ikj}\right) + \frac{1}{2}\left(\sigma_{ijk} - \sigma_{ikj}\right) = \hat{\sigma}_{ijk} + \tilde{\sigma}_{ijk}, \\ u_{i,jk} &= \frac{1}{2}\left(u_{i,jk} + u_{i,kj}\right) + \frac{1}{2}\left(u_{i,jk} - u_{i,kj}\right) = \hat{u}_{i,jk} + \tilde{u}_{i,jk}. \end{aligned} \tag{10}$$

Будем рассматривать кинематику сред без полей дефектов, которая определяется симметричной составляющей тензора второго ранга градиента дисторсии $\hat{u}_{i,jk}$. Для формулировки кинематики такой среды при вариационном моделировании следует ввести кинематические связи

$$\tilde{u}_{i,jk} = 0. \tag{11}$$

Рассмотрим градиентную часть плотности потенциальной энергии $w_g\left(u_{i,jk}\right)$ (8) и введем соответствующий расширенный функционал Лагранжа $\bar{w}_g\left(u_{i,jk}\right)$, учитывающий связи (11), используя технику множителей Лагранжа

$$\bar{w}_g\left(u_{i,jk}\right) = \sigma_{ijk}\delta u_{i,jk} + \lambda_{ijk}\delta\tilde{u}_{i,jk}. \tag{12}$$

Здесь λ_{ijk} – тензор множителей Лагранжа.

Преобразуем вариационную форму (12), учитывая разложения (10)

$$\begin{aligned} 2\bar{w}_g\left(u_{i,jk}\right) &= \sigma_{ijk}\delta u_{i,jk} + \lambda_{ijk}\delta\tilde{u}_{i,jk} = \\ &= \left(\hat{\sigma}_{ijk} + \tilde{\sigma}_{ijk}\right)\left(\delta\hat{u}_{i,jk} + \delta\tilde{u}_{i,jk}\right) + \lambda_{ijk}\delta\tilde{u}_{i,jk} = \\ &= \hat{\sigma}_{ijk}\delta\hat{u}_{i,jk} + \tilde{\sigma}_{ijk}\delta\tilde{u}_{i,jk} + \lambda_{ijk}\delta\tilde{u}_{i,jk} = \\ &= \hat{\sigma}_{ijk}\delta u_{i,jk} + \tilde{\sigma}_{ijk}\delta\tilde{u}_{i,jk} + \lambda_{ijk}\delta\tilde{u}_{i,jk} = \\ &= \hat{\sigma}_{ijk}\delta u_{i,jk} + \left(\tilde{\sigma}_{ijk} + \lambda_{ijk}\right)\delta\tilde{u}_{i,jk}. \end{aligned} \tag{13}$$

В последнем равенстве (13) в первом слагаемом все $\delta u_{i,jk}$ являются свободными вариациями. Полагаем, что тензор множителей Лагранжа определяется из условий $\tilde{\sigma}_{ijk} + \lambda_{ijk} = 0.$ Тогда из (13) имеем

$$2\bar{w}_g\left(u_{i,jk}\right) = \hat{\sigma}_{ijk}\delta u_{i,jk}.$$

Лемма доказана.

2. ОСОБЕННОСТИ СВОЙСТВ СИММЕТРИИ ПО УСЛОВИЯМ ГРАДИЕНТНОЙ ДЕФОРМАЦИИ И ПО ПОРЯДКУ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Рассмотрим обсуждаемые условия симметрии и установим связанную с ними структуру тензоров модулей упругости шестого ранга. Общий вид тензоров шестого ранга для изотропного тела можно построить в виде разложения по системе 15 линейно независимых базисных тензоров шестого ранга e^s_{ijklmn}

$$A_{ijklmn} = a_\alpha e^\alpha_{ijklmn} = a_1 e^1_{ijklmn} + a_2 e^2_{ijklmn} + \ldots + a_{15} e^{15}_{ijklmn}, \tag{14}$$

