

МОДЕЛЬ СИЛОВОГО КОНТАКТА КОМПОЗИТНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ТВЁРДОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ С УЧЁТОМ КОМБИНИРОВАННОГО АНИЗОТРОПНОГО СУХОГО ТРЕНИЯ*

Киреенков А.А.¹, Федотенков Г.В.^{2,3}

¹ФГБУН Институт проблем механики РАН им. А.Ю. Ишлинского,
г. Москва, Россия

²НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия

³ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Рассматривается движение упругой композитной оболочки по твердой шероховатой поверхности при наличии комбинированного анизотропного сухого трения. Эта модель может быть использована для исследования динамики пневматиков (авиационных и автомобильных) в условиях сложной кинематики, а также различных управляемых робототехнических систем. Для корректного учета влияния анизотропии коэффициентов сухого трения в таких системах, требуется построение приближенных аналитических моделей силового состояния внутри пятна контакта с учетом реального распределения нормальных и касательных контактных напряжений. Распределение контактного давления строится с использованием уравнения С.А. Амбарцумяна для трансверсально изотропной сферической оболочки. Это уравнение модифицируется путём введения дополнительных соотношений для приведённого контактного давления и нормальных перемещений. Построение разрешающего интегрального уравнения относительно контактного давления основано на принципе суперпозиции и методе функций Грина. Для этого строится соответствующая функция Грина, представляющая собой нормальные перемещения оболочки как решение задачи о воздействии сосредоточенного давления. Функция Грина так же, как и контактное давление, разыскивается в виде разложений в ряды по полиномам Лежандра с учётом дополнительных соотношений для приведённого контактного давления и нормальных перемещений. С использованием функции Грина построено разрешающее задачу интегральное уравнение. В результате задача состоит в определении коэффициентов разложения в ряд приведённого контактного давления. Ограничиваясь конечным числом членов рядов разложений, с использованием дискретизации области контакта и свойств полиномов Лежандра задача сводится к решению системы алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения для приведённого контактного давления. После этого из дополнительного соотношения определяются коэффициенты разложения искомого контактного давления в ряд по полиномам Лежандра.

Ключевые слова: сферическая композитная оболочка; контактная задача; теории многокомпонентного анизотропного трения

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 20-08-01120 А, 19-08-00438 А) в рамках государственной программы поддержки научных исследований АААА-А20-120011690138-6.

A MODEL OF THE FORCE CONTACT OF A COMPOSITE SPHERICAL SHELL WITH A SOLID SURFACE TAKING INTO ACCOUNT THE COMBINED ANISOTROPIC DRY FRICTION

Kireenkov Alexey A.¹, Fedotenkov Grigory V.^{2,3}

¹*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

²*Research Institute of Mechanics Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

³*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia*

ABSTRACT

The motion of an elastic composite shell over a hard rough surface in the presence of combined anisotropic dry friction is considered. This model can be used to study the dynamics of pneumatics (aviation and automotive) in conditions of combined kinematics, as well as various control robotics systems. To correctly account for the influence of the anisotropy of dry friction coefficients in such systems, it is required to construct approximate analytical models of the force state inside the contact spot, taking into account the real distribution of normal and tangential contact stresses. The contact pressure distribution is constructed using the S.A. Ambartsumyan for a transversally isotropic spherical shell. This equation is modified by introducing additional relationships for the reduced contact pressure and normal displacements. The construction of the resolving integral equation for the contact pressure is based on the principle of superposition and the method of Green's functions. For this, the corresponding Green's function is constructed, which is the normal displacement of the shell as a solution to the problem of the effect of concentrated pressure. Green's function as well as the contact pressure, it is sought in the form of series expansions in Legendre polynomials, taking into account additional relations for the reduced contact pressure and normal displacements. Using the Green's function, an integral equation solving the problem is constructed. As a result, the problem is reduced to determining the expansion coefficients in a series of the reduced contact pressure. Restricting ourselves to a finite number of terms in the series of expansions, using the discretization of the contact area and the properties of Legendre polynomials, the problem is reduced to solving a system of algebraic equations for the expansion coefficients for the reduced pressure. After that, from the additional relation, the coefficients of the required expansion of the contact pressure in a series in Legendre polynomials are determined.

Keywords: spherical composite shell; contact problem; theories of multicomponent anisotropic friction

ВВЕДЕНИЕ

Задача о движении упругой композитной оболочки по твердой шероховатой поверхности под влиянием комбинированного анизотропного трения имеет многочисленные инженерные приложения. Эта модель может быть использована для исследования динамики пневматиков (авиационных и автомобильных) в условиях сложной кинематики, а также различных управляемых робототехнических систем. Для корректного учета влияния анизотропии коэффициентов сухого трения в таких системах, требуется построение приближенных аналитических моделей силового состояния внутри пятна контакта с учетом реального распределения нормальных и касательных контактных напряжений.

