

УДК 539.4

DOI 10.33113/mkmk.ras.2021.27.04.543_557.08

ОПИСАНИЕ СВЕРХУПРУГОСТИ В РАМКАХ ОБЪЕДИНЕННОЙ МОДЕЛИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ СПЛАВОВ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ С УЧЕТОМ ТРАНСЛЯЦИОННОГО УПРОЧНЕНИЯ И РАЗВИТИЯ МАРТЕНСИТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ*

Гаганова Н.В.

*ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова»,
г. Москва, Россия*

АННОТАЦИЯ

Рассматривается объединенная модель фазового и структурного деформирования сплавов с памятью формы, позволяющая учесть как деформационное, так и трансляционное упрочнение, а также описать явление ориентированного превращения. Модель построена с учетом того, что фазовые деформации могут увеличиваться как при уменьшении нагрузки, так и при ее отсутствии. Используется понятие поверхности нагружения в пространстве напряжений и активного процесса, причем приращение структурных деформаций в активном процессе определяется ассоциированным законом по аналогии с теориями пластичности. Вводятся условия активного нагружения, согласно которым тензор приращений структурных деформаций должен быть сонаправлен внешней нормали к поверхности нагружения, а параметр упрочнения, связанный со структурным переходом, должен быть положителен. В большинстве моделей сплавов с памятью формы учитывается только образование новых мартенситных элементов, но не их дальнейшее увеличение. Между тем эксперименты показывают, что развитие мартенситных элементов может заметно влиять на значения деформаций. В рассматриваемой модели вводится специальная материальная функция, определяющая соотношение между процессами зарождения и развития мартенситных элементов.

Поскольку температура, при которой начинается фазовый переход в сплавах с памятью формы, зависит от действующих напряжений, фазовые переходы при определенных условиях могут происходить при постоянной температуре. В данной работе объединенная модель применяется для описания явления сверхупругости в никелиде титана. Моделируется переход от линейной зависимости деформаций от напряжений к нелинейной при достижении пороговых значений напряжений и соответствующем фазово-структурном превращении.

Проведено сравнение результатов для разных материальных функций. В случае учета развития мартенситных элементов значения фазово-структурных деформаций оказываются выше. Полученные графики показывают, что модель качественно правильно описывает нелинейный рост деформаций под действием монотонно изменяющихся напряжений при постоянной температуре и явление сверхупругости. При монотонно возрастающих напряжениях при постоянной температуре влияние развития мартенситных элементов оказывается менее заметным, чем при убывающих напряжениях.

Ключевые слова: сплавы с памятью формы; фазовые и структурные превращения; деформационное упрочнение; трансляционное упрочнение; сверхупругость

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №20-01-00240.

SUPERELASTICITY DESCRIPTION BASED ON THE COMBINED MODEL OF SHAPE MEMORY ALLOYS DEFORMATION CONSIDERING TRANSLATIONAL HARDENING AND DEVELOPMENT OF THE MARTENSITIC ELEMENTS

Gaganova N.V.

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

ABSTRACT

A combined model of phase and structural deformation for shape-memory alloys is considered. The model takes into account kinematic and isotropic hardening and can be used for describing the phenomenon of oriented transformation. According to the model, phase deformation can increase under a decreasing load or without load after preload. Concepts of the loading surface and active process are used for structural deformation description. Structural deformation in the active process is determined by the associated law by analogy with the plasticity theory. Tensor increment of the structural deformation is required to be codirectional with the external normal to the loading surface, and the hardening parameter associated with the structural transformation correspondingly is required to be positive. The majority of models consider only formation of new martensitic meso-elements, not taking into account the development of the elements formed earlier. Meanwhile, experiments show that the development of martensitic elements can significantly influence on deformations. In the considered model, a special material function determines the relationship between the processes of formation and development of martensitic elements.

The temperature of the phase transition in shape memory alloys depends on the operating stress, therefore phase transition can occur at a constant temperature. The article examines the possibilities of the combined model for describing the phenomenon of superelasticity in titanium nickelide. The nonlinear dependence of deformations on stresses and the corresponding phase-structural transformation after reaching stress thresholds is modeled.

The results for different material functions are compared. Phase deformations are higher for material functions that take into account the development of martensitic elements. The model correctly describes the nonlinear growth of deformations under monotonically varying stresses at a constant temperature and the phenomenon of superelasticity. At monotonically increasing stresses at a constant temperature, the influence of the development of martensitic elements is less noticeable than at decreasing stresses.

Keywords: shape memory alloys; phase and structural transformations; strain hardening; translational hardening; superelasticity

ВВЕДЕНИЕ

В материалах с памятью формы неупругая деформация может накапливаться как за счет образования новых мартенситных элементов во время фазовых переходов, так и за счет переориентации существующих мартенситных элементов во время структурных переходов [1,2]. Несмотря на то, что и фазовая, и структурная деформация связана с зарождением и развитием мартенситных мезоэлементов, между фазовыми и структурными переходами наблюдаются существенные различия. Фазовые переходы в отличие от структурных, в определенном температурном диапазоне могут происходить при возрастающих, постоянных, нулевых или убывающих напряжениях [3,4]. Также для фазовых превращений не характерно явление деформационного упрочнения [5].

Для структурных переходов, напротив, характерно наличие упругой области в пространстве девиаторов напряжений, границы и центр которой могут смещаться при накоплении неупругих деформаций [5]. Как показывают результаты экспериментов, на данную поверхность нагружения влияют не только структурные, но и фазовые деформации: в [6,7] описано явление перекрестного упрочнения.

