

УДК 539.4

DOI 10.33113/mkmk.ras.2022.28.01.003_018.01

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДЕФОРМИРОВАНИИ ПОПЕРЕЧНОШОВНОГО СИЛЬФОНА И ДИСКОВОЙ ПРУЖИНЫ ИЗ СПФ

Бобок Д.И.

*ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный
исследовательский университет)», г. Москва, Россия*

АННОТАЦИЯ

Работа посвящена решению задачи о поперечношовном сильфоне из сплава с памятью формы (СПФ) под действием осевой нагрузки в ходе прямого термоупругого мартенситного фазового превращения. В качестве частных случаев рассмотрены два различных подхода к учету оператора, связанного с коэффициентом Пуассона в ходе преобразования Лапласа. В результате выдвинута гипотеза о возможности не учитывать в случае рассмотрения несжимаемых материалов оператор, связанный с коэффициентом Пуассона в ходе преобразования Лапласа, а считать этот коэффициент параметром материала, которая была проверена численно в рамках данной работы.

Поведение сильфона описывалось в рамках модели линейного деформирования СПФ при фазовых превращениях и моделировалось как поведение системы кольцевых пластин. Задача решалась в рамках несвязанной постановки, распределение параметра фазового состава и температуры по материалу сильфона в каждый момент времени предполагалось равномерным. Аналогично пренебрегалось возможностью структурного превращения в материале сильфона, переменностью упругих модулей при фазовом переходе и свойством разносопротивляемости СПФ.

Для получения аналитического решения всех уравнений краевой задачи применялся метод преобразования Лапласа по величине объемной доли мартенситной фазы. После преобразования в пространстве изображений получается эквивалентная упругая задача. При решении этой задачи образы по Лапласу искомым величин получаются в виде аналитических выражений, включающих операторы, являющиеся образами по Лапласу от упругих постоянных. Эти выражения являются дробно-рациональными функциями образа по Лапласу от параметра фазового состава. Для возвращения в пространство оригиналов производится разложение выражений для искомым величин в пространстве изображений на простые дроби. В результате обращения этих дробей получают искомые аналитические решения.

Ключевые слова: сплавы с памятью формы; прямое превращение; поперечношовный сильфон; торообразный компенсатор; безмоментное напряженное состояние; линейная модель

ANALYTICAL SOLUTION TO THE PROBLEM OF DEFORMATION OF TRANSVERSE BELLOWS AND DISC SPRING MADE OF SHAPE MEMORY ALLOY

Bobok D.I.

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

ABSTRACT

The paper is devoted to solving the problem of a cross-seam bellows made of a shape memory alloy (SMA) under the an axial load during a direct thermoelastic martensitic phase transformation. As special cases, two different approaches to accounting for the operator associated with the Poisson's coefficient during the Laplace transform are considered. As a result, a hypothesis is put forward that it is possible not to take into account the operator associated with the Poisson's coefficient during the Laplace transformation in the case of considering incompressible materials, but to consider this coefficient as a material parameter. which was verified numerically in the framework of this work.

The bellows behavior was described in the framework of the model of linear deformation of the SMA during phase transformations and was modeled as the behavior of a system of ring plates. The problem was solved within the framework of an unrelated formulation, the distribution of the phase composition and temperature parameter over the bellows material at each moment of time was assumed to be uniform. Similarly, the possibility of structural transformation in the bellows material, the variability of elastic modules during the phase transition, and the property of the SMA's resistance to diversity were neglected.

To obtain an analytical solution of all the equations of the boundary value problem, the Laplace transform method was used in terms of the volume fraction of the martensitic phase. After the transformation in the image space, an equivalent elastic problem is obtained. When solving this problem, the Laplace images of the desired quantities are obtained in the form of analytical expressions that include operators that are Laplace images of elastic constants. These expressions are fractional-rational functions of the Laplace image of the phase composition parameter. To return to the original space, the expressions for the desired values in the image space are decomposed into simple fractions. As a result of the inversion of these fractions, the desired analytical solutions are obtained.

Keywords: shape memory alloys; direct transformation; transverse bellows; torus-shaped compensator; instantaneous stress state; linear model

ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Несмотря на то, что сплавы с памятью формы (СПФ) были открыты еще в середине прошлого века, их применение остается достаточно узким. Это тем более странно, если учесть, насколько интересными и уникальными свойствами они обладают. Частично такие затруднения связаны с тем, что СПФ достаточно дороги и сложны в обработке, производстве и применении. Частично с тем, что до сих пор нет способов, пригодных для того, чтобы достаточно точно количественно и качественно описать свойства этих материалов в конструкциях. И, наконец, во многих случаях уникальные свойства изделий, изготовленных из сплавов с памятью формы, оказываются достаточно нетривиальны, чтобы наиболее рациональное их применение в технике было очевидным. Однако выгода изготовления дисковых пружин или пластинчатых сильфонов из сплава с памятью формы (в частности, никелида титана) не вызывает сомнений.

Поперечношовный сильфон или торообразный компенсатор – это достаточно сложная геометрически конструкция, состоящая из сегментов торообразных оболочек, соединяющих круглые пластины. Применяется он чаще всего в трубопроводах для компенсации температурных и технологических осевых деформаций. В космической технике встречается так называемые «Поперечношовные сварные сильфоны», состоящие из сваренных по внешним и внутренним контурам кольцеобразных пластин. Несмотря на то, что чисто технически сильфон представляет из себя систему из пластин и торообразных

вставок, точный учет геометрии этих вставок хотя и возможен, но затруднен ввиду громоздкости существующих методов. Поэтому при проектировании сильфонов они в первом приближении могут считаться системой кольцевых пластин.

Так как целью работы было построение именно аналитического решения, для описания поведения СПФ использовалась достаточно простая модель линейного деформирования СПФ [1-3], опирающаяся на пренебрежение априори нелинейным явлением мартенситной неупругости и нелинейностью зависимости приращения деформации СПФ за счет прямого фазового превращения от действующих напряжений, переменностью упругих модулей СПФ при фазовых переходах, а также свойством разносопротивляемости СПФ [4].