где

$$e^1_{ijklmn} = \delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn};\quad e^2_{ijklmn} = \delta_{ij}\delta_{km}\delta_{ln};\quad e^3_{ijklmn} = \delta_{ij}\delta_{kn}\delta_{lm};$$

$$e^4_{ijklmn} = \delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{mn};\quad e^5_{ijklmn} = \delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{ln};\quad e^6_{ijklmn} = \delta_{ik}\delta_{jn}\delta_{lm};$$

$$e^7_{ijklmn} = \delta_{il}\delta_{jk}\delta_{mn};\quad e^8_{ijklmn} = \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{kl};\quad e^9_{ijklmn} = \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km};$$

$$e^{10}_{ijklmn} = \delta_{im}\delta_{jk}\delta_{ln};\quad e^{11}_{ijklmn} = \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn};\quad e^{12}_{ijklmn} = \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl};$$

$$e^{13}_{ijklmn} = \delta_{in}\delta_{jk}\delta_{lm};\quad e^{14}_{ijklmn} = \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km};\quad e^{15}_{ijklmn} = \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl}.$$

Учет условий (4), $A_{ijklmn} = A_{lmnijk}$, приводит к дополнительным связям на коэффициенты a_s в разложении (14)

$$a_1 = a_{13},\quad a_2 = a_6,\quad a_4 = a_{10},\quad a_{12} = a_{14}$$

и снижает число независимых градиентных модулей упругости до 11

$$A_{ijklmn} = a_1\left(e^1_{ijklmn} + e^{13}_{ijklmn}\right) + a_2\left(e^2_{ijklmn} + e^6_{ijklmn}\right) +$$
$$+ a_3 e^3_{ijklmn} + a_4\left(e^4_{ijklmn} + e^{10}_{ijklmn}\right) + a_5 e^5_{ijklmn} + a_7 e^7_{ijklmn} +$$
$$+ a_8 e^8_{ijklmn} + a_9 e^9_{ijklmn} + a_{11} e^{11}_{ijklmn} + a_{12}\left(e^{12}_{ijklmn} + e^{14}_{ijklmn}\right) + a_{15} e^{15}_{ijklmn}.$$

Следовательно, число базисных тензоров снизилось до 11.

Дополнительный учет симметрии по порядку дифференцирования (6), $A_{ijklmn} = A_{lmnijk} = A_{ijklnm}$ приводит к дополнительным связям между модулями упругости в последнем равенстве

$$a_1 = a_4 = a_{10} = a_{13}, \quad a_2 = a_3 = a_5 = a_6, \quad a_8 = a_9, \quad a_{11} = a_{12} = a_{14} = a_{15}.$$

Это снижает число независимых базисных тензоров до пяти и тензор модулей упругости шестого ранга определяется пятью физическими постоянными $a_1, a_2, a_7, a_8, a_{11}$

$$\begin{aligned} A_{ijklmn} &= a_1\left(\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn} + \delta_{in}\delta_{jk}\delta_{lm} + \delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{mn} + \delta_{im}\delta_{jk}\delta_{ln}\right) + \\ &+ a_2\left(\delta_{ij}\delta_{km}\delta_{ln} + \delta_{ik}\delta_{jn}\delta_{lm} + \delta_{ij}\delta_{kn}\delta_{lm} + \delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{ln}\right) + \\ &+ a_7\delta_{il}\delta_{jk}\delta_{mn} + a_8\left(\delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km}\right) + \\ &+ a_{11}\left(\delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl}\right). \end{aligned} \tag{15}$$

Структура модулей упругости шестого ранга (20) соответствует первой форме Миндлина [2,3].

С другой стороны, если мы, рассматривая соотношения (19), потребуем выполнения и условий потенциальности (4) и условий симметрии деформации (5) $A_{ijklmn} = A_{ijkmln}\left(= A_{jiklmn}\right)$, то, дополнительно устанавливаются следующие связи между модулями

$$a_1 = a_2, \quad a_4 = a_5 = a_7, \quad a_8 = a_{11}, \quad a_9 = a_{12} = a_{15}.$$

В результате число модулей также снизится до пяти, но структура тензора модулей упругости будет иной

$$\begin{aligned} A_{ijklmn} &= a_1\left(\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn} + \delta_{in}\delta_{jk}\delta_{lm} + \delta_{ij}\delta_{km}\delta_{ln} + \delta_{ik}\delta_{jn}\delta_{lm}\right) + a_3\delta_{ij}\delta_{kn}\delta_{lm} + \\ &+ a_4\left(\delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{mn} + \delta_{im}\delta_{jk}\delta_{ln} + \delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{ln} + \delta_{il}\delta_{jk}\delta_{mn}\right) + \\ &+ a_8\left(\delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn}\right) + \\ &+ a_9\left(\delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} + \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl}\right). \end{aligned} \tag{16}$$

Структура модулей упругости шестого ранга (16) соответствует второй форме Миндлина [2,3]. Очевидно, что в (15) по сравнению с (16) разложение осуществляется по иным базисным тензорам, так как эти разложения содержат различные пятерки модулей упругости.