Большинство известных моделей материалов с памятью формы позволяют учесть только часть перечисленных особенностей процессов фазового и структурного деформирования, поскольку они либо полностью аналогичны теории пластичности, либо не учитывают эффекта деформационного упрочнения. Краткий обзор подобных моделей приведен в [8]. В [9] была предложена модель, в рамках которой деформированное состояние определяется единым параметром – фазово-структурной деформацией, но поверхность нагружения и аналог ассоциированного закона вводятся только для структурных деформаций, что позволяет адекватно описать процесс приращения фазовых деформаций при постоянных и уменьшающихся напряжениях, а также явление перекрестного упрочнения. Согласно условиям активного нагружения, которые вводятся в модели по аналогии с теориями пластичности, тензор приращений структурных деформаций должен быть сонаправлен внешней нормали к поверхности нагружения, а параметр упрочнения, связанный со структурным переходом, должен быть положителен. При этом предложенная модель имеет ряд особенностей, нехарактерных для теории пластического течения: уменьшение радиуса поверхности нагружения может происходить даже при увеличении неупругих деформаций, а увеличение радиуса – в том числе при уменьшении неупругих деформаций; также стоит отметить, что в рамках данной модели изменение поверхности нагружения может происходить в то время, как точка, соответствующая напряженному состоянию, находится в упругой области. В [10] было предложено расширение модели [9], позволяющее учесть не только изотропное, но и трансляционное упрочнение для процессов структурного деформирования, которое можно заметить на диаграммах, приведенных в [5].

В [11,12] было рассмотрено распространение модели [9,10] на случай учета развития мартенситных элементов. Это позволило описать явление ориентированного превращения, отмеченное в [13-16]. При прямом превращении под нагрузкой в сплаве с памятью формы образуются мартенситные ячейки, ориентация которых определяется приложенной нагрузкой. Если в некоторый момент прямого превращения снять нагрузку и продолжить охлаждение, то деформации продолжают расти в сторону ранее приложенного напряжения, но с меньшей интенсивностью. Данное явление можно объяснить тем, что при понижении температуры ранее сформированные мартенситные пластины продолжают развиваться, сохраняя свою ориентацию в пространстве. В [3] предлагается использовать специальную материальную функцию, определяющую соотношение между процессами зарождения и развития мартенситных элементов в зависимости от объемной доли мартенсита. Вид этой функции может быть определен по данным опыта на ориентированное превращение. Учет ориентированного превращения особенно важен для процессов, в которых прямое термоупругое превращение происходит при ступенчато или плавно уменьшающихся напряжениях.

Температура, при которой начинается фазовый переход в сплавах с памятью формы, зависит от действующих напряжений, поэтому прямой и обратный

фазовые переходы при определенных условиях могут происходить при постоянной температуре [17,18]. Пусть образец из сплава с памятью формы в начале нагружения находится полностью в аустенитном состоянии и подвергается монотонному изотермическому нагружению. При достижении напряжением некоторых пороговых значений наблюдается переход от линейной зависимости деформаций от напряжений к нелинейной (сверхупругость) и изменение структуры материала, что соответствует фазово-структурному переходу. На явлении сверхупругости в никеле-титановых сплавах основаны их многочисленные применения в аэрокосмической промышленности, сейсмостойком строительстве и медицине [19,20]. В данной работе объединенная модель, распространенная на случай учета развития мартенситных элементов [12] применяется для описания явления сверхупругости в никелиде титана.

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Приведем систему определяющих соотношений для фазово-структурного деформирования сплавов с памятью формы, введенную в [12], которая представляет собой расширение модели [10] на случай учета развития мартенситных элементов с помощью материальной функции $f(q)$, задающей соотношение между процессами зарождения и развития мартенситных элементов

$$d\varepsilon_{ij}^{phst'} = d\varepsilon_{ij}^{ph'} + d\varepsilon_{ij}^{st'}, \quad (1)$$

$$d\varepsilon_{ij}^{ph'} = \frac{3}{2} \rho_1 \frac{S'_{ij}}{S_i} \varphi_1(S_i) (1 - qf(q)) dq + f(q) \varepsilon_{ij}^{phst'} dq, \quad dq > 0, \quad (2)$$

$$d\varepsilon_{ij}^{ph'} = \frac{\varepsilon_{ij}^{phst'}}{q} dq, \quad dq < 0, \quad (3)$$

$$\rho_2 q \varphi_2(S^*) = \int \frac{S_{ij}}{S_i} d\varepsilon_{ij}^{phst'}, \quad S_i = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}}, \quad (4)$$

$$d\varepsilon_{ij}^{st'} = d\lambda S_{ij}, \quad \text{при } d\lambda > 0 \text{ и } S_i = S^*, \quad (5)$$

$$d\varepsilon_{ij}^{st'} = 0, \quad \text{при } d\lambda \leq 0 \text{ или } S_i < S^*, \quad (6)$$

$$\sigma'_{ij} = S_{ij} + r_{ij}, \quad q dr_{ij} = g d\varepsilon_{ij}^{st'}, \quad g > 0, \quad (7)$$

где $d\varepsilon_{ij}^{phst'}$ – приращение девиатора фазово-структурной деформации, складывающееся из приращения за счет фазового $d\varepsilon_{ij}^{ph'}$ и за счет структурного $d\varepsilon_{ij}^{st'}$ переходов; σ'_{ij} , S_{ij} , r_{ij} – девиаторы напряжений, активных напряжений и микронапряжений (r_{ij} – координаты центра поверхности нагружения в пространстве девиатора напряжений), q – объемная доля мартенсита, S^* соответствует радиусу поверхности нагружения, g – постоянная материала, определяющая трансляционное упрочнение, $f(q)$ – материальная функция, определяющая соотношение между процессами зарождения и развития мартенситных элементов, которая удовлетворяет ограничениям $0 \leq f(q) \leq 1/q$; $\varphi_1(S_i)$ – интегральная функция распределения интенсивности микронапряжений в представительном объеме СПФ в аустенитном фазовом состоянии, $\varphi_2(x)$ –

интегральная функция распределения интенсивности микронапряжений в представительном объеме СПФ в мартенситном фазовом состоянии. Предполагается, что функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ дифференцируемы, $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = 0$ при $x \leq 0$, монотонно возрастают и асимптотически стремятся к 1 при $x \rightarrow +\infty$.

