УДК 539.3
DOI 10.33113/mkmk.ras.2022.28.01.087_097.04

ТЕПЛОВОЙ ИЗГИБ МЕХАНИЧЕСКИ НЕСЖИМАЕМОЙ БАЛКИ

Фирсанов Вик.В.

ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Условие несжимаемости для изотропного линейно упругого материала серьезно ограничивает применение классических гипотез теории изгиба балок, сформулированных Бернулли для малых деформаций и перемещений. При этом принимается, что такое сильное кинематическое условие как условие неизменяемости объема, справедливое для упругих составляющих линейных деформаций, должно безусловно выполняться. При изгибе несжимаемой балки силовой нагрузкой условие несжимаемости, которое характеризует отсутствие деформации изменения объёма, является, очевидно, однородным, то есть, объём балки на микро- и макроуровнях не изменяется в процессе деформирования, а при действии изгибающей тепловой нагрузки, распределённой по линейному закону в поперечном по отношению к нейтральной оси балки направлении, деформация изменения объёма пропорциональна действующей температуре, а упругая составляющая суммарной деформации изменения объёма равна нулю. Следовательно, механическая несжимаемость проявляется при действии на балку силовой нагрузки, в случае же теплового воздействия деформация изменения объёма является функцией температуры. Безусловно, это серьёзное отличие двух условий, однако и в случае температурной нагрузки условие частичной или механической несжимаемости может быть конфликтным по отношению к классическим гипотезам изгиба балки, что может привести к вырождению задачи. Полностью отвергать классические гипотезы изгиба балки было бы ошибкой, но от некоторых следует отказаться и ввести другие гипотезы, которые не приведут к серьёзному усложнению решаемых задач. Если принять отсутствие линейной деформации в поперечном к нейтральной оси балки направлении, отсутствие сдвиговой деформации и при этом выполнить условие пропорциональности деформации изменения объёма действующей температурной нагрузке, то два искомых перемещения, одно поперечное, другое продольное, можно будет определить из указанных соотношений, и полученные решения не будут соответствовать решаемой температурной задаче. В силу этого целесообразно отказаться от гипотезы отсутствия сдвиговой деформации, тогда две кинематических искомых функции будут связаны только зависимостью деформации изменения объёма от температурной нагрузки. В этом случае физическая связь между сдвиговыми деформациями и напряжениями восстанавливается. Учёт указанных деформаций сдвига особенно важен для материалов, обладающих низкой сдвиговой жёсткостью в поперечных направлениях. Гипотезу о ненадавливаемости волокон балки в поперечном направлении оставим в силе для физических соотношений, но в уравнениях равновесия эти напряжения сохраняются.

Ключевые слова: гипотезы; граничные условия; изгиб; балка; деформации; напряжения; механическая несжимаемость; определяющие соотношения; тепловая нагрузка

THERMAL BENDING OF A MECHANICALLY INCOMPRESSIBLE BEAM

Firsanov Vic. V.