Наиболее эффективной при изучении упомянутых систем является теория многокомпонентного сухого трения [1-13], которая позволяет корректно описать возникающие эффекты трения с помощью построения физически согласованных феноменологических моделей трения.

В соответствии с этой теорией, при построении моделей трения используется локальная формулировка закона Кулона для каждого малого элемента пятна контакта, где соответствующая суммарная скорость скольжения обусловлена продольным скольжением и вращением. Поэтому результирующий вектор силы сухого трения и момент получаются в результате интегрирования по площади контакта; оба зависят как от скорости скольжения, так и от угловой скорости вращения.

Точные интегральные представления для результирующего вектора силы и момента трения слишком сложные, чтобы использовать их в инженерном анализе динамики систем с сухим трением. Поэтому они заменяются приближенными выражениями, сохраняющими все аналитические свойства интегральных моделей, без использования негладких функций.

Основное преимущество приближенных моделей трения состоит в том, что их коэффициенты представляют собой числа, которые возможно определить аналитически, в случае априорного представления о распределении нормального контактного давления, или на основе численного моделирования, в случае сложных упругих свойств взаимодействующих тел.

В предлагаемом исследовании распределение контактного давления определяется с помощью уравнения С.А. Амбарцумяна для трансверсально изотропной сферической оболочки с учётом дополнительного соотношения для приведённого контактного давления. С использованием функции Грина построено разрешающее задачу интегральное уравнение. Функция Грина так же, как и контактное давление, разыскивается в виде разложений в ряды по полиномам Лежандра. В результате задача сводится к определению коэффициентов разложения в ряд приведённого контактного давления. Ограничиваясь конечным числом членов рядов разложений, с использованием дискретизации области контакта и свойств полиномов Лежандра задача сводится к решению системы алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения для приведённого давления. После этого из дополнительного соотношения определяются коэффициенты искомого разложения контактного давления в ряд по полиномам Лежандра.

1. РЕШЕНИЕ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ

Для определения контактного давления поставим статическую контактную задачу для сферической оболочки радиуса R , толщины h и абсолютно жёсткой опорной плоскости Π [14]. Полагаем, что оболочка изготовлена из трансверсально изотропного материала таким образом, что главное направление упругости, перпендикулярное к плоскости изотропии, в каждой точке оболочки совпадает с внешней нормалью \mathbf{n} к срединной поверхности оболочки.

Контакт между оболочкой и опорной плоскостью Π происходит по плоской круговой области (пятну контакта) Ω некоторого радиуса r , принадлежащей плоскости Π : $\Omega \in \Pi$ (рис.1). С учётом малости размера области контакта ($r \ll R$) радиус пятна контакта в нулевом приближении определяется из условия пересечения недеформированной срединной поверхности оболочки

$$r = R \sin \beta_*, \quad \beta_* = \arccos \frac{R - w_T}{R}, \tag{1.1}$$

где w_T – перемещение в лобовой точке оболочки.

При этом в области контакта нормальные перемещения оболочки определяются так (рис.1)

$$w = R(1 - \cos \beta) - w_T. \tag{1.2}$$

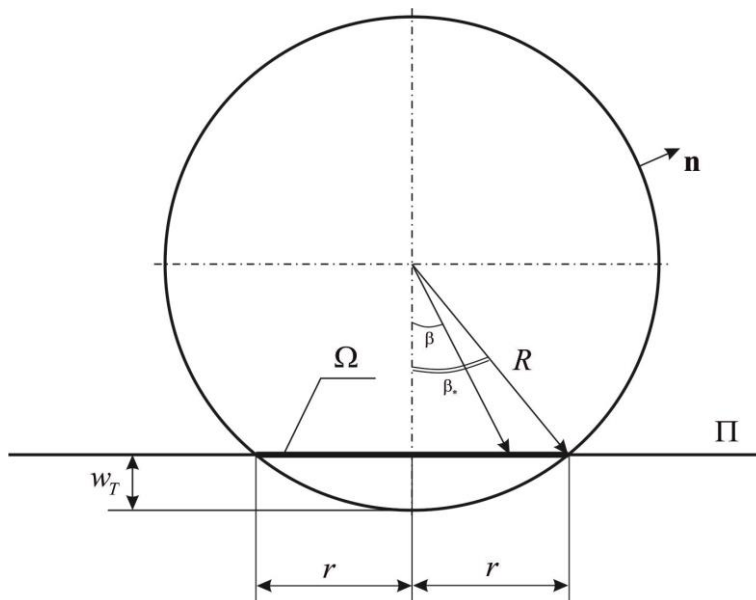


Рис.1. Контактная задача.

