

УДК 539.42
EDN DQULNX (<https://elibrary.ru/dqulnx>)



МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЖЕСТКОЙ СЕТКИ С ДЕФОРМИРУЕМОЙ ПРЕГРАДОЙ*

Головешкин В.А.^{1,2}, Мягков Н.Н.¹

¹ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

²Московский технологический университет, г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Предложена аналитическая модель высокоскоростного взаимодействия жесткого сетчатого ударника (сетки) с полубесконечной деформируемой преградой, которая моделируется жестко идеально-пластичным телом. Рассматриваем «нормальный» удар сетки по преграде: полагаем, что в начальный момент и последующие моменты времени полотно сетки параллельно поверхности полупространства преграды, а вектор скорости сетки перпендикулярен поверхности преграды. После встречи сетки с преградой, картина течения преграды имеет ячеистую структуру, отображающую геометрию сетки. Ввиду периодической структуры сетки и симметрии ячейки сетки в работе рассматривается течение, сопровождающее внедрение только 1/8 ячейки сетки. Зависимость полученных решений от геометрических параметров сетки характеризуются одним безразмерным параметром γ равным отношению диаметра проволоки к периоду сетки, $0 \leq \gamma \leq 1$. В работе получены аналитические формулы для: глубины внедрения сетки в преграду; суммарной массы, выброшенной при внедрении сетки; суммарного импульса выброшенной массы; суммарной энергии выброшенной массы. Даны количественные оценки значений этих величин при внедрении стальной сетки в алюминиевую преграду в зависимости от γ . Также дана оценка эффекта усиления импульса преграды, который оказался наибольшим для сетки с малым значением параметра γ , когда диаметр проволоки значительно меньше периода сетки. В случае удара стальной сетки по алюминиевой преграде при скорости удара ~ 3 км/с коэффициент усиления импульса преграды при внедрении сетки составляет до 5/3.

Ключевые слова: аналитическая модель; высокоскоростной удар; сетчатый ударник; деформируемая преграда; выброшенная масса преграды; импульс выброшенной массы; эффект усиления импульса преграды

MODEL OF INTERACTION OF A RIGID MESH WITH A DEFORMABLE TARGET

Goloveshkin V.A.^{1,2}, Myagkov N.N.¹

¹Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

²Moscow Technological University (MIREA), Moscow, Russia

ABSTRACT

An analytical model of the high-velocity interaction of a rigid mesh with a semi-infinite deformable target, which is modeled by a rigid-plastic body, is proposed. We consider the “normal” impact of the mesh on the target: we assume that at the initial moment and subsequent

* Работа выполнена в рамках государственного задания ИПРИМ РАН.

moments of time the mesh is parallel to the target surface, and the mesh velocity vector is perpendicular to the target surface. After the mesh meets the target, the flow pattern of the target has a cellular structure that reflects the geometry of the mesh. Due to the periodic structure of the mesh and the symmetry of the mesh cell, we consider the flow that accompanies the penetration of only 1/8 of the mesh cell. The dependence of the solutions obtained on the geometric parameters of the mesh is characterized by one dimensionless parameter γ equal to the ratio of the wire diameter to the period of the mesh, $0 \leq \gamma \leq 1$. Analytical formulas are obtained for: the depth of penetration of the mesh into the target; the total mass ejected during the penetration; the total momentum of the ejected mass; the total energy of the ejected mass. Quantitative estimates of the values of these quantities are given for the penetration of a steel mesh into an aluminum target, depending on γ . The effect of amplification of the target momentum is also estimated, which turned out to be the largest for a mesh with a small value of the parameter γ , when the wire diameter is much less than the mesh period.

Keywords: analytical model; high-velocity impact; mesh projectile; deformable target; ejected mass of the target; the momentum of the ejected mass; the effect of amplifying the target momentum

ВВЕДЕНИЕ

Известно [1-2], что для защиты космического аппарата (КА) от метеороидов и космического мусора используется экранная схема построения защиты: при высоких скоростях соударения, характерных для космических условий, происходит интенсивная фрагментация ударника на экране, приводящая к перераспределению импульса, действующего на защищаемую стенку. В настоящее время известно, что в качестве экрана могут быть успешно использованы не только сплошные алюминиевые пластины, но и другие конструкционные материалы, например, металлические сетки, сотовые панели, и различные композиционные материалы. Известно [1-4], что использование сеточных экранов позволяет уменьшить общий вес защиты КА при неизменном уровне защищенности. Этим объясняется интерес к сеткам, как конструкционному материалу экранной защиты КА от метеороидов и космического мусора.