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

ABSTRACT

The incompressibility condition for an isotropic linearly elastic material seriously limits the application of the classical hypotheses of the beam bending theory formulated by Bernoulli for small deformations and displacements. At the same time, it is assumed that such a strong kinematic condition as the volume immutability condition, which is valid for elastic components of linear deformations, must be unconditionally fulfilled. When an incompressible beam is bent by a force load, the incompressibility condition, which characterizes the absence of deformation of the volume change, is obviously homogeneous, that is, the volume of the beam at the micro and macro levels does not change during deformation, and under the action of a bending thermal load, the deformation of the volume change is proportional to the operating temperature, and the elastic component of the total deformation of the volume change is zero. Consequently, mechanical incompressibility manifests itself when a force load acts on the beam, but in the case of thermal action, the deformation of the volume change is a function of temperature. Of course, this is a serious difference between the two conditions, however, even in the case of a temperature load, the condition of partial or mechanical incompressibility may be conflicting with respect to the classical hypotheses of beam bending, which may lead to the degeneration of the problem. It would be a mistake to completely reject the classical hypotheses of beam bending, but some should be abandoned and other hypotheses should be introduced that will not lead to a serious complication of the tasks being solved If we accept the absence of linear deformation in the direction transverse to the neutral axis of the beam, the absence of shear deformation and at the same time fulfill the condition of proportionality of the deformation of the volume change to the operating temperature load, then the two desired displacements, one transverse, the other longitudinal, can be determined from these ratios, and the solutions obtained will not correspond to the temperature problem being solved. Because of this, it is advisable to abandon the hypothesis of the absence of shear deformation, then the two kinematic desired functions will be related only by the dependence of the deformation of the volume change on the temperature load. In this case, the physical connection between shear deformations and stresses is restored. Taking into account these shear deformations is especially important for materials with low shear stiffness in transverse directions. The hypothesis about the non-compressibility of the beam fibers in the transverse direction will remain valid for physical relations, but these stresses are preserved in the equilibrium equations.

Keywords: hypotheses; boundary conditions; bending; beam; deformations; stresses; mechanical incompressibility; determining relations; thermal load

ВВЕДЕНИЕ

К настоящему времени известно много работ, посвящённых уточнению классических теорий изгиба балок и пластин, и уточнения эти как для балок, так и для пластин связаны, в основном, с отказом от гипотезы плоских сечений или прямых нормалей. В этой гипотезе исследователи увидели основное противоречие: сдвиговых деформаций нет, а касательные напряжения играют существенную роль в изгибном напряжённом состоянии и балки, и пластинки. Состояние, при котором сдвиговые деформации отсутствуют, а касательные напряжения существенны, возможно, если модуль сдвига стремиться к бесконечности или очень большой. Это можно с большой натяжкой принять для традиционных конструкционных материалов, металлов и сплавов, но эти гипотезы неприемлемы для материалов с низкой сдвиговой жёсткостью в поперечном направлении, например, композитов с плоскостным армированием, резиноподобных и некоторых других низкомодульных материалов. К числу первых работ, уточняющих классические теории можно отнести работу русского ученого Тимошенко С.П., который продемонстрировал решение с постоянными по толщине пластинки сдвиговыми деформациями и, соответственно, с постоянными касательными напряжениями, которые в силу парности действуют на основаниях пластинки, что приводит к искажению исходной задачи [1]. Но влияние, действующей на основаниях касательной нагрузки на прогиб, очевидно, не является значительным, поэтому модель Тимошенко в необходимых случаях используют для уточнения классической теории.

Дальнейшие уточнения связаны с аппроксимацией перемещений по толщине с использованием полиномиальных функций различного порядка, от которых зависит точность результатов. Эти уточнения проводились для тонких пластин и балок достаточной длины, выполненных из традиционных конструкционных материалов [2-4]. Вариационный подход к расчёту несжимаемых деталей представлен в работе [5]. Специфика несжимаемых композитных материалов учтена в работах [6-8]. В работах [9,10] исследуются поведение эластичных и резиноподобных материалов. В работах [11,12] представлены термоупругие задачи для простых и сложных моделей механики деформируемого твёрдого тела. Для балок и пластин из несжимаемых материалов корректирующие расчётные модели практически отсутствуют.

1. СВЯЗЬ ДЕФОРМАЦИИ ИЗМЕНЕНИЯ ОБЪЁМА С ТЕИПЕРАТУРНОЙ НАГРУЗКОЙ ДЛЯ МЕХАНИЧЕСКИ НЕСЖИМАЕМОЙ СРЕДЫ

Эту связь получим из физических соотношений термоупругости плоской задачи при $\mu = 0,5$.