Очевидно, что для модели Миндина I тензор моментов является симметричным по двум последним индексам, в то время как для модели Миндлина II тензор моментов обладает симметрией «парности» – симметрией по первым двум индексам. Симметрия по порядку дифференцирования является фундаментальной и связана с существованием градиентной бездефектной среды, когда условия симметрии у тензора вторых производных перемещений являются необходимыми и достаточными условиями непрерывности дисторсий.

Симметрия, связанная с парностью (симметрия по первым индексам в первой и второй тройке индексов) вносится при построении градиентной теории деформаций и связана с симметрией тензора деформации.

Рассмотрим тензоры модулей упругости для формы Миндлина I со свойствами и формы Миндлина II и запишем плотность градиентной потенциальной энергии. В перемещениях

$$w\left(u_{l,mn}\right)=\tfrac{1}{2}u_{i,jk}A^{s}_{ijklmn}u_{l,mn}. \tag{17}$$

Для формы Миндлина II плотность градиентной части потенциальной энергии записывается через деформации формально с другим тензором градиентных свойств шестого ранга, которые не обладают свойствами симметрии по порядку дифференцирования (см. также (6))

$$w^{*}\left(\varepsilon_{lm,n}\right)=\tfrac{1}{2}\varepsilon_{ij,k}A^{*}_{ijklmn}\varepsilon_{lm,n}. \tag{18}$$

Записанные две формы теории Миндлина (17) и (18) являются эквивалентными в том смысле, что каждая из них записывается через пять физических постоянных (a_i для формы Миндлин I и a_i^{*} для формы Миндлин II) и коэффициенты a_i и a_i^{*} могут быть выражены друг через друга, если, например, квадратичную форму (17) переписать в деформациях учитывая тождество $u_{i,jk}=\varepsilon_{ij,k}+\varepsilon_{ki,j}-\varepsilon_{jk,i}$. В результате такой идентификации можно получить одинаковые формы для плотности потенциальной энергии для любого пробного поля смещения. Отметим, что кажущая эквивалентность квадратичных форм (17) и (18) не обеспечивает полную эквивалентность, ибо эти формы построены по тензорам модулей упругости с разными свойствами симметрии, которые не обеспечивают формального тождественного перехода от одной симметрии к другой.

Далее мы рассмотрим проблему о важности соблюдения условий симметрии по порядку дифференцирования, как необходимых условий отсутствия полей дефектов в градиентной теории упругости.

3. СИММЕТРИЯ ПО ПОРЯДКУ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И КОРРЕКТНОСТЬ

Представим тензор шестого ранга в виде разложения на симметричные и несимметричные составляющие в отношении последних индексов в каждой тройке

$$A_{ijkmnl}=A^{++}_{ijkmnl}+A^{+-}_{ijkmnl}+A^{-+}_{ijkmnl}+A^{--}_{ijkmnl}, \tag{19}$$

$$\begin{cases}A^{++}_{ijkmnl}=\left(A_{ijkmnl}+A_{ikjmnl}+A_{ijkmln}+A_{ikjmln}\right)/4\\ A^{+-}_{ijkmnl}=\left(A_{ijkmnl}+A_{ikjmnl}-A_{ijkmln}-a_{ikjmln}\right)/4\\ A^{-+}_{ijkmnl}=\left(A_{ijkmnl}-A_{ikjmnl}+A_{ijkmln}-A_{ikjmln}\right)/4\\ A^{--}_{ijkmnl}=\left(A_{ijkmnl}-A_{ikjmnl}-A_{ijkmln}+A_{ikjmln}\right)/4\end{cases} \tag{20}$$

Здесь A^{++}_{ijkmnl} – тензора с указанной симметрией в первой и второй тройке, A^{+-}_{ijkmnl} – тензора симметричные в первой тройке и несимметричные во второй тройке индексов и т.д.