Полагая, что контактная задача является осесимметричной, используем уравнение С.А. Амбарцумяна [14] для трансверсально изотропной сферической оболочки, связывающее нормальные перемещения оболочки w с действующим на неё давлением p

$$\left[c^2 (\Delta + 1)^2 + 1 - h^* \Delta \right] (\Delta + 2) w = \frac{R^2}{Eh} (1 - h^* \Delta) (\Delta + 1 - \nu) p, \tag{1.3}$$

$$\Delta = \frac{1}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \right),$$

где $c^2 = \frac{h^2}{12(1 - \nu^2)R^2}$, $h^* = \frac{Eh^2}{10(1 - \nu^2)R^2 G'}$, E – модуль Юнга для направлений в плоскости изотропии, ν – коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в плоскости изотропии при растяжении в той же плоскости, G' – модуль сдвига для плоскостей, нормальных к плоскости изотропии.

Отметим, что структура уравнения (1.3) не позволяет применить разложения в ряды по полиномам Лежандра, поскольку наличие операторного множителя $\Delta + 2$ в левой части обращает её в ноль при $n = 1$, где n – номер члена ряда разложения. Для преодоления указанной трудности, в отличие от способа решения, предложенного в [14], введём вспомогательные функции приведённого давления и приведённых перемещений

$$p = (2 + \Delta) \tilde{p}, \quad \tilde{w} = (2 + \Delta) w. \tag{1.4}$$

Тогда уравнение (1.3) в новых функциях примет вид

$$\left[c^2 (\Delta + 1)^2 + 1 - h^* \Delta \right] \tilde{w} = \frac{R^2}{Eh} (1 - h^* \Delta) (\Delta + 1 - \nu) \tilde{p}. \quad (1.5)$$

При этом вид уравнения (1.5) позволяет применить к решению разложения в ряды по полиномам Лежандра.

Для решения контактной задачи используем функцию Грина $G(\beta, \xi)$, которая является решением следующего уравнения

$$\left[c^2 (\Delta + 1)^2 + 1 - h^* \Delta \right] G(\beta, \xi) = \frac{R^2}{Eh} (1 - h^* \Delta) (\Delta + 1 - \nu) \delta(\beta - \xi), \quad (1.6)$$

где $\delta(\beta - \xi)$ – дельта-функция Дирака.

Разложим искомую функцию $G(\beta, \xi)$ и $\delta(\beta - \xi)$ в ряды по полиномам Лежандра

$$G(\beta; \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(\xi) P_n(\cos \beta), \quad \delta(\beta - \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n(\xi) P_n(\cos \beta), \quad (1.7)$$

$$\delta_n(\xi) = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} \delta(\beta - \xi) P_n(\cos \beta) \sin \beta d\beta = \frac{2n+1}{2} P_n(\cos \xi) \sin \xi.$$

Подстановка (1.7) в (1.6) с учётом соотношения $\Delta P_n(\cos \beta) = -m P_n(\cos \beta)$, $m = n(n+1)$ приводит к уравнению

$$\left[c^2 (1-m)^2 + 1 + h^* m \right] G_n(\xi) = \frac{R^2}{Eh} (1 + h^* m) (1 - m - \nu) \delta_n(\xi).$$

Откуда следует

$$G_n(\xi) = A_n P_n(\cos \xi) \sin \xi, \quad A_n = R^2 \frac{2n+1 (1 + h^* m) (1 - m - \nu)}{2Eh c^2 (1-m)^2 + 1 + h^* m}. \quad (1.8)$$

С использованием функции Грина получаем интегральную связь между нормальными перемещениями и функцией \tilde{p} [15-19]

$$\tilde{w}(\beta) = \int_0^{\pi} G(\beta, \xi) \tilde{p}(\xi) d\xi. \quad (1.9)$$

Разложим $\tilde{p}(\beta)$ в ряд по полиномам Лежандра

$$\tilde{p}(\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{p}_k P_k(\cos \beta). \quad (1.10)$$

Подставляя (1.10) в (1.9), получаем

$$\tilde{w}(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_n \tilde{p}_k P_n(\cos \beta) \int_0^{\pi} P_n(\cos \xi) P_k(\cos \xi) \sin \xi d\xi. \quad (1.11)$$

Поскольку $\int_0^{\pi} P_n(\cos \xi) P_k(\cos \xi) \sin \xi d\xi = \frac{2}{2n+1} \delta_{kn}$, где δ_{kn} – символ