Плоское напряжённое состояние

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \mu\sigma_y\right) + \alpha t, \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \mu\sigma_x\right) + \alpha t, \quad \varepsilon_z = -\frac{\mu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) + \alpha t, \tag{1}$$

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 3\alpha t. \tag{2}$$

Плоское деформированное состояние

$$\varepsilon_x = \frac{1}{\bar{E}}\left(\sigma_x - \bar{\mu}\sigma_y\right) + \left(1+\mu\right)\alpha t, \quad \varepsilon_y = \frac{1}{\bar{E}}\left(\sigma_y - \bar{\mu}\sigma_x\right) + \left(1+\mu\right)\alpha t, \quad \varepsilon_z = 0,$$

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 3\alpha t.$$

Здесь $\bar{E} = \dfrac{E}{1-\mu^2} = \dfrac{4}{3}E, \ \ \bar{\mu} = \dfrac{\mu}{1-\mu} = 1, \quad \mu = 0,5.$

В этих формулах и далее под t понимается разность текущей и отсчётной температур, ось x совпадает с нейтральной осью, ось y направлена по высоте (поперечная координата), ось z – по ширине балки.

О классических гипотезах изгиба балок: гипотеза о ненадавливаемости волокон в поперечном направлении при изгибе балки большого значения для точности решения задачи не имеет, а две других гипотезы об отсутствии линейной деформации в поперечном направлении и сдвиговой в плоскости xy, могут привести к неприемлемому решению для материала с механически неизменяемым объёмом.

Если $\varepsilon_z = \gamma_{xy} = 0,$ то отсюда следует $v = v(x),$ $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -v',$ следовательно, $u = -v'y.$ Далее из условия (2) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 3\alpha t$ или $v''y = -3\alpha t(x, y),$ что приведёт к уравнению второго порядка для функции прогиба при задании температурного поля, линейно изменяющегося по ширине балки. Решение второго уравнения содержит две произвольных константы интегрирования, которых вполне достаточно для удовлетворения кинематических граничных условий на торцах балки, причём для функции прогиба граничные условия можно удовлетворить точно, а для продольных перемещений необходимо использовать смягчённые граничные условия. Уравнения равновесия плоской задачи удовлетворяются тождественно, если $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ всюду, что вполне приемлемо для решаемой задачи теплового изгиба балки. Но решение для нормального продольного напряжения $\sigma_x = 2E\alpha t$ не содержит произвольных констант, в связи с чем ни точное, ни смягчённое удовлетворение статических граничных условий на торцах при изгибающей температурной нагрузке не представляется возможным.

В рассматриваемой в этой статье модели продольные перемещения линейны по поперечной координате, поперечные перемещения (прогиб) определяются из условия псевдонесжимаемости. Для иллюстрации эффективности рассматриваемой модели рассмотрены разные варианты граничных условий. Принимается, что тепловая нагрузка не вызывает больших перемещений, напряжения зависят линейно от деформаций, для изотропного материала линейные деформации состоят из упругой и тепловой составляющих, а сдвиговые деформации имеют только упругую составляющую согласно гипотезам Франца Неймана.

2. ЛИНЕЙНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОДОЛЬНОГО СМЕЩЕНИЯ ПО ПОПЕРЕЧНОЙ КООРДИНАТЕ

Продольная координата совпадает с нейтральной линией балки, а поперечная – перпендикулярна к нейтральной линии. Начало координат для симметричных нагрузки и граничных условий на торцах располагается в средине нейтральной линии, а в случае отсутствия симметрии на одном из торцов балки.

Примем

$$u = u_0(x)y, \quad \sigma_y = 0, \quad t = t_0 y, \quad t_0 = const. \tag{3}$$

Интегрируя условие (2) с учётом (3) в виде $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 3\alpha t$ или $\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2\dfrac{\partial v}{\partial y} = 3\alpha t,$ где первое равенство относится к плоской деформации, а второе – к плоскому напряжённому состоянию, для которого в силу того, что $\sigma_z = \sigma_y = 0,$ $\dfrac{\partial w}{\partial z} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ получим решение для функции прогиба для плоской деформации

$$v = v_0(x) + \frac{1}{2}\left(3\alpha t_0 - u_0'\right) y^2, \tag{4}$$

$v = v_0\left(x\right) + \dfrac{1}{4}\left(3\alpha t_0 - u_0'\right)y^2$ – для плоского напряжённого состояния, где $v_0\left(x\right)$ – произвольная функция интегрирования, которая относится к классическому решению изгиба балки.