Непосредственной сверткой разложения (19), (20) с тензором шестого ранга $u_{i,jk}u_{m,nl}$ можно убедиться, что потенциальная энергия кривизн зависит только от модулей, входящих в определение тензора A^{++}_{ijkmnl}. Следовательно, модули, входящие в состав тензоров A^{+-}_{ijkmnl}, A^{-+}_{ijkmnl}, A^{--}_{ijkmnl}, не ограничены никакими связями. Это значит, что среди компонент тензора C_{ijkmnl} физически и энергетически значимыми являются только компоненты A^{++}_{ijkmnl}.

Рассмотрим вариацию градиентной части потенциальной энергии

$$\begin{aligned}\delta w_g &= \int_V \sigma_{ijk}\delta u_{i,jk}dV = \int_V \sigma_{ijk,jk}\delta u_i dV - \int_F \left[\sigma_{ijk,k}n_j\delta u_i - \sigma_{ijk}n_k\delta u_{i,j}\right]dF = \\ &= -\int_F \left[\sigma_{ijk,k}n_j + \left(\sigma_{ijk}n_k\right)_{,p}\delta^*_{jp} + 2H\sigma_{ijk}n_k n_j\right]\delta u_i dF + \\ &+ \int_F \left(\sigma_{ijk}n_k\right)n_j\delta\left(u_{i,p}n_p\right)dF + \oint\left[\sigma_{ijk}n_k\nu_j\right]\delta u_i ds,\end{aligned} \qquad (21)$$

где $H = -\left(1/2\right)\left(n_i\right)_{,j}\delta^*_{ij}, \quad \delta^*_{ij} = \delta_{ij} - n_i n_j.$

При записи (21) учтено следующее равенство [13]

$$\int_F \left(\sigma_{ijk}n_k\delta R_i\right)_{,p}\delta^*_{jp}dF = \oint\left(\sigma_{ijk}n_k\right)\nu_j\delta R_i ds - \int_F 2H\sigma_{ijk}n_k n_j\delta R_i dF,$$

$$H = -\left(1/2\right)\left(n_i\right)_{,j}\delta^*_{ij}.$$

Равенство (21) можно переписать полностью в перемещениях, учитывая соотношения закона Гука $\sigma_{ijk} = C_{ijklmn}u_{l,mn}$

$$\begin{aligned}\delta w_g &= \int_V C_{ijklmn}u_{l,mnjk}\delta u_i dV - \int_F \left[C_{ijklmn}u_{l,mnk}n_j\delta u_i - C_{ijklmn}u_{l,mn}n_k\delta u_{i,j}\right]dF = \\ &= -\int_F \left[C_{ijklmn}u_{l,mnk}n_j + \left(C_{ijklmn}u_{l,mn}n_k\right)_{,p}\delta^*_{jp} + 2HC_{ijklmn}u_{l,mn}n_k n_j\right]\delta u_i dF + \\ &+ \int_F \left(C_{ijklmn}u_{l,mn}n_k\right)n_j\delta\left(u_{i,p}n_p\right)dF + \oint\left[C_{ijklmn}u_{l,mn}n_k\nu_j\right]\delta u_i ds.\end{aligned} \qquad (22)$$

Будем говорить, что градиентная модель является корректной, если в краевых условиях не входят физически и энергетически несущественные компоненты модулей упругости A^a_{ijklmn}, (7) и, соответственно, несимметричные по последним индексам тензор моментов $\tilde{\sigma}_{ijk}$ (см. (10)).

Запишем равенство (22) сначала только через физически и энергетические значимые компоненты тензора моделей шестого ранга A^{++}_{ijkmnl}

$$\begin{aligned}\delta w^s_g &= \int_V C^{++}_{ijkmnl}u_{l,mnjk}\delta u_i dV - \\ &- \int_F \left[C^{++}_{ijkmnl}u_{l,mnk}n_j + \left(C^{++}_{ijkmnl}u_{l,mn}n_k\right)_{,p}\delta^*_{jp} + 2HC^{++}_{ijkmnl}u_{l,mn}n_k n_j\right]\delta u_i dF + \\ &+ \int_F \left(C^{++}_{ijkmnl}u_{l,mn}n_k\right)n_j\delta\left(u_{i,p}n_p\right)dF + \oint\left[C^{++}_{ijkmnl}u_{l,mn}n_k\nu_j\right]\delta u_i ds.\end{aligned} \qquad (23)$$