Кронекера, соотношение (1.11) принимает вид

$$\tilde{w}(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \tilde{p}_n P_n(\cos \beta), \quad B_n = \frac{R^2 (1 + h^* m) (1 - m - \nu)}{Eh c^2 (1-m)^2 + 1 + h^* m}. \quad (1.12)$$

Построим систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов \tilde{p}_n . В правой части (1.12) ограничимся учётом первых $N+1$ слагаемых

$$\tilde{w}(\beta) \approx \sum_{n=0}^N B_n \tilde{p}_n P_n(\cos \beta). \tag{1.13}$$

Положим, что перемещения $w(\beta)$ заданы в области контакта $\Omega = \{\beta : \beta \in [0, \beta^*]\}$, где $\beta^* = \arcsin \frac{r}{R}$ – определяют границу области контакта.

Выберем в области контакта $N+1$ точек с координатами $\beta_k \in \Omega$, $k = 0, 1, 2, \dots, N$. Заменяя приближенное равенство (1.13) точным, для каждой k -ой точки β_k получаем алгебраическое уравнение, содержащее $N+1$ неизвестных \tilde{p}_n . Таким образом, т.к. число таких уравнений $N+1$, мы получаем систему из $N+1$ уравнений относительно $N+1$ неизвестных

$$\begin{aligned} \mathbf{B}\tilde{\mathbf{p}} &= \tilde{\mathbf{w}}, \\ \mathbf{B} &= (b_{kn})_{N+1 \times N+1}, \quad \tilde{\mathbf{p}} = (\tilde{p}_n)_{N+1 \times 1}, \quad \tilde{\mathbf{w}} = (\tilde{w}_k)_{N+1 \times 1}, \\ b_{kn} &= B_n P_n(\cos \beta_k), \quad w_k = w(\beta_k), \end{aligned} \tag{1.14}$$

решением которой является вектор $\tilde{\mathbf{p}}$ коэффициентов разложения (1.10).

Искомое контактное давление $p(\beta)$ также представим в виде разложения в ряд по полиномам Лежандра

$$p(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n P_n(\cos \beta). \tag{1.15}$$

Из представления (1.4) вытекает связь между коэффициентами p_n и \tilde{p}_n

$$p_n = (2-m)\tilde{p}_n, \tag{1.16}$$

из которой определяются первые $N+1$ коэффициенты разложения в ряд искомого контактного давления.

В качестве примера рассмотрим контактную задачу для оболочки со следующими параметрами: $R=1$ м, $h=1/20$ м, $\nu=0.3$, $E=2 \cdot 10^{11}$ Па, $G'=0.7 \cdot 10^{10}$ Па, $w_T=0.01R$.

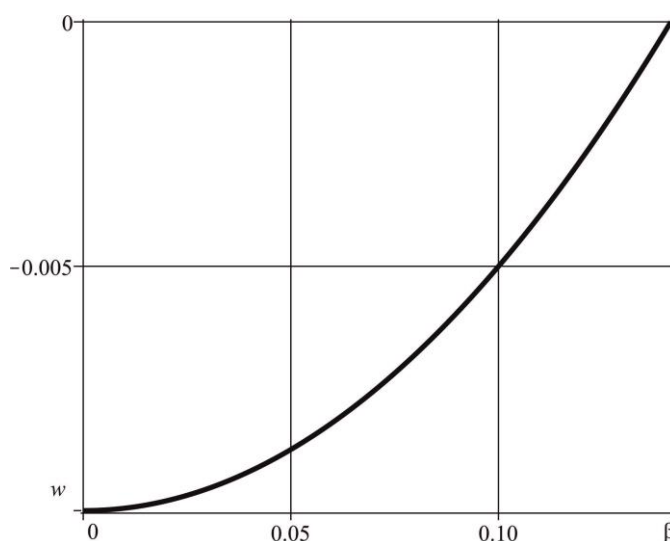


Рис.2. Распределение перемещений по области контакта.

На рис.2 представлено распределение перемещений оболочки в зоне контакта $\Omega = \{\beta : \beta \in [0, \beta^*]\}$.

На рис.3 показано распределение контактного давления, как решение задачи (1.14)-(1.16). Сплошная кривая соответствует $N = 20$, штриховая – $N = 30$.