Выражения для прогибов балки для двух плоских состояний отличаются только численными коэффициентами при втором слагаемом.

Здесь и далее перемещение вдоль оси x обозначено через u, по оси y через v, по оси z через w, все функции со штрихами в правом верхнем углу обозначают соответствующие производные по координате x.

Для определения неизвестных одномерных функций перемещений с нулевым нижним индексом воспользуемся двумя уравнениями равновесия плоской задачи в отсутствие объёмных сил

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} = 0, \tag{5}$$

выразив напряжения через перемещения с помощью физических соотношений (1), добавив к ним связь касательных напряжений и сдвиговых деформаций, уравнения связи деформаций и перемещений, а также учитывая (4) и равенства (3), причём второе равенство (3) учитывается только в физических соотношениях

$$\sigma_x = E\left(\varepsilon_x - \alpha t\right) = E\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha t\right) = E\left(u_0' - \alpha t_0\right)y, \tag{6}$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = G\left(u_0 + v_0' - \frac{1}{2}u_0''y^2\right). \tag{7}$$

Нормальное напряжение в поперечном направлении, не учитываемое в физических соотношениях, определится через одномерные функции перемещений из второго уравнения системы (5), в итоге имеем следующие равенства (для несжимаемого материала $E = 3G$)

$$\sigma_y = -G\left[\left(u_0' + v_0''\right)y - \frac{1}{6}u_0'''y^3\right] + \varphi\left(x\right), \tag{8}$$

где $\varphi\left(x\right)$ – произвольная функция интегрирования; первое уравнение (5) после исключения из них напряжений будет таким

$$3Gu_0''y - Gu_0''y = 2Gu_0'' = 0,$$

откуда следует

$$u_0 = C_1 x + C_2, \tag{9}$$

где C_1 и C_2 – произвольные константы интегрирования. Теперь потребуем выполнения граничных условий отсутствия напряжений (7) и (8) на протяжённых границах балки при $y = \pm\dfrac{h}{2}$, где h – высота балки

$$u_0 + v_0' - u_0''\frac{h^2}{8} = 0,$$

$$u_0' + v_0'' - u_0'''\frac{h^2}{12} = 0, \quad \varphi\left(x\right) = 0.$$

Подставляя (9) в первое равенство приведённой системы, получим решение для функции v_0

$$v_0 = -C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3, \tag{10}$$

при этом второе равенство системы тождественно удовлетворяется.

Запишем решение для всех искомых перемещений и напряжений с точностью до двух произвольных констант интегрирования, используя (3), (4), (6), (7) и (8)

$$\begin{gathered} u = \left(C_1 x + C_2\right) y, \;\; v = -C_1 \frac{x^2}{2} - C_2 x + C_3 + \frac{1}{2}\left(3\alpha t_0 - C_1\right) y^2, \\ \sigma_x = 3G\left(C_1 - \alpha t_0\right) y, \;\; \sigma_y = \tau_{yx} = 0. \end{gathered} \tag{11}$$

Как видим, в приведённом решении количество произвольных констант увеличилось на одну, и касательное и нормальное напряжение в поперечном направлении также равны нулю, но структура решения изменилась, что делает возможным удовлетворение, точное или приближённое, всех возможных граничных условий на торцах балки.

3. УДОВЛЕТВОРЕНИЕ УСЛОВИЙ ЗАКРЕПЛЕНИЯ

Рассмотрим несколько вариантов закрепления балки и оценим возможность удовлетворения граничных условий с целью определения произвольных констант.

1. Рассмотрим жёсткое защемление на торцах балки длиной $2l$. Начало координат целесообразно поместить в середине в силу симметрии граничных условий и температурной нагрузки. Используем решение (11).