Заметим, что в соответствии с приведенной моделью, изменение деформации за счет структурного перехода происходит лишь в случае, когда точка, соответствующая напряженному состоянию, находится на поверхности нагружения, радиус которой S^* определяется соотношением (4); (5) представляет собой ассоциированный закон для приращения деформаций за счет структурного перехода; (7) определяет движение центра поверхности нагружения. Согласно (7) центр поверхности нагружения для структурных деформаций смещается только при изменении неупругих деформаций за счет структурного перехода.

К данным соотношениям необходимо добавить зависимость параметра фазового состава q от напряжений и температуры. В случае пренебрежения изменением объемного и сдвигового модулей при фазовом переходе термодинамические соотношения, приведенные в [3,21], принимают вид

$$q = \frac{1}{2}(1 - \cos(\pi t)),$$

$$t = \frac{M_s^\sigma - T_0}{M_s^0 - M_f^0}, \quad dq > 0,$$
(8)

$$M_s^\sigma = M_s^0 + \frac{\frac{3}{2} \rho_1 \frac{S'_{ij}}{S_i} \varphi_1(S_i) (1 - qf(q)) \sigma'_{ij} + f(q) \varepsilon_{ij}^{phstr} \sigma'_{ij}}{\Delta S_0},$$
(9)

$$t = \frac{A_f^\sigma - T_0}{A_f^0 - A_s^0}, \quad dq < 0,$$

$$A_s^\sigma = A_s^0 + \frac{\varepsilon_{ij}^{phstr} \sigma'_{ij}}{q \Delta S_0},$$
(10)

где T_0 – текущее значение температуры, M_s^0 , M_f^0 , A_s^0 , A_f^0 – температуры начала и окончания соответственно прямого и обратного превращения в отсутствие напряжений (верхний индекс ноль); те же символы с верхним индексом σ соответствуют наличию напряжений; ΔS_0 – объемная плотность энтропии фазового перехода.

Рассмотрим процесс фазового перехода. Если приращение неупругих деформаций за счет структурного перехода отсутствует, т.е. $d\varepsilon_{ij}^{st} = 0$, то, согласно (7), трансляционное упрочнение отсутствует, $dr_{ij} = 0$, $\sigma'_{ij} = S_{ij}$. В этом случае $d\varepsilon_{ij}^{phst'} = d\varepsilon_{ij}^{ph'}$ и описание процесса сводится к случаю, рассмотренному в [11], где трансляционное упрочнение не учитывалось.

Во время структурного перехода, идущего одновременно с фазовым переходом, параметр $d\lambda$, как было показано в [12], выражается следующим образом

$$d\lambda = 3 \frac{\frac{3}{2} AqS_{kl} d\sigma'_{kl} - S_i Bdq}{S_i^2 [2 + 3Ag]}, \quad (11)$$

$$A = \rho_2 \varphi'_2(S_i),$$

$$B = B^+ = \rho_1 \varphi_1(S_i) (1 - qf(q)) + \frac{S_{mn}}{S_i} f(q) \varepsilon_{mn}^{phst'} - \rho_2 \varphi_2(S_i), \quad dq > 0,$$

$$B = B^- = \frac{S_{ij}}{S_i} \frac{\varepsilon_{ij}^{phst'}}{q} - \rho_2 \varphi_2(S_i), \quad dq < 0.$$

Таким образом, с учетом возрастания функции φ_2 дифференциальное условие активного нагружения $d\lambda > 0$ сводится к выполнению неравенства

$$\frac{3}{2} AqS_{kl} d\sigma'_{kl} > S_i Bdq. \quad (12)$$

Подставляя (11) в (5), можно выразить структурные деформации

$$d\varepsilon_{ij}^{st} = \frac{3}{2} \frac{3AqS_{kl}S_{ij} d\sigma'_{kl} - 2S_i BS_{ij} dq}{[3Ag + 2]S_i^2}. \quad (13)$$

СЛУЧАЙ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОГО НАГРУЖЕНИЯ

Для иллюстрации возможностей модели рассмотрим случай пропорционального нагружения. Нагружение считается пропорциональным, если выполнены условия

$$\sigma'_{ij} = \sigma \cdot \sigma_{ij}^0, \quad \sigma_{ij}^0 = const; \quad \frac{3}{2} \sigma_{ij}^0 \sigma_{ij}^0 = 1, \quad |\sigma| = \sigma_i. \quad (14)$$

Пусть для определенности девиатор σ_{ij}^0 выбран так, что $\sigma > 0$. При таком нагружении девиатор фазово-структурной деформации также будет изменяться пропорционально, т.е. будут выполняться равенства

$$\varepsilon_{ij}^{phst'} = \varepsilon \cdot \varepsilon_{ij}^0; \quad \varepsilon_{ij}^0 = const;$$

$$\frac{2}{3} \varepsilon_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^0 = 1, \quad |\varepsilon| = \varepsilon_i, \quad \varepsilon_{ij}^0 = \frac{3}{2} \sigma_{ij}^0, \quad (15)$$

$$d\varepsilon_{ij}^{st} = \varepsilon_{ij}^0 d\varepsilon^{st}; \quad d\varepsilon_{ij}^{ph} = \varepsilon_{ij}^0 d\varepsilon^{ph}; \quad d\varepsilon = d\varepsilon^{ph} + d\varepsilon^{st}. \quad (16)$$

Подстановка (14)-(15) в уравнения модели (7) приводит к формулам

$$r_{ij} = r \sigma_{ij}^0, \quad qdr = \frac{3}{2} g d\varepsilon^{st}, \quad S_{ij} = S \sigma_{ij}^0, \quad S = \sigma - r, \quad S_i = |S|. \quad (17)$$