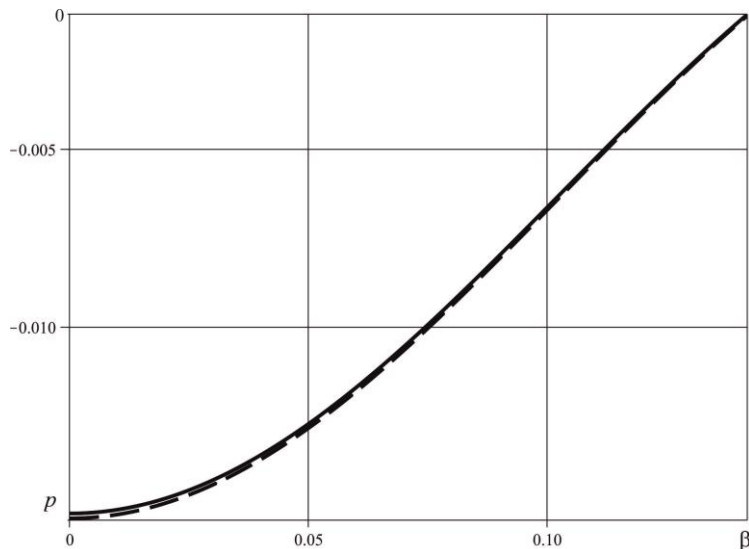


Рис.3. Распределение контактного давления.

2. МОДЕЛЬ СИЛОВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОБОЛОЧКИ С ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ПРИ НАЛИЧИИ АНИЗОТРОПНОГО СУХОГО ТРЕНИЯ В УСЛОВИЯХ КОМБИНИРОВАННОЙ КИНЕМАТИКИ

Динамическое взаимодействие слабдеформированного твердого тела с шероховатой опорной плоскостью определяется нормальной реакцией \mathbf{N} , результирующим вектором касательных сил \mathbf{T} , моментом сопротивления качению \mathbf{M}_τ и моментом сухого трения \mathbf{M}_v [2]. Эти величины могут быть определены интегрированием нормального контактного напряжения, а также суммарного тангенциального напряжения, полученного в предположении справедливости дифференциальной формы закона Амонтона-Кулона для маленького элемента площади внутри пятна контакта [1-13] по площадке контакта S .

С учетом анизотропии сухого трения, интегральная модель силового состояния внутри пятна контакта имеет вид [20]

$$\mathbf{N} = \int_S \sigma_0 \left[\mathbf{e}_3 + \frac{\mathbf{r}_\tau \times (\mathbf{h} \cdot \mathbf{w}_\tau)}{|\mathbf{w}_\tau|} \right] dS, \quad \mathbf{M}_\tau = \int_S \sigma_0 \mathbf{r}_\tau \times \left[\mathbf{e}_3 + \frac{\mathbf{r}_\tau \times (\mathbf{h} \cdot \mathbf{w}_\tau)}{|\mathbf{w}_\tau|} \right] dS; \quad (2.1)$$

$$\mathbf{T} = - \int_S \sigma_0 \left[1 + \frac{\mathbf{r}_\tau \times (\mathbf{h} \cdot \mathbf{w}_\tau)}{|\mathbf{w}_\tau|} \cdot \mathbf{e}_3 \right] \frac{\mathbf{f} \cdot (\mathbf{v}_0 - R \mathbf{w}_\tau \times \mathbf{e}_3 + \mathbf{w}_v \times \mathbf{r}_\tau)}{|\mathbf{v}_0 + \mathbf{w}_v \times \mathbf{r}_\tau|} dS \quad (2.2)$$

$$\mathbf{M}_v = - \int_S \sigma_0 \left[1 + \frac{\mathbf{r}_\tau \times (\mathbf{h} \cdot \mathbf{w}_\tau)}{|\mathbf{w}_\tau|} \cdot \mathbf{e}_3 \right] \frac{\mathbf{r}_\tau \times [\mathbf{f} \cdot (\mathbf{v}_0 - R \mathbf{w}_\tau \times \mathbf{e}_3 + \mathbf{w}_v \times \mathbf{r}_\tau)]}{|\mathbf{v}_0 + \mathbf{w}_v \times \mathbf{r}_\tau|} dS \quad (2.3)$$

Здесь \mathbf{v}_0 – продольная абсолютная скорость; \mathbf{w}_τ – угловая скорость качения; \mathbf{w}_v – угловая скорость вращения; $R(M)$ – радиус кривизны катящегося тела,

вычисленный в точке M ; $\mathbf{r}_\tau(M)$ – радиус-вектор точки $M \in S$ в плоскости контакта; \mathbf{e}_3 – нормальный единичный вектор плоскости контакта; $\mathbf{h} = h_{\alpha\beta} \mathbf{e}^\alpha \mathbf{e}^\beta$ – «тензор трения качения» для анизотропного упруго тела

$$\forall \mathbf{w}_\tau = \mathbf{w}_\tau(\mathbf{q}) \quad \mathbf{w}_\tau^T \cdot \mathbf{h} \cdot \mathbf{w}_\tau > 0.$$

Подробный анализ уравнений (2.1)-(2.2) проведен в [2]. В частности, было показано, что в большинстве инженерных задач достаточно рассматривать ортотропное сухое трение, определяемое следующим тензором трения [3,11]

$$\mathbf{f} = f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}, \quad f \neq 0, \quad k \neq 0. \quad (2.3)$$

где f и kf – главные компоненты тензора трения.