При $x = \pm l$ имеем следующие условия

$$u = v = 0.$$

Благодаря симметрии $C_2 = 0$, и в распоряжении остаётся две константы, которых недостаточно для точного удовлетворения кинематических граничных условий. Очевидно, что с помощью этих констант можно точно удовлетворить условия для прогиба, положив

$$C_1 = 3\alpha t_0, \;\; C_3 = \frac{3}{2}\alpha t_0 l^2.$$

При этом условия для продольных перемещений выполняются интегрально (смягчённо). Окончательное решение для этого варианта граничных условий имеет вид

$$u = 3\alpha t_0 xy, \quad v = \frac{3}{2}\alpha t_0 \left(l^2 - x^2\right), \;\; \sigma_x = 6G\alpha t_0 y.$$

2. Шарнирное опирание на торцах. Используем решение (11). Начало координат в середине балки. Выполняются следующие условия

при $x = \pm l \quad v = 0, \;\; \sigma_x = 0$.

Если точно удовлетворить граничные условия для прогиба, как в предыдущем примере, то не удастся ни точно, ни приближённо выполнить условия для нормальных напряжений σ_x, поэтому константу C_1 определим из условия равенства нулю этих напряжений всюду, включая торцевые сечения, а константу C_3 из условия равенства нулю классической составляющей (10) суммарного прогиба

$$C_1 = \alpha t_0, \;\; C_3 = \frac{1}{2}\alpha t_0 l^2.$$

Решение этой задачи имеет вид

$$u = \alpha t_0 xy, \quad v = \frac{1}{2}\alpha t_0 \left(l^2 - x^2 + 2y^2\right), \quad \sigma_x = 0.$$

В статически определимой системе, а в этом случае рассматривается именно такая система, напряжения в случае тепловой нагрузки отсутствуют, а перемещения отличны от нуля. Суммарный прогиб равен нулю в торцевых сечениях при $y = 0$. Оценим влияние третьего слагаемого во второй приведённой формуле в середине балки при $x = 0$ и при $y = \pm\frac{h}{2}$

$$v = \frac{1}{2}\alpha t_0 \left(l^2 - \frac{h^2}{2}\right).$$

Ввиду малости квадрата высоты балки по сравнению с квадратом длины вторым слагаемым в скобках можно пренебречь и констатировать, что условие отсутствия прогиба в торцевых сечениях балки выполняется практически точно.

3. Консольная балка с жёстко защемлённым левым торцевым сечением и свободным правым.

Начало координат располагаем в середине левого торца балки длиной $2l$. Реализуются следующие граничные условия

При $x = 0$ $\quad u = v = 0$, при $x = 2l$ $\quad \sigma_x = \tau_{yx} = 0$.

Применив эти условия к (11), получим следующие значения констант

$$C_2 = 0, \quad C_1 = \alpha t_0, \quad C_3 = -\alpha t_0 \frac{h^2}{12}$$

и решение этой задачи

$$u = \alpha t_0 xy, \quad v = -\alpha t_0 \left(\frac{x^2}{2} - y^2 + \frac{h^2}{12}\right), \quad \sigma_x = 0$$

$$v = -\alpha t_0 \left(\frac{x^2}{2} - y^2\right),$$

причём константа C_3 определялась из интегрального условия

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(C_3 + \alpha t_0 y^2\right) dy = 0.$$

Для продольных перемещений, нормальных и касательных напряжений граничные условия выполняются точно, для функции прогиба почти точно. В качестве альтернативного варианта определения констант является приравнивание нулю константы C_3. Решение для прогиба будет незначительно отличаться от приведённого

$$v = -\alpha t_0 \left(\frac{x^2}{2} - y^2\right).$$

Рассматриваемая задача является статически определимой, поэтому в балке имеют место упругие перемещения, но не возникают напряжения.