С другой стороны, удержим в (22) полное разложение для тензора модулей упругости шестого ранга (19). Нетрудно проверить, что модули с неполной симметрией C^{-+}_{ijklmn} появятся только в статическом условии (при вариации перемещений), и в статическом условии в контурном интеграле. Сравнивая полученную так вариационную форму с (23), найдем

$$\begin{gathered}\delta w_g^{full} - \delta w_g^{s} = -\int_F \left[C^{-+}_{ijklmn} u_{l,mnk} n_j + \left(C^{-+}_{ijklmn} u_{l,mn} n_k \right)_{,p} \delta^*_{jp\,j} \right] \delta u_i dF + \\ + \oint \left[C^{-+}_{ijklmn} u_{l,mn} n_k \nu_j \right] \delta u_i ds.\end{gathered} \tag{24}$$

Уравнение (24) показывает, что постановка краевой задачи без учета симметрии тензора модулей упругости по индексам дифференцирования может приводить к значительным погрешностям за счет возможного появления в краевых условиях физически и энергетически несущественных составляющих модулей упругости, которые могут принимать любые значения.

Таким образом, для исключения паразитных внутренних сил в граничных условиях следует требовать выполнения следующего условия корректности

$$\begin{gathered}B = \delta w_g^{full} - \delta w_g^{s} = -\int_F \left[C^{-+}_{ijklmn} u_{l,mnk} n_j + \left(C^{-+}_{ijklmn} u_{l,mn} n_k \right)_{,p} \delta^*_{jp\,j} \right] \delta u_i dF + \\ + \oint \left[C^{-+}_{ijklmn} u_{l,mn} n_k \nu_j \right] \delta u_i ds = 0.\end{gathered} \tag{25}$$

Следуя (25), можно утверждать, что паразитные напряжения связаны с величиной C^{-+}_{ijkmnl} и могут формально появляться лишь в краевых условиях для напряжений на поверхности тела и ребрах.

Очевидно, что в терминах моментов σ_{ijk} условия корректности (25) запишутся в виде

$$\int_F \left[\tilde{\sigma}_{ijk,k} n_j + \left(\tilde{\sigma}_{ijk} n_k \right)_{,p} \delta^*_{jp} \right] \delta R_i dF - \oint \left[\tilde{\sigma}_{ijk} n_k \nu_j \right] \delta R_i ds = 0. \tag{26}$$

Можно показать, что первое слагаемое в (26) дает нулевую свертку вида $\int_F \left[\tilde{\sigma}_{ijk,p} \left(n_j \delta^*_{kp} + n_k \delta^*_{jp} \right) \right] \delta u_i dF = 0$, но это может быть реализовано в общем случае только лишь комбинацией обоих слагаемых. Однако имеется целый класс градиентных моделей сред [14], для которых моментные поправки вида $\left(\sigma_{ijk} n_k \right)_{,p} \delta^*_{jp}$ в краевых условиях отсутствуют и статические граничные условия записываются фактически в форме условий классической упругости через квазиклассические напряжения $\tau_i = \left(\sigma_{ij} - \sigma_{ijk,k} \right) n_j$. В этом случае в краевых условиях нет симметрии, которое, обеспечивало бы равенство нулю для выражения $\left[\tilde{\sigma}_{ijk,k} n_j \right] \neq 0$.

В общем случае, когда учитывается кривизна поверхности, и производная от нормали не равна нулю, паразитные слагаемые в классическом краевом условии (при вариации δu_i) могут появиться и в слагаемом, характеризующим кривизну поверхности через плоскую дивергенцию вектора нормали

$$\int_F \left[\tilde{\sigma}_{ijk} n_{k,p} \delta^*_{jp} \right] \delta u_i dF \neq 0 .$$