Соотношения (2)-(3) для приращения фазовых деформаций в случае пропорционального нагружения упрощаются

$$d\varepsilon^{ph} = \text{sign}(S) \rho_1 \varphi_1(|S|) (1 - qf(q)) dq + f(q) \varepsilon^{phst} dq, \quad q > 0, \quad (18)$$

$$d\varepsilon^{ph'} = \frac{\varepsilon^{phst'}}{q} dq, \quad dq < 0. \quad (19)$$

Соотношения для структурных деформаций во время фазового перехода (13) и условие активного нагружения (12) при пропорциональном нагружении принимают вид

$$d\varepsilon^{st} = 2 \frac{Aqd\sigma - Bdq}{[3Ag + 2]}, \quad (20)$$

$$\rho_2\varphi_2'(S)qd\sigma - Bdq > 0, \quad (21)$$

$$A = \rho_2\varphi_2'(S),$$

$$B = B^+, dq > 0; \quad B = B^-, dq < 0,$$

$$B^+ = \rho_1\varphi_1(S) - \rho_2\varphi_2(S) - qf(q)\rho_1\varphi_1(S) + f(q)\varepsilon, \quad B^- = \frac{\varepsilon^{phst'}}{q} - \rho_2\varphi_2(S).$$

Как было показано в [12], уравнение (4) для фазово-структурных деформаций в случае активного процесса прямого превращения при пропорциональном нагружении упрощается

$$\rho_2 d[q\varphi_2(S^*)] = d\varepsilon^{phst}. \quad (22)$$

Из уравнения (22) можно определить текущий радиус поверхности нагружения S^* .

Соотношения (9)-(10) в случае пропорционального нагружения также упрощаются

$$M_s^\sigma = M_s^0 + \frac{\sigma E}{\Delta S_0}, \quad (23)$$

$$E = \rho_1\varphi_1(S)(1 - qf(q)) + f(q)\varepsilon^{phst}.$$

Для составления системы дифференциальных уравнений, удобно представить $\frac{dS}{d\sigma}$, используя (17) и (20), в виде суммы двух слагаемых

$$\frac{dS}{d\sigma} = S_1(q, S, \varepsilon^{phst}, \sigma) + S_2(q, S, \varepsilon^{phst}, \sigma) \frac{dq}{d\sigma}, \quad (24)$$

$$S_1 = \frac{2}{[3Ag + 2]}, \quad S_2 = \frac{3gB}{q[3Ag + 2]}.$$

Аналогично, учитывая (23) и (24), $\frac{dM_s^\sigma}{d\sigma}$ в случае активного процесса можно представить в виде

$$\frac{dM_s^\sigma}{d\sigma} = M_1(q, S, \varepsilon^{phst}, \sigma) + M_2(q, S, \varepsilon^{phst}, \sigma) \frac{dq}{d\sigma}. \quad (25)$$

Для материальных функций вида $f(q) = a$ выражения для M_1 и M_2 принимают вид

$$M_1 = \frac{E}{\Delta S_0} + \frac{\sigma}{\Delta S_0} \left[\rho_1\varphi_1'(S)(1 - aq)S_1 + \frac{2aAq}{[3Ag + 2]} \right];$$

$$M_2 = \frac{\sigma}{\Delta S_0} \left[\rho_1\varphi_1'(S)(1 - aq)S_2 - a\rho_1\varphi_1(S) + E - \frac{2aB}{[3Ag + 2]} \right].$$

Наконец, используя (8), (23), (25), выразим $\frac{dq}{d\sigma}$ как функцию от $q, S, \varepsilon^{phst}, \sigma$

$$\frac{dq}{d\sigma}(q, S, \varepsilon^{phst}, \sigma) = \frac{\pi \sin(\pi t) M_1}{2(M_s^0 - M_f^0) - \pi \sin(\pi t) M_2}. \quad (26)$$

Для обратного фазового перехода можно получить формулу, соответствующую формуле (26) при замене в ней $(M_s^0 - M_f^0)$ на $(A_f^0 - A_s^0)$.

ОПИСАНИЕ СВЕРХУПРУГОСТИ ПРИ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОМ НАГРУЖЕНИИ

Рассмотрим прямой и последующий обратный фазовый переход в процессе изотермического пропорционального монотонного нагружения и последующей разгрузки СПФ при постоянной температуре $T = T_0 > A_f^0$, $T_0 = const$, более высокой, чем A_f^0 .

Значение напряжения σ_s^M , при котором начнется мартенситный переход, определяется формулой (23), которая с учетом нулевых начальных условий, то есть с учетом отсутствия фазово-структурных деформаций до начала нагружения, принимает вид

$$T_0 = M_s^\sigma = M_s^0 + \frac{\rho_1 \sigma \varphi_1(S)(1 - qf(q))}{\Delta S_0}.$$

Примерное значение напряжения $\tilde{\sigma}_f^M$, при котором заканчивается мартенситный переход, можно таким же образом определить из уравнения

$$T_0 = M_f^0 + \frac{\rho_1 \tilde{\sigma}_f^M \varphi_1(\tilde{\sigma}_f^M)(1 - qf(q))}{\Delta S_0}.$$

Для определения точного значения σ_f^M в соответствии с моделью необходимо знать зависимость фазово-структурных деформаций от напряжений $\varepsilon^{phstr}(\sigma)$, которая будет получена на следующем этапе решения.