Предложенную модель трения (2.1)-(2.3), удобно записать в системе координат Oxy , с началом в центре пятна контакта, такой что соответствующие базисные векторы \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 коллинеарны главным направлениям тензора трения \mathbf{f} . Естественно предположить, что статическое контактное давление обладает свойством осевой симметрии: $\sigma_0(x, y) = \sigma_0(\pm x, \pm y)$, а трение качения изотропно.

Приближенная аналитическая модель силового взаимодействия внутри пятна контакта, строится в предположении, что катящаяся оболочка движется с продольной скоростью $\mathbf{v}_0 = v\mathbf{e}'_1$ вдоль оси глобальной неподвижной системы координат, с угловой скоростью качения $\mathbf{w}_\tau = -\Omega\mathbf{e}_2$ и угловой скоростью вращения ω . Предполагается, что площадка контакта обладает осевой симметрией с характерным размером пятна контакта R (например, диаметр соответствующего множества на плоскости $\{x, y\}$).

При наличии движения возникают касательные напряжения, приводящие к искажению симметричной диаграммы распределения нормальных контактных напряжений. В предположении, что смещение центра тяжести пятна контакта относительно геометрического центра описывается вектором \mathbf{d} , модуль которого был рассчитан в работах [1,6-13], нарушение симметрии может представлено следующей формулой

$$\sigma(x, y) = \sigma_0(x, y)(1 + d_x x + d_y y), \quad (2.4)$$

где d_x и d_y – проекции вектора \mathbf{d} на оси x и y , соответственно.

Результирующий вектор силы трения может быть представлен в виде суммы двух компонент $\mathbf{T} = T_{\parallel}\mathbf{e}_1 + T_{\perp}\mathbf{e}_2$, T_{\parallel} – продольная составляющая силы трения, а T_{\perp} – поперечная. Как было показано в [1-13] последняя из них возникает благодаря взаимосвязи эффектов трения.

В результате, интегральные представления (2.1)-(2.3) существенно могут быть упрощены, как это было реализовано в [1-13].

Однако интегральные соотношения слишком сложны, чтобы применить их к анализу динамики реальных систем, в то время как их аппроксимации аналитическими функциями достаточно точны и просты одновременно. С помощью методики, подробно описанной в предыдущих работах [1-13], приближенная аналитическая модель трения, описывающая взаимодействие упругой оболочки качения с твердой поверхностью, в случае комбинированной кинематики и ортотропного трения может быть представлена в следующем виде

$$F_{\parallel} = \frac{F_0 v}{\sqrt{v^2 + au^2}}, \quad F_{\perp} = \frac{\mu_0 k F_0 v u^2}{\sqrt{(v^6 + b\omega^6)}}, \quad M_v = \frac{M_0 u}{\sqrt{u^2 + mv^2}}. \quad (2.5)$$

Здесь $u = \omega_v R$, F_0 – продольная компонента силы трогания, а M_0 – момент силы трогания. Коэффициенты модели (3.5) вычисляются по простым явным формулам [2] на основании численных экспериментов, результаты которых представлены на рис.2-3.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена постановка и разработан метод решения задачи о движении композитной сферической трансверсально изотропной оболочки по твёрдой поверхности с учётом комбинированного сухого трения. С учётом задания функции приведённого контактного давления использовано модифицированное уравнение С.А. Амбарцумяна, позволяющее применить разложения в ряды по полиномам Лежандра. С использованием функции Грина задача сведена к решению системы алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения в ряд функций приведённого контактного давления и перемещений. Связь истинного и приведённого контактного давления позволяет определить коэффициенты ряда разложения контактного давления.

Для описания условий контакта оболочки с поверхностью использована теория многокомпонентного анизотропного сухого трения с учётом комбинированной кинематики движения оболочки (одновременное скольжение, вращение и качение).