Опираясь на эти и некоторые более сложные системы определяющих уравнений для СПФ, уже был решен целый ряд краевых задач. Решены задачи кручения [5-16], задачи изгиба [17] (в частности, изгиб балок [18-23] и изгиб пластинок [24-25]). Отдельно вопрос изгиба круглых пластин был рассмотрен в работе [26], устойчивость круглых пластин – в работах [27-28]. Также были решены осесимметричные и центрально-симметричные задачи для толстостенной сферы и толстостенного и тонкостенного цилиндра [29-36].

В данной работе получено решение задачи о смещениях пластинчатой пружины или поперечношовного сварного сильфона, пластины которых изготовлены из СПФ. Материал элемента конструкции претерпевает прямое мартенситное фазовое превращение под действием постоянной нагрузки. При решении задачи принимается ряд допущений. Так предполагается, что параметр фазового состава в каждый момент рассматриваемого процесса распределен равномерно по материалу. Данная гипотеза приемлема в случае медленного процесса охлаждения, обеспечивающего равномерное распределение по материалу изменяющейся со временем температуры, в рамках несвязанной постановки задачи для СПФ, при которой пренебрегается влиянием действующих напряжений на характерные температуры фазового перехода.

Используемая в работе модель деформирования СПФ [1-3] не учитывает возможности деформирования этого материала за счет структурного перехода. Оправданием применения такого подхода служит следующее обстоятельство. В работах [37-40] в рамках новой нелинейной объединенной модели деформирования СПФ, достаточно точно учитывающей взаимодействие фазового и структурного механизма деформирования этих материалов, показано, что в случае прямого превращения под действием постоянных напряжений структурный переход в СПФ не происходит.

1. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Задача была решена в рамках линейной модели деформирования СПФ при фазовых переходах, предложенной в [1-3]. В [41,42] предложен метод аналитического решения краевых задач о деформировании элементов из сплавов с памятью формы при прямом фазовом превращении, основанный на преобразовании Лапласа [43] всех уравнений краевой задачи по величине объемной доли мартенситной фазы q . Установлено, что после такого преобразования полная система уравнений краевой задачи для прямого превращения в СПФ переходит в пространстве изображений в полную систему уравнений эквивалентной задачи линейной теории упругости, в определяющих

соотношениях которой упругие модули являются известными функциями материальных параметров СПФ и переменной s , соответствующей в пространстве изображений переменной q . Фактически, упругие модули эквивалентной упругой задачи становятся операторами в задаче о прямом превращении. Ниже приведены формулы, выражающие операторы \bar{E} и $\bar{\nu}$, соответствующие упругому модулю Юнга и коэффициенту Пуассона через параметры материала СПФ

$$\bar{E} = E \frac{s - a_0}{s - \beta}, \quad \bar{\nu} = \nu \frac{s - \gamma}{s - \beta}, \quad \beta = a_0 - \frac{2}{3} c_0 E, \quad \gamma = a_0 - \frac{E c_0}{3\nu}.$$

Здесь E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, величины a_0 и c_0 – материальные параметры определяющего соотношения для фазовой деформации при прямом превращении модели линейного деформирования СПФ при фазовых

превращениях [1-3] $\frac{d\varepsilon'_{ij}{}^{ph}}{dq} = (c_0 \sigma'_{ij} + a_0 \varepsilon'_{ij}{}^{ph})$, где $\varepsilon'_{ij}{}^{ph}$ – девиатор тензора фазовых

деформаций, σ'_{ij} – девиатор тензора напряжений. Исходными являются решения упругих задач, изложенные в [44-47]. Искомые величины эквивалентной упругой задачи в пространстве изображений записываются в виде функций от образов упругих постоянных. В результате для этих величин получаются дробно-рациональные функции от переменной преобразования s . Эти выражения разлагаются на простые дроби, после чего определяются соответствующие решения в пространстве оригиналов. Опираясь на приведенные ниже данные, были получены следующие численные значения этих выражений (Таблица 1).

Таблица 1.

Величина	Значения, соответствующие мартенситному состоянию	Значения, соответствующие аустенитному состоянию
a_0	0.718	0.718
β	-3.818	-12.89
E , МПа	28000	84000
G , МПа	$9.4595 \cdot 10^4$	$3.2308 \cdot 10^4$
ν	0.48	0.3
γ	-4.007	-21.96

Различные авторы приводят различные значения коэффициента Пуассона для СПФ, которые расположены в промежутке от 0.3 до 0.48. Ниже рассмотрены решения, полученные именно для этих двух крайних значений.

С учетом оператора, связанного с коэффициентом Пуассона, при решении некоторых задач о прямом превращении для элементов из СПФ может быть связана вычислительная проблема. Дело в том, что, например, в задачах о краевом эффекте в оболочках, зависимость решения эквивалентной упругой задачи от коэффициента Пуассона является достаточно сложной, иррациональной и даже трансцендентной функцией. В этом случае обращение преобразования Лапласа приходится производить численно, т.е. решение теряет аналитический характер. Аналогичная проблема возникает при решении вязкоупругих задач операторным методом. В [48] при решении проблемы для оболочки из вязкоупругого материала рекомендовано при переходе в пространство изображений коэффициент Пуассона

считать не оператором, а постоянной величиной. Однако оценить точность такого подхода путем решения задач для оболочек не удастся, поскольку проблемы с учетом коэффициента Пуассона, как оператора решить аналитически не получается. В рассматриваемой в данной работе задаче удастся найти аналитические решения, как при рассмотрении коэффициента Пуассона как оператора, так и в приближенной постановке, в рамках которой коэффициент Пуассона при переходе к изображениям и обратно считается константой материала. В результате удастся оценить точность соответствующей гипотезы в зависимости от величины коэффициента Пуассона.

2. СРАВНИТЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДВУХ МЕТОДОВ

В связи с рассмотрением двух параллельных методов решения прокомментирую ряд введенных обозначений. Так в тексте данной работы

1. Упругое решение для прогиба обозначено как $w_{упр}$.
2. Решение, где ν учитывается как оператор, обозначено как w_1 .

Соответственно, отношение $w_1/w_{упр}$ обозначится как w'_1 .

3. Решение, где ν считается константой, обозначено как w_0 . Тогда отношение

$w_0/w_{упр}$ обозначится как w'_0 .

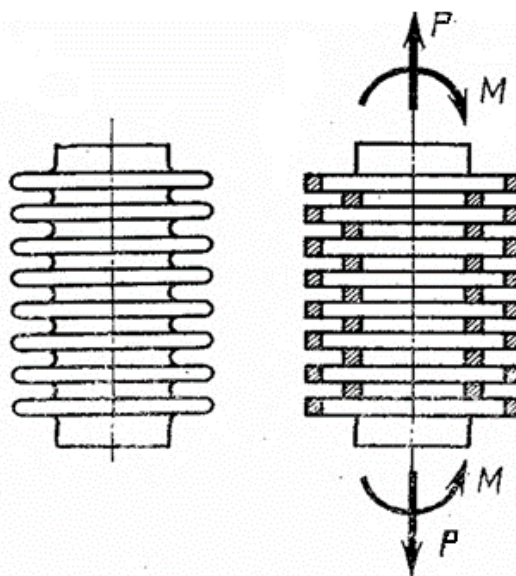


Рис.1. Поперечношовный сиффон и его вид в разрезе (взято из [44]).

Для определения жесткости и деформативности сиффона или дисковой пружины при осевом перемещении достаточно рассмотреть один элемент схемы – плоскую круговую кольцевую пластину, нагруженную осевой силой P для осевых перемещений и моментом M для угловых смещений (рис.1). Результирующее смещение сиффона или дисковой пластины равно сумме смещений всех составляющих элементов.

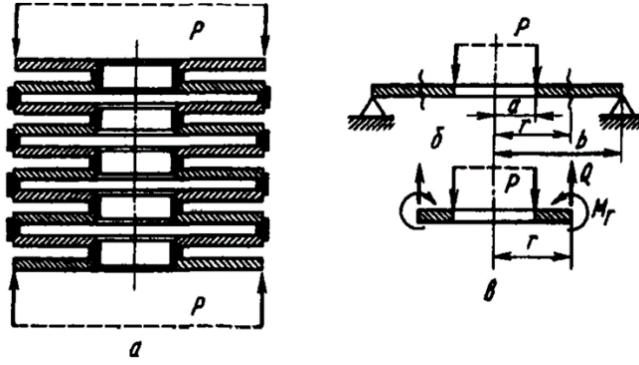


Рис.2. Постановка задачи о нагруженной дисковой пластине [49].

Переходя к рассмотрению дисковой пружины как системы круглых пластин (рис.1, рис.2а) задача сводится к определению прогиба одной пластины, нагруженной по контурам силой интенсивности P (рис.2.б). Тогда осадка всей пружины представляет собой увеличенный в n раз найденный прогиб, где n – число пластин в пружине.

Наибольший прогиб для пластины, у которой отсутствуют угловые перемещения по внутреннему и наружному контурам, в пространстве оригиналов определяется соотношением [44]

$$w_{\text{ynp}} = \frac{Pr^2}{Eh^3} 3 \frac{1-\nu^2}{4\pi} \left(\rho^2 - 1 - \frac{4\rho^2}{\rho^2 - 1} \ln^2 \rho \right)^{-1}, \quad (1)$$

где $\rho = R/r$ – отношение наружного радиуса пластины к внутреннему; h – толщина пластины.

Применим к выражению (1) прямое и обратное преобразование Лапласа, заменив E и ν на соответствующие им образы. Таким образом, получим два выражения, уже отнесенных для удобства к упругому решению

$$w'_1 = \frac{w_1}{w_{\text{ynp}}} = \frac{A_1 + B_1 e^{a_0 q} + C_1 e^{\beta q}}{1 - \nu^2}, \quad (2)$$

$$w'_0 = \frac{w_0}{w_{\text{ynp}}} = A_0 + B_0 e^{a_0 q}. \quad (3)$$

Для случая w_1 и значений модуля Юнга и коэффициента Пуассона, равных, соответственно, 28000 МПа и 0.48, были найдены следующие неопределенные коэффициенты

$$A_1 = -\frac{\gamma^2 \nu^2 - \beta^2}{a_0 \beta} = -3.968;$$

$$B_1 = -\frac{(a_0^2 \nu^2 - 2a_0 \gamma \nu^2 + \gamma^2 \nu^2 - a_0^2 + 2a_0 \beta - \beta^2)}{a_0 (a_0 - \beta)} = 4.738;$$

$$C_1 = \frac{\nu^2 (\beta^2 - 2\beta \gamma + \gamma^2)}{\beta (a_0 - \beta)} = -0.475 \cdot 10^{-3}.$$

Для случая w'_0 , соответственно

$$A_0 = \frac{\beta}{a_0} = -5.403; \quad B_0 = \frac{a_0 - \beta}{a_0} = 6.403.$$

Для наглядности предоставлю оба полученных значения на одном графике в осях $w(q) - q$ (рис.3).

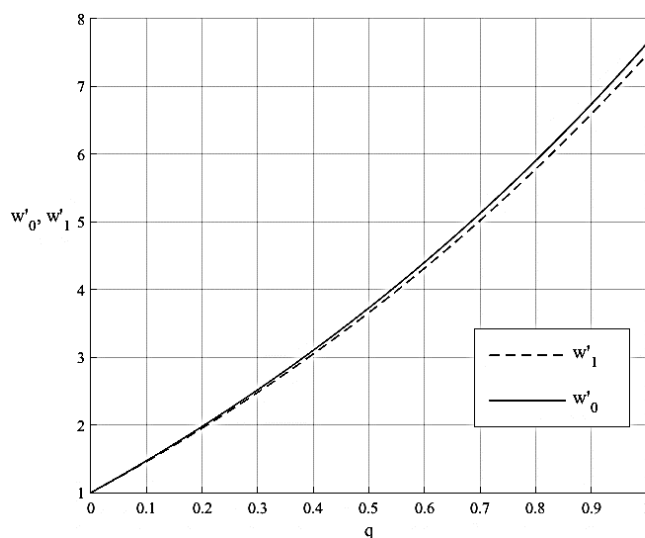


Рис.3. $w(q)$ при $\nu=0.48$ для коэффициента Пуассона – оператора (штриховая линия) и коэффициента Пуассона – константы (сплошная линия).