В начале нагружения условия активного нагружения не выполняются, структурные деформации отсутствуют. Сформулируем систему дифференциальных уравнений. На первом этапе нагружения $\varepsilon^{st} = 0$, $d\varepsilon^{st} = 0$, $r = 0$, $dr = 0$, $S = \sigma$. Тогда используя (17), (18) и (26), получаем следующую систему дифференциальных уравнений для зависимостей q , $\varepsilon = \varepsilon^{phst}$ от напряжения σ

$$\begin{aligned} \frac{dq}{d\sigma} &= \frac{\pi \sin(\pi t) M_1(q, S, \varepsilon, \sigma)}{2(M_s^0 - M_f^0) - \pi \sin(\pi t) M_2(q, S, \varepsilon, \sigma)}; \\ \frac{d\varepsilon}{d\sigma} &= E(q, S, \varepsilon, \sigma) \frac{\pi \sin(\pi t) M_1(q, S, \varepsilon, \sigma)}{2(M_s^0 - M_f^0) - \pi \sin(\pi t) M_2(q, S, \varepsilon, \sigma)}, \end{aligned} \quad (27)$$

где функции $E(q, S, \varepsilon)$, $M_1(q, S, \varepsilon)$, $M_2(q, S, \varepsilon)$ определены выше в формулах (23) и (25). Заметим, что на данном этапе решения задачи уравнения модели сводятся к уравнениям модели [11], не учитывающей трансляционный перенос. Если при достижении некоторого значения σ^* в течение процесса начнут выполняться условия активного нагружения, появятся структурные деформации, поэтому, решив систему уравнений (27) с нулевыми начальными условиями

на промежутке $[\sigma_s^M, \tilde{\sigma}_f^M]$ необходимо проверить выполнение условий активного нагружения на этом промежутке, используя полученные зависимости деформаций и параметра фазового состава от напряжений и определить σ^* , если оно достигается. Для появления структурных деформаций необходимо выполнение двух условий: 1) точка, соответствующая текущему тензору напряжений, должна находиться на поверхности нагружения, радиус которой определяется уравнением (22); 2) должно быть выполнено дифференциальное условие (21), т.е. параметр упрочнения $d\lambda$ должен быть положительным.

Пусть σ^* – значение напряжения, при котором начинают выполняться оба условия активного нагружения. Для фазово-структурного перехода система дифференциальных уравнений для определения зависимостей $\varepsilon^{phst}(\sigma) = \varepsilon(\sigma)$, $q(\sigma)$, $S(\sigma)$ может быть составлена из уравнений (18)-(20), (24) и (26)

$$\frac{dq}{d\sigma} = \frac{\pi \sin(\pi t) M_1(q, S, \varepsilon, \sigma)}{2(M_s^0 - M_f^0) - \pi \sin(\pi t) M_2(q, S, \varepsilon, \sigma)};$$

$$\frac{dS}{d\sigma} = S_1(q, S, \varepsilon, \sigma) + S_2(q, S, \varepsilon, \sigma) \frac{dq}{d\sigma}; \quad (28)$$

$$\frac{d\varepsilon}{d\sigma} = E(q, S, \varepsilon, \sigma) \frac{dq}{d\sigma} + 2 \frac{A(q, S, \varepsilon, \sigma)q - B(q, S, \varepsilon, \sigma) \frac{dq}{d\sigma}}{[3A(q, S, \varepsilon, \sigma)g + 2]},$$

где функции $E(q, S, \varepsilon)$, $A(q, S, \varepsilon)$, $B(q, S, \varepsilon)$, $M_1(q, S, \varepsilon)$, $M_2(q, S, \varepsilon)$ определены выше в формулах (20)-(21), (23)-(24) и (26). Сформулируем начальные условия для системы (28). На первом этапе нагружения структурные деформации отсутствуют, следовательно, согласно (19) трансляционный сдвиг центра поверхности нагружения отсутствует, $dr=0$, значит в конце первого этапа $S = \sigma = \sigma^*$. Таким образом, начальные условия для второго этапа нагружения, на котором выполняются условия активного нагружения, можно сформулировать в виде $S = \sigma^*$, $\varepsilon = \varepsilon_1(\sigma^*)$, где $\varepsilon_1(\sigma)$ – зависимость фазовых деформаций от напряжений, полученная в результате решения системы (27), σ^* – значение напряжения, при котором начинают выполняться оба условия активного нагружения. Решив систему (28) на промежутке $[\sigma^*, \tilde{\sigma}_f^M + \delta]$ и получив зависимость фазово-структурных деформаций от напряжений на втором этапе нагружения $\varepsilon_2(\sigma)$, необходимо уточнить границы промежутка, на котором выполняются условия активного нагружения и значение напряжения, при котором заканчивается фазовый переход.

Заметим, что при достижении некоторого значения σ^{**} второе условие активного нагружения, которое выражается неравенством (21) и соответствует положительности параметра $d\lambda$, может перестать выполняться. В таком случае на последнем этапе нагружения деформации будут увеличиваться только за счет фазового перехода и описываться системой уравнений (27).

Рассмотрим обратный фазовый переход, вызванный монотонным уменьшением напряжений при той же постоянной температуре T_0 после окончания прямого фазового перехода. При учете только фазовых и структурных

деформаций, в течение монотонного снижения напряжений от σ_f^M до σ_s^A деформация не изменяется. Значение напряжения, при котором начнется обратный фазовый переход, можно найти, решив уравнение (23), подставив в него предварительно значение фазово-структурных деформаций и активных напряжений S на момент окончания прямого перехода, и $q = 1$.

При обратном превращении при уменьшающихся напряжениях структурного превращения не происходит, $d\varepsilon^{st} = 0$, $dr = 0$, $S = \sigma - (\sigma_M^f - S_f^M)$, где S_f^M – значение на момент окончания прямого перехода. Используя (17), (19) и (26), получаем следующую систему дифференциальных уравнений для зависимостей q и $\varepsilon = \varepsilon^{phst}$ от напряжения σ

$$\frac{dq}{d\sigma} = \frac{\pi \sin(\pi t) A_1(q, \varepsilon, \sigma)}{2(A_f^0 - A_s^0) - \pi \sin(\pi t) A_2(q, \varepsilon, \sigma)}; \quad (29)$$

$$\frac{d\varepsilon}{d\sigma} = \frac{\varepsilon}{q} \frac{dq}{d\sigma},$$

где функции M_1 и M_2 определены выше в формуле (25). Так как структурные деформации на данном этапе нагружения отсутствуют, и в уравнения, описывающие обратное превращение, не входит функция $f(a)$, решение системы (29) совпадает с решением на основе модели, не учитывающей развитие мартенситных элементов, следовательно, не представляет интереса для данного исследования.