Уравнения (25), (26) позволяют сформулировать следующее утверждение

1. Для любой градиентной теории упругости корректные статические краевые условия на вектор сил на поверхности тела и статические условия для менисковых сил $f_i = C_{ijklmn} u_{l,mn} n_k v_j$ на контуре следует при формулировке в перемещениях записывать через полностью симметричный тензор градиентных модулей упругости, A^{++}_{ijklmn}, симметричного относительно порядка дифференцирования (т.е. симметричного по последним индексам в каждой тройке) даже если эти модули упругости таким свойством не обладают для рассматриваемой модели

$$
\begin{aligned}
&A_{ijkl} u_{k,l} n_j - A^{++}_{ijklmn} u_{l,mnk} n_j + \left(A^{++}_{ijklmn} u_{l,mn} n_k \right)_{,p} \delta^*_{jp} + \\
&\qquad + 2HA_{ijklmn} u_{l,mn} n_k n_j = t_i^0, \quad x_i \in F = F_1 \cup F_2 ... \cup F_i,
\end{aligned} \tag{27}
$$

$$
A^{++}_{ijklmn} u_{l,mn} n_k v_j = f_i^0, \qquad x_i \in S = s_1 \cup s_2 ... \cup s_i. \tag{28}
$$

Если поверхность тела образована плоскостями, то соотношение (27) выполняется тождественно, однако условие (28) следует все равно записывать через полностью симметричный тензор.

2. Если краевые статические условия формулируются в усилиях и моментах, то они и для вектора сил на поверхности и для вектора менисковых сил на контурах должны быть записаны через симметричную составляющую тензора моментов относительно последних индексов $\hat{\sigma}_{ijk}$.

3. Это всегда следует иметь в виду, если используется градиентная векторная модель, в которой статические условия записываются через квазистатические напряжения $\tau_i = \left(\sigma_{ij} - \sigma_{ijk,k} \right) n_j$, где моментный фактор не компенсируется с точки зрения симметрии слагаемым вида $\left(\tilde{\sigma}_{ijk} n_k \right)_{,p} \delta^*_{jp}$.

В таких вариантах теории статические условия всегда следует формулировать на симметричную часть моментных напряжений $\tau_i = \left(\sigma_{ij} - \hat{\sigma}_{ijk,k} \right) n_j = t_i^0$, t_i^0 – известная функция на поверхности тела.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показывается, что условия симметрии при построении решения прямым методом минимизации обобщенного функционала Лагранжа могут не учитываться, ибо обсуждаемые специфические условия симметрии являются энергетически несущественными, и формально не входят в определение плотности потенциальной энергии. Тем не менее устанавливается нетривиальный результат, показывающий, что при записи краевых статических условий при формулировке математической проблемы, энергетически несущественные компоненты в общем представлении тензора градиентных модулей упругости могут приводить к ошибочной формулировке статических краевых условий и условий на контурах – линиях пересечений кусочно-гладких поверхностей, образующих поверхность тела.

Указывается процедура, позволяющая всегда получить корректные краевые условия для произвольных вариантов градиентных теорий упругости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Toupin R.A. *Elastic materials with couple stresses* // Arch. Rational Mech. An. – 1962. – Vol.11. – Pp.385-414.
2. Mindlin R.D. *Micro-structure in linear elasticity* // Arch. Rational Mech. An. – 1964. – Vol.16. – Pp.51-78.
3. Mindlin R.D., Eshel N.N. *On first strain-gradient theories in linear elasticity* // Int. J. Solids Struct. – 1968. – Vol.4. – Pp.109-124.
4. Auffray N., Le Quang H., He H.C. *Matrix representations for 3D strain-gradient elasticity* // J. Mech. Phys. Solids. – 2013. – Vol.61. – Pp.1202-1223.
5. Fleck N.A. Hutchinson J.W. *Strain gradient plasticity* / In: Hutchinson J.W., Wu T.Y. Advances in Applied Mechanics. – New York: Academic Press, 1997. – Vol.33. – Pp.295-361.
6. Liu X.N., Huang G.L., Hu G.K. *Chiral effect in plane isotropic micropolar elasticity and its application to chiral lattices* // J. Mech. Phys. Solids. – 2012. – Vol.60. – Pp.1907-1921.
7. Wang Q., Wang C.M. *The constitutive relation and small scale parameter of nonlocal continuum mechanics for modelling carbon nanotubes* // Nanotechnology. – 2009. – Vol.18. – 075702.
8. Forrest S. *Mechanics of generalized continua: construction by homogenization* // J. Phys. IV. – 1998. – Vol.8. – Pp.39-48.
9. Gusev A.A., Lurie S.A. *Symmetry conditions in strain gradient elasticity* // Mathematics and Mechanics of Solids. – 2017. – Vol.22. – No.4. – Pp.683-691.
10. Vasiliev V.V., Lurie S.A. *On correct nonlocal generalized theories of elasticity* // Physical Mesomechanics. – 2016. – Vol.19. – No.3. – Pp.269-281.
11. dell'Isola F., Sciarra G., Vidoli S. *Generalized Hooke's law for isotropic second gradient materials* // Proc. R. Soc. – 2009. – Vol.465. – Pp.2177-2196.
12. Белов П.А., Лурье С.А. *Континуальная модель микрогетерогенных сред* // Прикладная математика и механика. – 2009. – Т.73. – №5. – С.599-608.
13. Ludu A. *Nonlinear Waves and Solitons on Contours and Closed Surfaces.* – Springer, 2007. – 466 p.
14. Lurie S.A., Belov P.A., Solyaev Y.O., Aifantis E.C. *On one class of applied gradient models with simplified boundary problems* // Materials Physics and Mechanics. – 2017. – Vol.32. – No.3. – Pp.353-369.