Для полноты картины интересно пронаблюдать и сравнение данных для коэффициента Пуассона – оператора и коэффициента Пуассона – константы для случая, когда коэффициент Пуассона равен 0.3. Одновременно с этим и модуль Юнга целесообразно принять равным 84000 МПа, то есть, рассмотреть задачу для аустенитных значений упругих постоянных. Итоговым выражением для прогиба (обозначим его как w_1'') в случае коэффициента Пуассона – оператора останется (2), а неопределенные коэффициенты изменятся следующим образом

$$A_1 = -\frac{\gamma^2 \nu^2 - \beta^2}{a_0 \beta} = -13.262;$$

$$B_1 = -\frac{(a_0^2 \nu^2 - 2a_0 \gamma \nu^2 + \gamma^2 \nu^2 - a_0^2 + 2a_0 \beta - \beta^2)}{a_0 (a_0 - \beta)} = 14.214;$$

$$C_1 = \frac{\nu^2 (\beta^2 - 2\beta \gamma + \gamma^2)}{\beta (a_0 - \beta)} = -0.042.$$

Решение для коэффициента Пуассона – константы, выраженное в относительных величинах (3), также изменится численно из-за изменения значения модуля Юнга и константы β

$$A_0 = \frac{\beta}{a_0} = -17.953; \quad B_0 = \frac{a_0 - \beta}{a_0} = 18.953.$$

Сравнение полученных результатов приведено на рис.4.

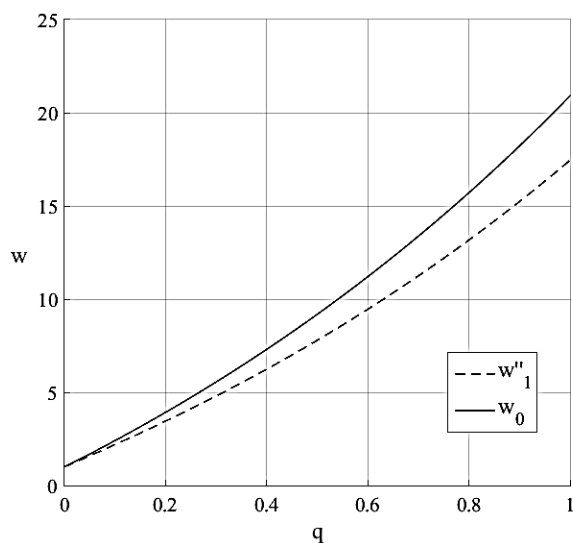


Рис.4. $w(q)$ при $\nu=0.3$ (аустенитный случай) для случаев коэффициента Пуассона – оператора и коэффициента Пуассона – постоянной величины.

Отдельно стоит отметить, что в этом конкретном случае отношение к упругому решению не производилось.

Наконец, для подтверждения локальной гипотезы о том, что для несжимаемых материалов значения прогиба, получаемые при решении задачи с использованием коэффициента Пуассона как оператора и для случая, когда коэффициент Пуассона считается константой материала, равной 0.5 (то есть, материал полностью несжимаем), и для случая, когда в ходе преобразования Лапласа он не учитывается, совпадают, получим значения неопределенных коэффициентов для случая $\nu = 0.5$, $E = 28000$ МПа (назовем его w''' , чтобы не выбиваться из общей логики принятия обозначений)

$$A_{111} = -4.052; B_{111} = 4.802; C_{111} = 0.$$

Подставив эти значения в (2), получим следующий график – рис.5.

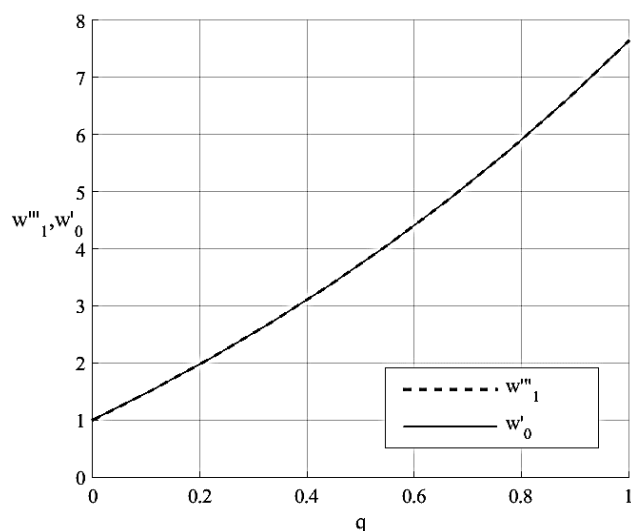


Рис.5. $w(q)$ для случаев при $\nu=0.5$ и постоянного коэффициента Пуассона.

Это окончательно численно подтверждает гипотезу о том, что для полностью несжимаемого материала учет коэффициента Пуассона как упругой

постоянной дает в данной задаче тот же результат, что и в случае трактовки коэффициента Пуассона как оператора.

ВЫВОДЫ

В рамках модели линейного деформирования СПФ при фазовых превращениях исследовано поведение нагруженного осевой силой поперечношовного силфона, материал которого – сплав с памятью формы – претерпевает прямое термоупругое мартенситное превращение.