Задача была решена для следующих значений материальных констант, соответствующих никелиду титана: $M_s^0 = 40$ С, $M_f^0 = 20$ С, $A_s^0 = 50$ С, $A_f^0 = 70$ С, $\Delta S_0 = 644$ МПа/К. В качестве функций распределения интенсивности микронапряжений $\varphi_1(S)$ и $\varphi_2(S)$ для расчетов использовались интегральные функции экспоненциального распределения и распределения Вейбулла

$$\varphi_1(S) = 1 - \exp\left(-\frac{S}{\sigma_{01}}\right), \quad \varphi_2(S) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{S}{\sigma_{02}}\right)^\alpha\right].$$

Для построения графиков использовались значения констант $\alpha = 2.5$, $\rho_1 = \rho_2 = 0.085$, $\sigma_{01} = 147$ МПа, $\sigma_{02}/\sigma_{01} = 2.04$, $G = g\rho_2/\sigma_{02} = 0.75$. Были рассмотрены материальные функции вида $f(q) = a = const$; для построения графиков использовались значения материальных констант $a = 0$, $a = 0.35$ и $a = 0.7$, при которых достаточно хорошо описывается явление ориентированного превращения в никелиде титана.

Значения напряжения σ_s^M , соответствующие началу мартенситного перехода для рассмотренных температур, и σ^* , при котором начинают выполняться оба условия активного нагружения, соответствующие началу мартенситного перехода для рассмотренных температур, приведены в таблице 1. Для рассмотренных значений константы a значения σ_s^M , как и значения σ^* , отличаются на десятые доли процента. В рассмотренных случаях условия активного нагружения оказываются выполнены до конца процесса. Значения

напряжения σ_f^M , соответствующие окончанию мартенситного перехода для рассмотренных температур, приведены в таблице 2.

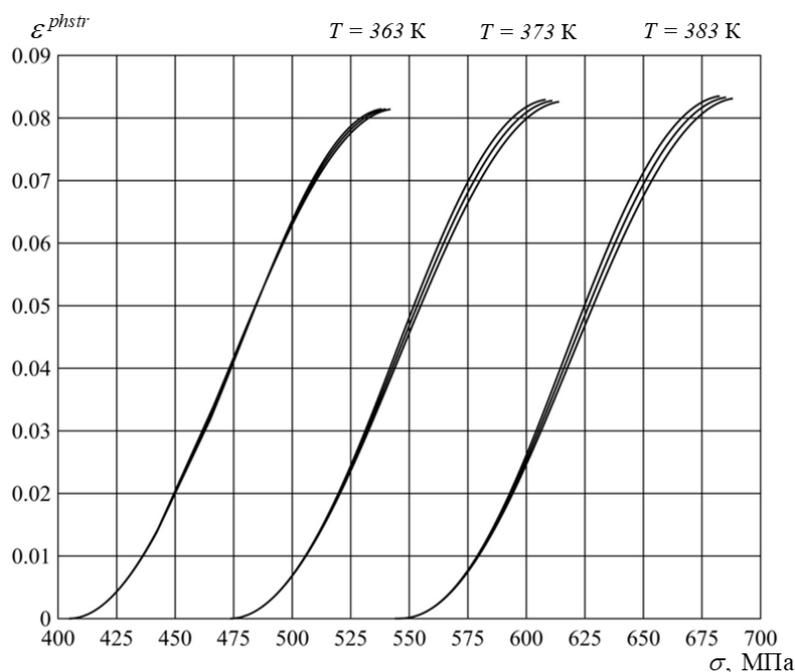


Рис.1. Фазово-структурные деформации в зависимости от напряжений в случае прямого превращения под действием монотонно увеличивающегося напряжения при постоянной температуре 353 К, 363 К и 373 К соответственно. Графики деформаций построены для материальных функций снизу вверх $f(q) = 0, f(q) = 0.35, f(q) = 0.7$ соответственно.

Таблица 1.

T	363 К	373 К	383 К
$\sigma_s^M, \text{МПа}$	405	473	544
$\sigma^*, \text{МПа}$	466	481	544

Можно заметить, что при увеличении температуры величина фазово-структурных деформаций увеличивается. При увеличении материального параметра a величина фазовых и фазово-структурных деформаций также увеличивается. Разница между значениями фазово-структурных деформаций для разных значений a увеличивается при повышении температуры. Для рассмотренных материальных функций и температур она не превышает 5%. Полученные графики показывают, что модель качественно правильно описывает нелинейный рост деформаций под действием монотонно изменяющихся напряжений при постоянной температуре и явление сверхупругости.

Таблица 2.

T	363 К	373 К	383 К
$\sigma_f^M, \text{МПа}, a = 0$	542	614	688
$\sigma_f^M, \text{МПа}, a = 0.35$	540	611	685
$\sigma_f^M, \text{МПа}, a = 0.7$	538	608	683