4. УЧЕТ СЛАГАЕМОГО ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ В ЗАВИСИМОСТИ ПРОДОЛЬНОГО СМЕЩЕНИЯ ОТ ПОПЕРЕЧНОЙ КООРДИНАТЫ

Основным недостатком полученного решения и, следовательно, самой модели является относительный дефицит произвольных констант для точного и безвариативного выполнения граничных условий. Естественным ответом на это является усложнение модели, описываемой двумя первыми равенствами (3), причём изменение коснётся только первого равенства

$$u = u_0(x)\,y + u_1(x)\,y^3. \tag{12}$$

В этом представлении также предполагается, что продольное перемещение нечётно по поперечной координате. Используя условие (2), определим функцию прогиба

$$v = v_0(x) + \frac{3}{2}\alpha t_0 y^2 - u_0' \frac{y^2}{2} - u_1' \frac{y^4}{4}.$$

Искомыми неизвестными при решении задачи в перемещениях являются три функции продольной координаты $u_0,\ u_1,\ v_0$.

Выразим напряжения через деформации и перемещения с помощью (6) и (7)

$$\sigma_x = 3G(\varepsilon_x - \alpha t) = 3G\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha t\right) = 3G(u_0' - \alpha t_0)\,y + 3Gu_1' y^3, \tag{13}$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = G\left[u_0 + v_0' + \left(3u_1 - \frac{1}{2}u_0''\right)y^2 - \frac{1}{4}u_1'' y^4\right], \tag{14}$$

подставим в уравнения равновесия (5) и определим из второго уравнения (5) σ_y

$$(u_0''' + 3u_1)\,y + u_1''' y^3 = 0, \tag{15}$$

$$\sigma_y = -G\left[(u_0' + v_0'')\,y - \left(u_1' - \frac{1}{6}u_0'''\right)y^3 - \frac{1}{20}u_1''' y^5\right] + f(x), \tag{16}$$

где $f(x)$ – произвольная функция интегрирования.

Выполнив граничные условия отсутствия напряжений (14) и (16) на протяжённых границах балки при $y = \pm\frac{h}{2}$ $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ и добавляя к полученным равенствам уравнение (15), получим полную систему уравнений для определения искомых одномерных функций

$$\begin{gathered} u_0 + v_0' + \left(3u_1 - \frac{1}{2}u_0''\right)\frac{h^2}{4} - \frac{1}{4}u_1''\frac{h^4}{16} = 0, \\ (u_0' + v_0'')\frac{h}{2} - \left(u_1' - \frac{1}{6}u_0'''\right)\frac{h^3}{8} - \frac{1}{20}u_1'''\frac{h^5}{32} = 0, \\ f(x) = 0. \end{gathered} \tag{17}$$

В этих равенствах отсутствует поперечная координата, а уравнение (15) её содержит, причём в разной степени, поэтому существует вариативность в способах его решения, один из них – это приравнять нулю скобки, стоящие перед поперечной координатой в первой и третьей степени, а второй – избавиться от поперечной координаты путём умножения левой и правой части уравнения (15) на ydy и последующего интегрирования по высоте балки.

Реализуем первый вариант. В результате имеем

$$u_0'' + 3u_1 = 0, \quad u_1'' = 0.$$

После интегрирования получим

$$u_1 = a_1 x + a_2, \quad u_0 = -3\left(a_1 \frac{x^3}{6} + a_2 \frac{x^2}{2} + a_3 x + a_4\right), \tag{18}$$

где $a_1 - a_4$ – произвольные константы интегрирования.

Подставляя полученное в первое уравнение (17), получим решение с точностью до произвольных констант для функции v_0

$$v_0 = 3\left(a_1 \frac{x^4}{24} + a_2 \frac{x^3}{6} + a_3 \frac{x^2}{2} + a_4 x + a_5\right) - \frac{9h^2}{8}\left(a_1 x^2 + a_2 x + a_3\right).$$

Второе уравнение (17) после упрощения приводится к виду $u_0''' = 0$. Подставляя сюда второе равенство (18), получим $a_1 = 0$. Константу a_2 можно положить равной нулю без ущерба для решения задачи, следовательно, уточняющая решение функция $u_1 = 0$ и проиллюстрированный подход не даёт какого-нибудь отличия от уже полученного решения, в котором функция продольного смещения линейна по высоте балки.