Исследована возможность при решении задачи считать коэффициент Пуассона не оператором, а постоянной величиной. В результате численного эксперимента установлено, что для несжимаемого материала это допущение приводит в рассмотренной задаче к правильному результату. Если материал близок к несжимаемому, то получается приближенное решение.

Полученные результаты требуют отдельного исследования с целью анализа применимости этой гипотезы для любых конструкций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мовчан А.А. *Микромеханические определяющие уравнения для сплавов с памятью формы* // Проблемы машиностроения и надежности машин (Машиноведение). – 1994. – №6. – С.47-53.
2. Мовчан А.А. *Микромеханический подход к описанию деформации мартенситных превращений в сплавах с памятью формы* // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1995. – №1. – С.197-205.
3. Мовчан А.А. *Выбор аппроксимации фазовой диаграммы и модели исчезновения кристаллов мартенсита для сплавов с памятью формы* // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1995. – Т.36. – №2. – С.173-181.
4. Movchan Andrey A., Mishustin Ilya V. *Nanostructural prediction of shape memory alloys resistance asymmetry* // Nanoscience and Technology: An International Journal. – 2019. – Vol.10. – No.3. – Pp.233-245.
5. Мовчан А.А. *Кручение призматических стержней из сплавов с памятью формы* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2000. – №6. – С.143-154.
6. Mirzaeifar Reza, DesRoches Reginald, Yavari Arash. *A combined analytical, numerical, and experimental study of shape-memory-alloy helical springs* // International Journal of Solids and Structures. – 2011. – Vol.48. – Pp.611-624.
7. Mirzaeifar Reza, DesRoches Reginald, Yavari Arash, Gall Ken. *Coupled thermo-mechanical analysis of shape memory alloy circular bars in pure torsion* // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2012. – Vol.47. – Pp.118-128.
8. Jong-Ha Chung, Jin-Seok Heo and Jung-Ju Lee. *Modeling and numerical simulation of the pseudoelastic behavior of shape memory alloy circular rods under tension-torsion combined loading* // Smart Mater. Struct. – 2006. – Vol.15. – Pp.1651-1660.
9. Hyoung Seop Kim. *Finite element analysis of torsional deformation* // Materials Science and Engineering. – 2001. – Vol.A299. – Pp.305-308.
10. Mirzaeifar Reza, DesRoches Reginald, Yavari Arash. *Exact solutions for pure torsion of shape memory alloy circular bars* // Mechanics of Materials. – 2010. – Vol.42. – Pp.797-806.

11. Саганов Е.Б. *Решение задачи о прямом мартенситном переходе в стержне из сплава с памятью формы, находящемся под действием постоянного крутящего момента* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2014. – Т.20. – №3. – С.454-468.
12. Саганов Е.Б. *Решение задачи об обратном мартенситном переходе в стержне из сплава с памятью формы, находящемся под действием постоянного крутящего момента* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2014. – Т.20. – №4. – С.663-674.
13. Саганов Е.Б. *Анализ напряженно-деформированного состояния торсионного актуатора из сплава с памятью формы при рабочем ходе в условиях стесненного деформирования* // Вестник Московского Авиационного Института. – 2015. – Т.22. – №1. – С.109-116.
14. Саганов Е.Б. *Решение дважды связанной задачи кручения тонкостенных трубок из сплава с памятью формы в режиме сверхупругости* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т.21. – №4. – С.549-563.
15. Саганов Е.Б. *Моделирование процессов фазовых и структурных переходов при кручении тонкостенных трубок из сплава с памятью формы* // Машиностроение и инженерное образование. – 2016. – №1. – С.2-9.
16. Plietsch R., Bourauel C., Drescher D., Nellen B. *Analytical description of the bending behavior of NiTi shape-memory alloys* // Journal of Materials Science. – 1994. – Vol.29. – No.22. – Pp.5892-5902.
17. Мовчан А.А. *Исследование эффектов связности в задачах изгиба балок из сплава с памятью формы* // Прикладная механика и техническая физика. – 1998. – Т.39. – №1. – С.164-173.
18. Данилин А.Н., Мовчан А.А. *Метод решения геометрически нелинейных задач изгиба стержней из сплавов с памятью формы при прямом превращении* // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2002. – №4. – С.83-90.
19. Flor D.L.S., Urbina C., Ferrando F. *Asymmetrical bending model for NiTi shape memory wires: Numerical simulations and experimental analysis* // Strain. an International journal for Experimental Mechanics. – 2011. – Vol.47. – No.3. – Pp.255-267.
20. Сафронов П.А. *Учет разнсопротивляемости сплавов с памятью формы при решении задач о мартенситной неупругости и прямом превращении в балке, находящейся под действием изгибающего момента* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2016. – Т.22. – №1. – С.114-127.
21. Сафронов П.А. *Решение задач о мартенситной неупругости и прямом фазовом превращении в балке из сплава с памятью формы с учетом упругих деформаций и разнсопротивляемости этих сплавов* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2017. – Т.23. – №1. – С.69-89.
22. Сафронов П.А. *Решение связанной задачи о прямом превращении в балке из сплава с памятью формы с учетом разнсопротивляемости материала* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2019. – Т.24. – №4. – С.597-615.
23. Safronov P.A. *Tension-compression asymmetry and elastic strain incorporating into the solution of the problem of martensitic nonelasticity and direct martensitic transition in beams from a shape memory alloy undergoing bending* // Composites: Mechanics, Computations, Applications. – 2018. – Vol.9. – No.2. – Pp.119-139.