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Установлено, что объединенная модель фазового и структурного деформирования сплавов с памятью формы, распространенная на случай учета трансляционного упрочнения и развития мартенситных элементов, качественно правильно описывает явление сверхупругости. При монотонно возрастающих напряжениях при постоянной температуре влияние развития мартенситных элементов незначительно, в отличие от случая убывающих напряжений. В [11] было показано, что учет роста мартенситных элементов с помощью специальной материальной функции позволяет описать явление ориентированного превращения, а также адекватно смоделировать перекрестное упрочнение во время прямого превращения при убывающих напряжениях. Следует заметить, что в случае монотонно убывающих напряжений структурные деформации не изменяются, поскольку не выполняются условия активного нагружения, и трансляционный перенос отсутствует. В этом случае рассматриваемая модель с трансляционным упрочнением сводится к модели, не учитывающей трансляционного упрочнения, приведенной в [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. Thamburaja P. *Constitutive equations for martensitic reorientation and detwinning in shape-memory alloys* // J. of the Mechanics and Physics of Solids. – 2005. – Vol.53. – Pp.825-856.
2. Liu Y., Xie Z. *Detwinning in shape memory alloy* // Progress in Smart Materials and Structures. – 2007. – Chapter 3. – Pp.29-65.
3. Мовчан А.А., Казарина С.А. *Материалы с памятью формы как объект механики деформируемого твердого тела: экспериментальные исследования, определяющие соотношения, решение краевых задач* // Физическая мезомеханика. – 2012. – Т.15. – №1. – С.105-116.
4. Лихачев В.А., Патрикеев Ю.И., Щуплецов В.Н. *Эффект ориентированного превращения в никелиде титана* // Физика металлов и металловедение. – 1986. – Т.61. – Вып.1. – С.121-126.
5. Каменцева З.П., Кузьмин С.Л., Лихачев В.А. *Исследование деформационного упрочнения никелида титана* // Проблемы прочности. – 1980. – №9. – С.87-91.
6. Мовчан А.А., Сильченко А.Л., Казарина С.А. *Экспериментальное исследование и теоретическое моделирование эффекта перекрестного упрочнения сплавов с памятью формы* // Деформация и разрушение материалов. – 2017. – №3. – С.20-27.
7. Мовчан А.А., Казарина С.А., Сильченко А.Л. *Эффект перекрестного упрочнения при сжатии* // Деформация и разрушение материалов. – 2019. – №4. – С.2-9.
8. Cisse C., Zaki W., Zineb T.B. *A review of constitutive models and modeling techniques for shape memory alloys* // Intern. J. of Plasticity. – 2016. – Vol.76. – Pp.244-284.
9. Мовчан А. А. *Модель влияния фазового механизма деформирования на структурный в сплавах с памятью формы* // Деформация и разрушение материалов. – 2019. – №7. – С.14-23.
10. Мовчан А. А. *Феноменологическая модель изменения фазово-структурных деформаций в сплавах с памятью формы* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2020. – №4. – С.140-151.

11. Гаганова Н.В. *Распространение модели деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях на случай учета развития мартенситных элементов* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2019. – Т.25. – №4. – С.543-562.
12. Гаганова Н.В. *Учет развития мартенситных элементов в объединенной модели деформирования сплавов с памятью формы в случае трансляционного упрочнения* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2021. – Т.27. – №2. – С.295-308.
13. Лихачев В.А., Малинин В.Г., Овчаренко С.Я. *Деформации ориентированного превращения у сплава $CuAlMn$* / Материалы с новыми функциональными свойствами. Материалы семинара. – Новгород-Боровичи, 1990. – С.100-101.
14. Лихачев В.А., Малинин В.Г., Малинина Н.А. *Деформация ориентированного превращения в условиях сложного напряженно-деформированного состояния* / XXIX Межреспубликанский семинар «Актуальные проблемы прочности». Функционально-механические свойства материалов и их компьютерное конструирование. Материалы семинара. – Псков, 1993. – С.235-238.
15. Беляев С.П., Ермолаев В.П., Кузьмин С.Л., Лескина М.Л., Лихачев В.А., Пульнев С.А. *Деформационные свойства металлов с различной кинетикой мартенситных превращений* / XXV Всесоюзный семинар «Актуальные проблемы прочности». Прогнозирование механического поведения материалов. Сборник трудов. – 1991. – Т.1. – С.51-56.
16. Беляев С.П., Ермолаев В.П., Кузьмин С.Л., Лескина М.Л., Лихачев В.А., Пульнев С.А. *Деформационные свойства металлов с различной кинетикой мартенситных превращений* / XXV Всесоюзный семинар «Актуальные проблемы прочности». Прогнозирование механического поведения материалов. Сборник трудов. – 1991. – Т.2. – С.121-126.
17. Otsuka K., Shimizu K. *Pseudoelasticity and shape memory effects in alloys* // Materials Science. – 1986. – Vol.31. – No.3. – Pp.93-114.
18. Ping-Hua L., Tobushi H., Tanaka K., Hattori T., Makita M. *Pseudoelastic Behaviour of TiNi Shape Memory Alloy Subjected to Strain Variations* // J. of Intelligent Material Systems and Structures. – 1994. – Vol.5. – Pp.694-701.
19. Wei Cai, Yufeng Zheng, Xianglong Meng, Liancheng Zhao. *Superelasticity in TiNi Alloys and Its Applications in Smart Systems* // Materials Science Forum. – 2005. – Vol.475-479. – Pp.1915-1920.
20. Janke L., Czaderski C., Motavalli M., Ruth J. *Applications of shape memory alloys in civil engineering structures – Overview, limits and new ideas* // Materials and Structures. – 2005. – Vol.38. – Pp.578-592.
21. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г., Казарина С.А., Тант Зин Аунг. *Определяющие соотношения для сплавов с памятью формы – микромеханика, феноменология, термодинамика* // Ученые записки казанского университета. – 2010. – Т.152. – Кн.4. – С.180-194.

REFERENCES

1. Thamburaja P. *Constitutive equations for martensitic reorientation and detwinning in shape-memory alloys*. J. of the Mechanics and Physics of Solids, 2005, Vol.53, Pp.825-856.
2. Liu Y., Xie Z. *Detwinning in shape memory alloy*. Progress in Smart Materials and Structures, 2007, Chapter 3, Pp.29-65.