Реализуем второй вариант удовлетворения уравнения (15)

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left[\left(u_0'' + 3u_1\right) y + u_1'' y^3\right] y dy = 0.$$

Выполнив интегрирование, получим дифференциальное уравнение, которое не содержит поперечную координату

$$u_0'' + 3u_1 + \frac{3h^2}{20} u_1'' = 0. \tag{19}$$

Присоединяя к этому уравнению первые два равенства (17), получим систему из трёх дифференциальных уравнений для определения трёх искомых функций продольной координаты. Довольно просто эту систему можно свести к одному уравнению с одной неизвестной следующим образом: продифференцируем один раз (19) и первое уравнение (17), исключим u_0''' из преобразованных уравнений (17), в результате получим

$$u_0' + v_0'' - \frac{3h^2}{8} u_1' + \frac{h^4}{320} u_1''' = 0, \qquad u_0' + v_0'' + \frac{9h^2}{8} u_1' + \frac{h^4}{320} u_1''' = 0.$$

Вычитаем из первого уравнения второе, имеем $u_1' = 0$, следовательно $u_1 = c = 0$. И для этого варианта интегрирования уравнения (15), имеем те же решения для искомых функций.

ВЫВОДЫ

1. Показано, что классические гипотезы изгиба балок не применимы для балок, выполненных из механически несжимаемого материала.

2. В предлагаемой модели использованы всего две гипотезы: линейное изменение по поперечной координате продольных перемещений и отсутствие в физических соотношениях поперечного нормального напряжения.

3. На первый взгляд решение для искомых функций содержит недостаточное количество констант, однако в рассмотренных случаях закреплений балки все константы были определены, но при этом некоторые условия выполнены интегрально.

4. При тепловом изгибающем воздействии на механически несжимаемую балку прогиб является квадратичной функцией продольной координаты в отличие от несжимаемой балки при силовом на неё воздействии.

5. При статически определимых вариантах закрепления балки в торцевых сечениях, в ней происходят упругие перемещения, а все напряжения равны нулю, при статически неопределимой форме закрепления, имеют место упругие перемещения и продольные нормальные напряжения.

6. Усложнение модели путём добавления дополнительной составляющей продольных перемещений, пропорциональной третьей степени поперечной координаты, не даёт никакого уточнения к уже полученному результату.

7. Задача решалась при действии на балку постоянного по длине температурного поля, но она также легко решается при переменной по длине температуре.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. *Пластины и оболочки*. – М.: Наука, 1966 – 636 с.
2. Васильев В.В., Лурье С.А. *К проблеме построения неклассических теорий пластин* // Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела. – 1990. – С.158-167.
3. Васильев В.В., Лурье С.А. *Вариант уточненной теории изгиба балок из слоистых пластмасс* // Механика полимеров. – 1972. – №04. – С.577-768.
4. Carrera E., Giunta G., Petrolo M. *Beam Structures: Classical and Advanced Theories*. – Wiley, 2011. – 204 p.
5. Бидерман В.Л., Мартьянова Г.В. *Вариационный метод расчёта деталей из несжимаемого материала* / В книге Расчёты на прочность. – М.: Машиностроение, 1977. – Вып.18.
6. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Кольжанов Д.Ю., Каримов С.Б. *Моделирование несжимаемых слоистых композитов с конечными деформациями на основе метода асимптотического осреднения* // Математическое моделирование и численные методы. – 2017. – №1. – С.32-54.
7. Фирсанов В.В. *Изгиб балки, выполненной из материала с неизменяемым объёмом* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2020. – Т.26. – №2. – С.200-211.
8. Козлов В.В. *Анализ определяющих соотношений изотропных упругих несжимаемых материалов* // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. – 2011. – Вып.3. – С.93-101.
9. Pobedrya B.E. *Equations of state of viscoelastic isotropic media* // Mechanics of Composite Materials. – 1967. – Vol.3. – Iss.4. – Pp.429-432.
10. Treloar L.R.G. *The Physics of Rubber Elasticity*. – OUP Oxford, 2005. – 324 p.
11. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. *Сопротивление полимерных и композитных материалов. 3-е изд., перераб. и доп.* – Рига: Зинатне, 1980. – 572 с.
12. Рассудов В.М., Красюков В.П., Панкратов Н.Д. *Некоторые задачи термоупругости пластинок и пологих оболочек*. – Саратов: Издательство Саратовского университета, 1973. – 155 с.