24. Young-Jin K., Chang-Ho L., Joung-Hun K., Jae H.L. *Numerical modelling of shape memory alloy plates considering tension/compression asymmetry and its verification under pure bending* // Solids and Structures. – 2018. – Vol.137. – Pp.77-88.
25. Сафронов П.А. *Цилиндрический изгиб пластинок из сплава с памятью формы с учетом разносопротивляемости этого материала* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т.24. – №2. – С.186-206.
26. Бобок Д.И. *Аналитическое решение задачи изгиба круглой пластины из сплава с памятью формы* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2020. – Т.26. – №1. – С.74-97.
27. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г. *Устойчивость круглой пластины из сплава с памятью формы при прямом мартенситном превращении* // Прикладная математика и механика. – 2006. – Т.70. – №5. – С.869-881.
28. Сильченко Л.Г., Мовчан А.А., Мовчан И.А. *Учет структурного превращения при анализе устойчивости круглой пластины из сплава с памятью формы* // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2010. – №5. – С.57-65.
29. Мовчан А.А., Машихин А.Е. *Деформации кругового цилиндра из сплава с памятью формы при структурном переходе или прямом фазовом превращении* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2012. – Т.18. – №2. – С.235-247.
30. Мовчан А.А., Левин А.С. *Задача о прямом мартенситном превращении в толстостенной сфере из сплава с памятью формы, находящейся под действием постоянного давления* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т.21. – №2. – С.221-236.
31. Машихин А.Б., Мовчан А.А. *Задача о прямом мартенситном превращении в толстостенном цилиндре из сплава с памятью формы* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2016. – №3. – С.100-114.
32. Машихин А.Е., Мовчан А.А. *Краевые задачи термомеханики для цилиндра и сферы из сплава с памятью формы* // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2017. – №3. – С.113-128.
33. Mirzaeifar R., Shakeri M., DesRoches R., Yavari A. *A semi-analytic analysis of shape memory alloy thick-walled cylinders under internal pressure* // Archive of Applied Mechanics. – 2011. – Vol.81. – No.8. – Pp.1093-1116.
34. Саганов Е.Б. *Численное моделирование явления мартенситной неупругости в сплавах с памятью формы с учетом их разносопротивляемости* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2019. – Т.25. – №2. – С.281-294.
35. Саганов Е.Б. *Решение задачи о толстостенном цилиндре из сплава с памятью формы, находящемся под давлением, с учетом разносопротивляемости* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2019. – Т.25. – №4. – С.563-573.
36. Бобок Д.И. *Аналитическое решение задачи о цилиндрическом баке под внутренним давлением из сплава с памятью формы* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2020. – Т.26. – №3. – С.409-435.
37. Мовчан А.А. *Модель влияния фазового механизма деформирования на структурный в сплавах с памятью формы* // Деформация и разрушение материалов. – 2019. – №7. – С.14-23.

38. Мовчан А.А. *Феноменологическая модель изменения фазово-структурных деформаций в сплавах с памятью формы* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2020. – №4. – С.140-151.
39. Мовчан А.А. *Объединенная модель фазово-структурного деформирования сплавов с памятью формы* // Деформация и разрушение материалов. – 2020. – №11. – С.2-10.
40. Мовчан А.А. *Модель неупругого деформирования сплавов с памятью формы* // Деформация и разрушение материалов. – 2021. – №3. – С.8-17.
41. Мовчан А.А. *Аналитическое решение задач о прямом и обратном превращении для сплавов с памятью формы* // Известия АН. Механика твердого тела. – 1996. – №4. – С.136-144.
42. Мовчан А.А. *Некоторые проявления способности к ориентированному превращению для сплавов с памятью формы* // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1996. – Т.37. – №6. – С.181-189.
43. Дубков А.А., Агудов Н.В. *Преобразование Лапласа: Учебно-методическое пособие*. – Нижний Новгород: Нижегородский государственный университет, 2016. – 36 с.
44. Балабух Л.И., Алфутов Н.А., Усюкин В.И. *Строительная механика ракет: Учебник для машиностроительных спец. вузов*. – М.: Высшая школа, 1984. – 391 с., ил.
45. Гольденвейзер А.Л. *Теория упругих тонких оболочек*. – М.: Наука, 1976. – 512 с.
46. Биргер И.А., Пановко Я.Г. *Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том I*. – М: Машиностроение, 1968. – 831 с.
47. Авдонин А.С., Фигуровский В.И. *Расчет на прочность летательных аппаратов. Учебное пособие для высших учебных заведений*. – М.: Машиностроение, 1985. – 440 с.
48. Работнов Ю.Н. *Механика деформируемого твердого тела*. – М.: Наука, 1979. – 743 с.
49. Феодосьев В.И. *Сопротивление материалов: Учеб. для вузов. / 10-е изд., перераб. и доп.* – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – 592 с.

REFERENCES

1. Movchan A.A. *Mikromekhanicheskie opredelyayushhie uravneniya dlya splavov s pamyat'yu formy [Micromechanical constitutive equations for shape memory alloys]*. Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin (Mashinovedenie), 1994, No.6, Pp.47-53.
2. Movchan A.A. *Micromechanical description of the deformation due to martensite transformations in shape-memory alloys*. Mechanics of Solids, 1995, Vol.30, No.1, Pp.186-194.
3. Movchan A.A. *The selection of the phase transition diagram approximation and model of disappearing of martensite crystals for shape memory alloys*. Applied Mechanics and Technical Physics, 1995, Vol.36, No.2, Pp.300-306.
4. Movchan A.A., Mishustin Ilya V. *Nanostructural prediction of shape memory alloys resistance asymmetry*. Nanoscience and Technology: An International Journal, 2019, Vol.10, No.3, Pp.233-245.
5. Movchan A.A. *Torsion of prismatic beams from shape memory alloys*. Mechanics of Solids, 2000, No.6, Pp.119-128.