3. Movchan A.A., Kazarina S.A. *Shape memory materials as an object of solid state mechanics: experimental study, constitutive relations, solution of boundary value problems*. Physical mesomechanics, 2012, Vol.15, No.3-4, Pp.214-223.
4. Likhachev V.A., Patrikeyev Yu.I., Shupletsov V.N. *Ehffekt orientirovannogo prevrashheniya v nikelide titana [Oriented transformation effect in titanium nickelide]*. Fizika metallov i metallovedenie, 1986, Vol.61, Iss.1, Pp.121-126.
5. Kamenceva Z.P., Kuz'min S.L., Likhachev V.A. *Issledovanie deformatsionnogo uprochneniya nikelida titana [Investigation of strain hardening in titanium nickelide]*. Problemy prochnosti, 1980, No.9, Pp.87-91.
6. Movchan A.A., Sil'chenko A.L., Kazarina S.A. *Experimental study and theoretical simulation of the cross-hardening effect in shape memory alloys*. Russian Metallurgy (Metally), 2017, No.10, Pp.779-784.
7. Movchan A.A., Kazarina S.A., Sil'chenko A.L. *Cross Hardening of a Shape Memory Alloy during Compression*. Russian Metallurgy (Metally), 2019, Vol.2019, No.10, Pp.967-973.
8. Cisse C., Zaki W., Zineb T.B., *A review of constitutive models and modeling techniques for shape memory alloys*. Intern. J. of Plasticity, 2016, Vol.76, Pp.244-284.
9. Movchan A.A. *Model for the Effect of the Phase Mechanism of Deformation on the Structural Mechanism in Shape Memory Alloys*. Russian Metallurgy (Metally), 2020, No.4, Pp.282-290.
10. Movchan A.A. *Phenomenological Model of Changes in Phase-Structural Deformations in Shape Memory*. Mechanics of Solids, 2020, No.4, Pp.573-583.
11. Gaganova N.V. *Rasprostranenie modeli deformirovaniya splavov s pamyat'yu formy pri fazovykh i strukturnykh prevrashheniyakh na sluchaj ucheta razvitiya martensitnykh ehlementov [Shape memory alloys constitutive model extension for considering development of the martensitic elements during phase and structural transformation]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2019, Vol.25, No.4, Pp.543-562.
12. Gaganova N.V. *Uchet razvitiya martensitnykh ehlementov v ob"edinennoj modeli deformirovaniya splavov s pamyat'yu formy v sluchae translyatsionnogo uprochneniya [Consideration of martensitic elements development in the combined model of shape memory alloys in the case of translational hardening]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2021, Vol.27, No.2, Pp.295-308.
13. Likhachev V.A., Malinin V.G., Ovcharenko S.Ya. *Deformatsii orientirovannogo prevrashheniya u splava CuAlMn [Deformations of the oriented transformation in the CuAlMn alloy]*. Materialy s novymi funktsional'nymi svojstvami. Materialy seminar. Novgorod-Borovichy, 1990, Pp.100-101.
14. Likhachev V.A., Malinin V.G., Malinina N.A. *Deformatsiya orientirovannogo prevrashheniya v usloviyakh slozhnogo napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya [Oriented transformation deformation under conditions of a complex stress-strain state]*. XXIX Mezhrespublikanskij seminar "Aktual'nye problemy prochnosti". Funktsional'no-mekhanicheskie svojstva materialov i ikh komp'yuternoe konstruirovaniye. Materialy seminar. Pskov, 1993, Pp.235-238.
15. Belyaev S.P., Ermolaev V.P., Kuz'min S.L., Leskina M.L., Likhachev V.A., Pul'nev S.A. *Deformatsionnye svojstva metallov s razlichnoj kinetikoju martensitnykh prevrashhenij [Deformation properties of metals with different kinetics of martensitic transformations]*. XXV Vsesoyuznyj seminar "Aktual'nye

- problemy prochnosti". Prognozirovanie mekhanicheskogo povedeniya materialov. Sbornik trudov, 1991, Vol.1, Pp.51-56.
16. Belyaev S.P., Ermolaev V.P., Kuz'min S.L., Leskina M.L., Likhachev V.A., Pul'nev S.A. *Deformatsionnye svoystva metallov s razlichnoj kinetikoj martensitnykh prevrashhenij [Deformation properties of metals with different kinetics of martensitic transformations]*. XXV Vsesoyuznyj seminar "Aktual'nye problemy prochnosti". Prognozirovanie mekhanicheskogo povedeniya materialov, Sbornik trudov, 1991, Vol.2, Pp.121-126.
 17. Otsuka K., Shimizu K. *Pseudoelasticity and shape memory effects in alloys*. Materials Science, 1986, Vol.31, No.3, Pp.93-114.
 18. Ping-Hua L., Tobushi H., Tanaka K., Hattori T., Makita M. *Pseudoelastic Behaviour of TiNi Shape Memory Alloy Subjected to Strain Variations*. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 1994, Vol.5, Pp.694-701.
 19. Wei Cai, Yufeng Zheng, Xianglong Meng, Liancheng Zhao. *Superelasticity in TiNi Alloys and Its Applications in Smart Systems*. Materials Science Forum, 2005, Vol.475-479, Pp.1915-1920.
 20. Janke L., Czaderski C., Motavalli M., Ruth J. *Applications of shape memory alloys in civil engineering structures – Overview, limits and new ideas*. Materials and Structures, 2005, Vol.38, Pp. 578-592.
 21. Movchan A.A., Sil'chenko A.L., Kazarina S.A., Thant Zin Aung. *Opredelyayushhie sootnosheniya dlya splavov s pamyat'yu formy – mikromekhanika, fenomenologiya, termodinamika [Shape Memory Alloys Constitutive Relations – Micromechanics, Phenomenology, Thermodynamics]*. Uchenye zapiski kazanskogo universiteta, 2010, Vol.152, No.4, Pp.180-194.

Поступила в редакцию 04 октября 2021 года.

Сведения об авторе:

Гаганова Наталья Валерьевна – соискатель, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова», г. Москва, Россия; e-mail: gaganova-nv@yandex.ru