ЛИТЕРАТУРА

1. Kireenkov A.A. *Further development of the theory of multicomponent dry friction* / 6th Intern. Conf. on Coupled Problems in Science and Engineering. Proceedings. – 2015. – Pp.203-209.
2. Киреевков А.А., Федотенков Г.В. *Движение композитной сферической оболочки по твёрдой поверхности с учётом комбинированного сухого трения* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2020. – Т.26. – №3. – С.327-340.
3. Kireenkov A.A., Zhavoronok S.I. *Anisotropic Combined Dry Friction in Problems of Pneumatics' Dynamics* // J. of Vibrational Engineering and Technologies. – 2020. – Vol.8(2). – Pp.365-372.
4. Kireenkov A.A., Zhavoronok S.I. *Numeric-Analytical Methods of the Coefficients Definition of the Rolling Friction Model of the Pneumatic Aviation Tire* / 8th Intern. Conf. on Coupled Problems in Science and Engineering. Proceedings. – 2019. – Pp.204-212.
5. Kireenkov A.A., Ramodanov S.M. *Combined Dry Friction Models in the Case of Random Distribution of the Normal Contact Stresses Inside of Contact Patches* / 8th Intern. Conf. on Coupled Problems in Science and Engineering. Proceedings. – 2019. – Pp.176-182.
6. Kireenkov A.A., Nushtaev D.V., Zhavoronok S.I. *A new approximate model of tyre accounting for both deformed state and dry friction forces in the contact spot on the background of the coupled model* // MATEC Web of Conferences. – 2018. – Vol.211. – 08003.

7. Kireenkov A., Zhavoronok S. *Implementation of analytical models of the anisotropic combined dry friction in problems of pneumatics' dynamics* // MATEC Web of Conferences. – 2018. – Vol.211. – 08004.
8. Kireenkov A.A. *Improved Friction Model of the Aviation Tyre Contact with the Landing Strip* // IFAC Proceedings Volumes. – 2018. – Vol.51(2). – Pp.890-894.
9. Kireenkov A.A., Zhavoronok S.I. *Coupled dry friction models in problems of aviation pneumatics' dynamics* // Intern. J. of Mechanical Sciences. – 2017. – Vol.127. – Pp.198-203.
10. Kireenkov A.A. *Improved Theory of the Combined Dry Friction in Problems of Aviation Pneumatics' Dynamics* / VII Intern. Conf. on Coupled Problems in Science and Engineering. Proceedings. – Rhodes Island, Greece, 2017. – Pp.1293-1298.
11. Zhavoronok S.I., Kireenkov A.A. *On the effect of the anisotropic dry friction and the deformed state of tires on the shimmy initiation* / VII International Conference on Coupled Problems in Science and Engineering. Proceedings. – Rhodes Island, Greece, 2017. – Pp.216-226.
12. Киреенков А.А. *Связанные модели трения скольжения и качения* // ДАН. – 2008. – Т.419. – №6. – С.759-762.
13. Киреенков А.А. *Связанная модель трения скольжения и качения в динамике тел на шероховатой плоскости* // Известия РАН. МТТ. – 2008. – №3. – С.116-131.
14. Амбарцумян С.А. *Общая теория анизотропных оболочек*. – М.: Наука, 1974. – 448 с.
15. Mikhailova E.Yu., Fedotenkov G.V. *Nonstationary Axisymmetric Problem of the Impact of a Spherical Shell on an Elastic Half-Space (Initial Stage of Interaction)* // Mechanics of Solids. – 2011. – Vol.46. – No.2. – Pp.239-247.
16. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. *Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells* // J. of Machinery Manufacture and Reliability. – 2014. – Vol.43. – No.2. – Pp.145-152.
17. Fedotenkov G.V., Mikhailova E.Yu., Kuznetsova E.L., Rabinskiy L.N. *Modeling the unsteady contact of spherical shell made with applying the additive technologies with the perfectly rigid stamp* // Intern. J. of Pure and Applied Mathematics. – 2016. – Vol.111. – No.2. – Pp.331-342.
18. Mikhailova E.Yu., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. *Transient contact problem for spherical shell and elastic half-space* // Shell Structures: Theory and Applications. – 2017. – Vol.4. – Pp.301-304.
19. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. *Nonstationary 3D motion of an elastic spherical shell* // Mechanics of Solids. – 2015. – Vol.46. – No.5. – Pp.779-787.

REFERENCES

1. Kireenkov A.A. *Further development of the theory of multicomponent dry friction*. 6th Intern. Conf. on Coupled Problems in Science and Engineering, Proceedings, 2015, Pp.203-209.
2. Kireenkov A.A., Fedotenkov G.V. *Dvizhenie kompozitnoj sfericheskoy obolochki po tvyordoj poverkhnosti s uchyotom kombinirovannogo sukhogo treniya [Movement of a composite spherical shell on a solid surface, taking into account combined dry friction]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2020, Vol.26, No.3, Pp.327-340.