6. Mirzaeifar Reza, DesRoches Reginald, Yavari Arash. *A combined analytical, numerical, and experimental study of shape-memory-alloy helical springs*. International Journal of Solids and Structures, 2011, Vol.48, Pp.611-624.
7. Mirzaeifar Reza, DesRoches Reginald, Yavari Arash, Gall Ken. *Coupled thermo-mechanical analysis of shape memory alloy circular bars in pure torsion*. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2012, Vol.47, Pp.118-128.
8. Jong-Ha Chung, Jin-Seok Heo and Jung-Ju Lee. *Modeling and numerical simulation of the pseudoelastic behavior of shape memory alloy circular rods under tension–torsion combined loading*. Smart Mater. Struct., 2006, Vol.15, Pp.1651-1660.
9. Hyoung Seop Kim. *Finite element analysis of torsional deformation*. Materials Science and Engineering, 2001, Vol.A299, Pp.305-308.
10. Mirzaeifar Reza, DesRoches Reginald, Yavari Arash. *Exact solutions for pure torsion of shape memory alloy circular bars*. Mechanics of Materials, 2010, Vol.42, Pp.797-806.
11. Saganov E.B. *Reshenie zadachi o pryamom martensitnom perekhode v sterzhne iz splava s pamyat'yu formy, nakhodyashhemsya pod dejstviem postoyannogo krutyashhego momenta [Solution of the problem of direct martensitic transition in rods from shape memory alloy under constant torque]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2014, Vol.20, No.3, Pp.454-468.
12. Saganov E.B. *Reshenie zadachi ob obratnom martensitnom perekhode v sterzhne iz splava s pamyat'yu formy, nakhodyashhemsya pod dejstviem postoyannogo krutyashhego momenta [Solution of the problem of reverse martensitic transition in rod from shape memory alloy under constant torque]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2014, Vol.20, No.4, Pp.663-674.
13. Saganov E.B. *Analiz napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya torsionnogo aktuatora iz splava s pamyat'yu formy pri rabochem khode v usloviyakh stesnennogo deformirovaniya [Analysis of the stress-strain state of a torsion actuator made of an alloy with shape memory during a working stroke under constrained deformation]*. Vestnik Moskovskogo Aviatsionnogo Instituta, 2015, Vol.22, No.1, Pp.109-116.
14. Saganov E.B. *Reshenie dvazhdy svyazannoy zadachi krucheniya tonkostennykh trubok iz splava s pamyat'yu formy v rezhime sverkhuprugosti [Solving the twofold related problem of torsion of thin-walled tubes from an alloy with shape memory in the superelastic mode]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2015, Vol.21, No.4, Pp.549-563.
15. Saganov E.B. *Modelirovanie protsessov fazovykh i strukturnykh perekhodov pri kruchenii tonkostennykh trubok iz splava s pamyat'yu formy [Modeling of processes of phase and structural transitions during torsion of thin-walled tubes made of shape memory alloys]*. Mashinostroenie i inzhenernoe obrazovanie, 2016, No.1, Pp.2-9.
16. Plietsch R., Bourauel C., Drescher D., Nellen B. *Analytical description of the bending behavior of NiTi shape-memory alloys*. Journal of Materials Science, 1994, Vol.29, No.22, Pp.5892-5902.
17. Movchan A.A. *Coupling effects in bending problems for beams of a shape memory alloy*. Applied Mechanics and Technical Physics, 1998, Vol.39, No.1, Pp.143-151.
18. Movchan A.A., Danilin A.N. *Solution the geometry non linear shape memory alloys beam bending problems at direct transformation*. Machinery Manufacture and Reliability, 2002, No.4, Pp.83-90.

19. Flor D.L.S., Urbina C., Ferrando F. *Asymmetrical bending model for NiTi shape memory wires: Numerical simulations and experimental analysis*. *Strain. An International journal for Experimental Mechanics*, 2011, Vol.47, No.3, Pp.255-267.
20. Safronov P.A. *Uchet raznosoprotivlyaemosti splavov s pamyat'yu formy pri reshenii zadach o martensitnoj neuprugosti i pryamom prevrashhenii v balke, nakhodyashhejsya pod dejstviem izgibayushhego momenta [Taking into account the different resistance of shape-memory alloys in solving problems of martensitic inelasticity and direct transformation in a beam under the action of a bending moment]*. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2016, Vol.22, No.1, Pp.114-127.
21. Safronov P.A. *Reshenie zadach o martensitnoj neuprugosti i pryamom fazovom prevrashhenii v balke iz splava s pamyat'yu formy s uchetom uprugikh deformatsij i raznosoprotivlyaemosti ehtikh splavov [Solving the problems of martensitic inelasticity and direct phase transformation in a beam made of shape memory alloy, taking into account the elastic deformations and the different resistance of these alloys]*. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2017, Vol.23, No.1, Pp.69-89.
22. Safronov P.A. *Reshenie svyaznoj zadachi o pryamom prevrashhenii v balke iz splava s pamyat'yu formy s uchetom raznosoprotivlyaemosti materiala [Solving the connected problem of direct transformation in a beam of a shape memory alloy, taking into account the material's SD effect]*. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2019, Vol.24, No.4, Pp.597-615.
23. Safronov P.A. *Tension-compression asymmetry and elastic strain incorporating into the solution of the problem of martensitic nonelasticity and direct martensitic transition in beams from a shape memory alloy undergoing bending*. *Composites: Mechanics, Computations, Applications*, 2018, Vol.9, No.2, Pp.119-139.
24. Young-Jin K., Chang-Ho L., Joung-Hun K., Jae H.L. *Numerical modelling of shape memory alloy plates considering tension/compression asymmetry and its verification under pure bending*. *Solids and Structures*, 2018, Vol.137, Pp.77-88.
25. Safronov P.A. *Tsilindricheskij izgib plastinok iz splava s pamyat'yu formy s uchetom raznosoprotivlyaemosti ehtogo materiala [Cylindrical bending of plates made of shape memory alloy, taking into account the SD effect of this material]*. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2018, Vol.24, No.2, Pp.186-206.
26. Bobok D.I. *Analiticheskoe reshenie zadachi izgiba krugloj plastiny iz splava s pamyat'yu formy [Analytical solution of the problem of bending of a round plate made of shape memory alloy]*. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2020, Vol.26, No.1, Pp.74-97.
27. Movchan A.A., Sil'chenko L.G. *The stability of a circular plate of shape memory alloy during a direct martensite transformation*. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2006, Vol.70, Pp.785-795.
28. Sil'chenko L.G., Movchan A.A., Movchan I.A. *Structural transformation taken into account during the analysis of the stability of a round plate with shape memory*. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2010, Vol.39, No.5, Pp.452-460.
29. Movchan A.A., Mashikhin A.E. *Deformatsii krugovogo tsilindra iz splava s pamyat'yu formy pri strukturnom perekhode ili pryamom fazovom prevrashhenii [Deformations of a circular cylinder made of shape memory alloy during*