REFERENCES

1. Toupin R.A. *Elastic materials with couple stresses*. Arch. Rational Mech. An., 1962, Vol.11, Pp.385-414.
2. Mindlin R.D. *Micro-structure in linear elasticity.* Arch. Rational Mech. An., 1964, Vol.16, Pp.51-78.
3. Mindlin R.D., Eshel N.N. *On first strain-gradient theories in linear elasticity*. Int. J. Solids Struct., 1968, Vol.4, Pp.109-124.
4. Auffray N., Le Quang H., He H.C. *Matrix representations for 3D strain-gradient elasticity*. J. Mech. Phys. Solids., 2013, Vol.61, Pp.1202-1223.
5. Fleck N.A. Hutchinson J.W. *Strain gradient plasticity.* In: Hutchinson J.W., Wu T.Y. Advances in Applied Mechanics. New York, Academic Press, 1997, Vol.33, Pp.295-361.

6. Liu X.N., Huang G.L., Hu G.K. *Chiral effect in plane isotropic micropolar elasticity and its application to chiral lattices*. J. Mech. Phys. Solids, 2012, Vol.60, Pp.1907-1921.
7. Wang Q., Wang C.M. *The constitutive relation and small scale parameter of nonlocal continuum mechanics for modelling carbon nanotubes*. Nanotechnology, 2009, Vol.18, 075702.
8. Forrest S. *Mechanics of generalized continua: construction by homogenization*. J. Phys. IV, 1998, Vol.8, Pp.39-48
9. Gusev A.A., Lurie S.A. *Symmetry conditions in strain gradient elasticity*. Mathematics and Mechanics of Solids, 2017, Vol.22, No.4, Pp.683-691.
10. Vasiliev V.V., Lurie S.A. *On correct nonlocal generalized theories of elasticity*. Physical Mesomechanics, 2016, Vol.19, No.3, Pp.269-281.
11. dell'Isola F., Sciarra G., Vidoli S. *Generalized Hooke's law for isotropic second gradient materials*. Proc. R. Soc., 2009, Vol.465, Pp.2177-2196.
12. Belov P.A., Lur'e S.A. *Kontinual'naya model' mikrogeterogennykh sred [Continuous model of microheterogeneous media]*. Prikladnaya matematika i mekhanika, 2009, Vol.73, No.5, Pp.599-608.
13. Ludu A. *Nonlinear Waves and Solitons on Contours and Closed Surfaces*. Springer, 2007, 466 p.
14. Lurie S.A., Belov P.A., Solyaev Y.O., Aifantis E.C. *On one class of applied gradient models with simplified boundary problems*. Materials Physics and Mechanics, 2017, Vol.32, No.3, Pp.353-369.

Поступила в редакцию 26 июля 2021 года.

Сведения об авторах:

Лурье Сергей Альбертович – д.т.н., г.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: salurie@mail.ru

Белов Петр Анатольевич – д.ф.-м.н., в.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: belovpa@yandex.ru

Шрамко Константин Константинович – аспирант, ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия; e-mail: konstantin_home@mail.ru

Кривень Галина Ивановна – к.т.н., инженер, ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия; e-mail: Kriven_Galina@inbox.ru