3. Kireenkov A.A., Zhavoronok S.I. *Anisotropic Combined Dry Friction in Problems of Pneumatics' Dynamics*. J. of Vibrational Engineering and Technologies, 2020, Vol.8(2), Pp.365-372.
4. Kireenkov A.A., Zhavoronok S.I. *Numeric-Analytical Methods of the Coefficients Definition of the Rolling Friction Model of the Pneumatic Aviation Tire*. 8th Intern. Conf. on Coupled Problems in Science and Engineering, Proceedings, 2019, Pp.204-212.
5. Kireenkov A.A., Ramodanov S.M. *Combined Dry Friction Models in the Case of Random Distribution of the Normal Contact Stresses Inside of Contact Patches*. 8th Intern. Conf. on Coupled Problems in Science and Engineering, Proceedings, 2019, Pp.176-182.
6. Kireenkov A.A., Nushtaev D.V., Zhavoronok S.I. *A new approximate model of tyre accounting for both deformed state and dry friction forces in the contact spot on the background of the coupled model*. MATEC Web of Conferences, 2018, Vol.211, 08003.
7. Kireenkov A., Zhavoronok S. *Implementation of analytical models of the anisotropic combined dry friction in problems of pneumatics' dynamics*. MATEC Web of Conferences, 2018, Vol.211, 08004.
8. Kireenkov A.A. *Improved Friction Model of the Aviation Tyre Contact with the Landing Strip*. IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline), 2018, Vol.51(2), Pp.890-894.
9. Kireenkov A.A., Zhavoronok S.I. *Coupled dry friction models in problems of aviation pneumatics' dynamics*. Intern. J. of Mechanical Sciences, 2017, Vol.127, Pp.198-203.
10. Kireenkov A.A. *Improved Theory of the Combined Dry Friction in Problems of Aviation Pneumatics' Dynamics*. VII Intern. Conf. on Coupled Problems in Science and Engineering, Proceedings, Rhodes Island, Greece, 2017, Pp.1293-1298.
11. Zhavoronok S.I., Kireenkov A.A. *On the effect of the anisotropic dry friction and the deformed state of tires on the shimmy initiation*. VII Intern. Conf. on Coupled Problems in Science and Engineering, Proceedings, Rhodes Island, Greece, 2017, Pp.216-226.
12. Kireenkov A.A. *Svyazannye modeli treniya skol'zheniya i kacheniya [Associated sliding and rolling friction models]*. Doklady akademii nauk, 2008, Vol.419, No.6, Pp.759-762.
13. Kireenkov A.A. *Svyazannaya model' treniya skol'zheniya i kacheniya v dinamike tel na sherokhovatoj ploskosti [Coupled model of sliding and rolling friction in the dynamics of bodies on a rough plane]*. Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela, 2008, No.3, Pp.116-131.
14. Ambartsumyan S.A. *Obshhaya teoriya anizotropnykh obolochek [Theory of Anisotropic Shells]*. Moskva, Nauka, 1974, 448 p.
15. Mikhailova E.Yu., Fedotenkov G.V. *Nonstationary Axisymmetric Problem of the Impact of a Spherical Shell on an Elastic Half-Space (Initial Stage of Interaction)*. Mechanics of Solids, 2011, Vol.46, No.2, Pp.239-247.
16. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. *Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells*. J. of Machinery Manufacture and Reliability, 2014, Vol.43, No.2, Pp.145-152.
17. Fedotenkov G.V., Mikhailova E.Yu., Kuznetsova E.L., Rabinskiy L.N. *Modeling the unsteady contact of spherical shell made with applying the additive*

- technologies with the perfectly rigid stamp*. Intern. J. of Pure and Applied Mathematics, 2016, Vol.111, No.2, Pp.331-342.
18. Mikhailova E.Yu., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. *Transient contact problem for spherical shell and elastic half-space*. Shell Structures: Theory and Applications, 2017, Vol.4, Pp.301-304.
 19. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. *Nonstationary 3D motion of an elastic spherical shell*. Mechanics of Solids, 2015, Vol.46, No.5, Pp.779-787.

Поступила в редакцию 31 августа 2021 года.

Сведения об авторах:

Киреев Алексей Альбертович – с.н.с., ФГБУН Институт проблем механики РАН им. А.Ю. Ишлинского, г. Москва, Россия; e-mail: kireenk@ipmnet.ru, kireenk@mail.ru
Федотенков Григорий Валерьевич – доц., ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия; e-mail: greghome@mail.ru