- a structural transition or direct phase transformation*]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii*, 2012, Vol.18, No.2, Pp.235-247.
30. Movchan A.A., Levin A.S. *Zadacha o pryamom martensitnom prevrashhenii v tolstostennoj sfere iz splava s pamyat'yu formy, nakhodyashhejsya pod dejstviem postoyannogo davleniya* [The problem of direct martensitic transformation in a thick-walled sphere of a shape memory alloy that is subjected to a constant pressure]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii*, 2015, Vol.21, No.2, Pp.221-236.
 31. Mashikhin A.E., Movchan A.A. *Problem of Direct Martensite Transformation in a Thick-Walled Cylinder Made of Shape Memory Alloy*. *Mechanics of Solids*, 2016, Vol.51, No.3, Pp.321-333. DOI 10.3103/S0025654416030092.
 32. Mashikhin A.E., Movchan A.A. *Thermomechanical Boundary Problems for a Cylinder and Sphere Made of Shape Memory Alloy*. *PNIPU Mechanics Bulletin*, 2017, No.3, Pp.113-128.
 33. Mirzaeifar R., Shakeri M., DesRoches R., Yavari A. *A semi-analytic analysis of shape memory alloy thick-walled cylinders under internal pressure*. *Archive of Applied Mechanics*, 2011, Vol.81, No.8, Pp.1093-1116.
 34. Saganov E.B. *Chislennoe modelirovanie yavleniya martensitnoj neuprugosti v splavakh s pamyat'yu formy s uchetom ikh raznosprotivlyaemosti* [Numerical modeling of the phenomena of martensite inelasticity in shape memory alloys with account of their tension-compression asymmetry]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii*, 2019, Vol.25, No.2, Pp.281-294.
 35. Saganov E.B. *Reshenie zadachi o tolstostennom tsilindre iz splava s pamyat'yu formy, nakhodyashhemsya pod davleniem, s uchetom raznosoprotivlyaemosti* [Solution of the problem of a thick – walled cylinder under pressure from shape memory taking into account of tension – compression asymmetry]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii*, 2019, Vol.25, No.4, Pp.563-573.
 36. Bobok D.I. *Analiticheskoe reshenie zadachi o cilindricheskom bace pod vnutrennim davleniem iz splava s pamyat'yu formy`* [Analytical solution of the cylindrical tank made of a shape memory alloy under internal pressure] *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii*, 2020, Vol.26, No.4, Pp.409-435.
 37. Movchan A.A. *Model for the Effect of the Phase Mechanism of Deformation on the Structural Mechanism in Shape Memory Alloys*. *Russian Metallurgy (Metally)*, 2020, Vol.2020, No.4, Pp.282-290.
 38. Movchan A.A. *Phenomenological Model of Changes in Phase-Structural Deformations in Shape Memory Alloys*. *Mechanics of Solids*, 2020, Vol.55, No.4, Pp.573-583.
 39. Movchan A.A. *Joint Model for the Phase-Structural Deformation of Shape Memory Alloys*. *Russian Metallurgy (Metally)*, 2021, Vol.2021, No.4, Pp.333-340.
 40. Movchan A.A. *Model for the Inelastic Deformation of Shape Memory Alloys*. *Russian Metallurgy (Metally)*, 2021, Vol.2021, No.10, Pp.1203-1212.
 41. Movchan A.A. *Analytical solution of problems on the direct and inverse transformations in shape memory alloys*. *Mechanics of Solids*, 1996, Vol.31, No.4, Pp.116-123.
 42. Movchan A.A. *Some manifestation of the capability to oriented transformation for shape memory alloys*. *Applied Mechanics and Technical Physics*, 1996, Vol.37, No.6, Pp.926-933.

43. Dubkov A.A., Agudov N.V. *Preobrazovanie Laplasy: Uchebno-metodicheskoe posobie. [Laplace transformation: Uchebno-metodicheskoe posobie]*. Nizhnij Novgorod, Nizhegorodskij gosudarstvennyj universitet, 2016, 36 p.
44. Balabukh L.I., Alfutov N.A., Usyukin V.I. *Stroitel'naya mekhanika raket: Uchebnik dlya mashinostroitel'nykh spetsial'nykh vuzov [Construction mechanics of rockets]*. Moskva, Vysshaya shkola, 1984, 391 p.
45. Gol'denvejzer A.L. *Teoriya uprugikh tonkikh obolochek [Theory of thin elastic shells]*. Moskva, Nauka, 1976, 512 p.
46. Birger I.A., Panovko Ya.G. *Prochnost', ustojchivost', kolebaniya-/ Spravochnik v trekh tomakh. Tom I [Strength, stability, vibrations. Vol.1]*. Moskva, Mashinostroenie, 1968, 831 p.
47. Avdonin A.S., Figurowskij V.I. *Raschet na prochnost' letatel'nykh apparatov. Uchebnoe posobie dlya vysshikh uchebnykh zavedenij [Strength calculation of aircraft]*. Moskva, Mashinostroenie, 1985, 440 p.
48. Rabotnov Yu.N. *Mekhanika deformiruемого tverdogo tela [Mechanics of a solids]*. Moskva, Nauka, 1979, 743 p.
49. Feodos'ev V.I. *Soprotivlenie materialov [Strength of material]*. Moskva, Izdatel'stvo MGTU im. N.Eh. Baumana, 1999. 592 p.

Поступила в редакцию 16 ноября 2021 года.

Сведения об авторе:

Бобок Денис Игоревич – асп., Кафедра 602 «Проектирование и прочность авиационно-ракетных и космических изделий», ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия; e-mail: denis199750@gmail.com