REFERENCES

1. Timoshenko S.P., Vojnovskij-Kriger S. *Plastiny i obolochki [Plates and Shells]*. Moskva, Nauka, 1966, 636 p.
2. Vasil’ev V.V., Lur’e S.A. *K probleme postroeniya neklassicheskikh teorij plastin [On the problem of constructing non-classical plate theories]*. Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tvyordogo tela, 1990, Pp.158-167.
3. Vasil’ev V.V., Lur’e S.A. *Variant utochnennoj teorii izgiba balok iz sloistykh plastmass [A variant of the refined theory of bending beams made of laminated plastics]*. Mekhanika polimerov, 1972, No.04, Pp.577-768.
4. Carrera E., Giunta G., Petrolo M. *Beam Structures: Classical and Advanced Theories*. Wiley, 2011, 204 p.
5. Biderman V.L., Mart’yanova G.V. *Variatsionnyj metod raschyota detalej iz neszhimaemogo materiala [Variational method for calculating parts made of incompressible material]*. V knige Raschyoty na prochnost’. Moskva, Mashinostroyeniye, 1977, Iss.18.
6. Dimitriyenko Yu.I., Gubareva Ye.A., Kol’zhanov D.Yu., Karimov S.B. *Modelirovanie neszhimaemykh sloistykh kompozitov s konechnymi deformatsiyami na osnove metoda asimptoticheskogo osredneniya [Incompressible layered composites with finite deformations on the basis of the asymptotic averaging method]*. Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody, 2017, No.1, Pp.32-54.
7. Firsanov V.V. *Izgib balki, vypolnennoj iz materiala s neizmenyaemym ob”yomom [Bending beams made of material with an unchangeable volume]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2020, Vol.26, No.2, Pp.200-211.
8. Kozlov V.V. *Analiz opredelyayushhikh sootnoshenij izotropnykh uprugikh neszhimaemykh materialov [Analysis of the determining ratios of isotropic elastic incompressible materials]*. Izvestiya Tul’skogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennye nauki, 2011, Iss.3, Pp.93-101.
9. Pobedrya B.E. *Equations of state of viscoelastic isotropic media*. Mechanics of Composite Materials, 1967, Vol.3, Iss.4, Pp.429-432.
10. Treloar L.R.G. *The Physics of Rubber Elasticity*. OUP Oxford, 2005, 324 p.
11. Malmejster A.K., Tamuzh V.P., Teters G.A. *Soprotivlenie polimernykh i kompozitnykh materialov [Resistance of polymer and composite materials]* Riga, Zinatne, 1980, 572 p.
12. Rassudov V.M., Krasyukov V.P., Pankratov N.D. *Nekotorye zadachi termouprugosti plastinok i pologikh obolochek [Some problems of thermoelasticity of plates and flat shells]*. Saratov, Izdatel’stvo Saratovskogo universiteta, 1973, 155 p.

Поступила в редакцию 10 января 2022 года.

Сведения об авторе:

Фирсанов Виктор Васильевич – к.т.н., доц., Кафедра «Проектирование и прочность авиационно-ракетных и космических изделий», ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия; e-mail: kaf603@mai.ru