В настоящее время механика высокоскоростного взаимодействия ударника с сеткой изучена недостаточно. Эксперименты такого рода проводятся с помощью легкогазовой баллистической установки и являются весьма дорогостоящим мероприятием [1-3]. В отличие от пластинки, которая в рассматриваемых задачах характеризуется одним геометрическим параметром – своей толщиной, сетка характеризуется двумя геометрическими параметрами – диаметром проволоки, из которой сплетена сетка, и размером (периодом) ячейки сетки. Т.е. для экспериментального исследования сетки требуется, вообще говоря, больший объем экспериментов, чем для пластинки. Кроме того, в настоящее время доступно численное моделирование задач взаимодействия ударника с сеткой в 3D постановке (см., например, [5-6]). Тем не менее, для инженерных приложений представляет интерес построение аналитических моделей, использующих минимальное число параметров материалов ударника и сетки.

В настоящей работе, как и в работах [6-8], мы обращаем задачу и рассматриваем внедрение жесткого сетчатого ударника (сетки) в массивную преграду, которая моделируется неограниченным деформируемым полупространством. В такой постановке, как показывает элементарный размерный анализ, зависимость решения от геометрических параметров сетки

с квадратной ячейкой (рис.1а) может быть учтена только одним безразмерным параметром γ равным отношению диаметра проволоки к периоду сетки ($0 \leq \gamma \leq 1$). Малые значения параметра $\gamma \ll 1$ соответствуют случаю, когда соседние проволоки ячейки сетки не влияют на внедрение друг друга. В этом случае, например, для нахождения глубины внедрения сетки достаточно рассмотреть внедрение одной струны. Решение задачи о внедрении одной жесткой струны в деформируемое полупространство дано нами в [8]. Случай, когда апертюра сетки (видимое на просвет расстояние между проволоками) сравнима или меньше диаметра проволоки, из которой сплетена сетка, рассмотрен нами в работе [6]. Этот случай соответствует значениям $\gamma_* < \gamma < 1$, где величина $\gamma_* \approx 0.43$ определяется в рамках модели, предложенной в настоящей работе.

Модель, предложенная в настоящей работе, обобщает два перечисленных выше случая и охватывает весь интервал значений параметра $\gamma: 0 \leq \gamma \leq 1$.

1. МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЖЕСТКОГО СЕТЧАТОГО УДАРНИКА С ДЕФОРМИРУЕМОЙ ПРЕГРАДОЙ

1.1. Описание модели.

Рассматриваемая здесь модель взаимодействия сетчатого ударника с преградой, является модификацией модели, предложенной нами ранее в работе [6]. При построении новой модели нами двигало желание уточнить модель [6] путем пересмотра ряда допущений, положенных в основу этой модели. Например, одним из недостатков модели, предложенной в работе [6], являлось то, что там предполагалось течение материала во всем объеме ячейки, что при малых значениях параметра сетки γ (тонкая проволока), вообще говоря, неверно.

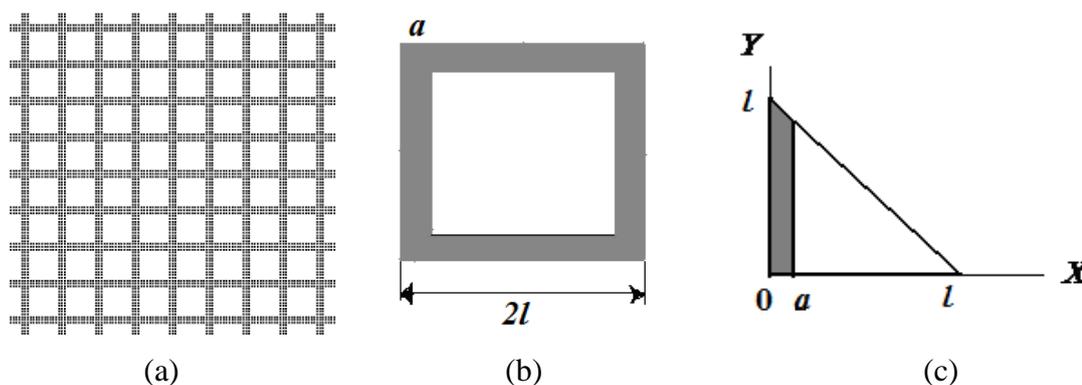


Рис.1. (а) Фрагмент сетчатого ударника; (б) ячейка сетки, где $2l$ – период сетки, равный $l_a + d_w$, l_a – апертюра, a – радиус проволоки; (с) 1/8 ячейки сетки.

Сплошная преграда рассматривается как деформируемое полупространство, свойства которого моделируются жестко идеально-пластичным телом. Таким образом, для описания механических свойств материала преграды достаточно двух параметров, которыми являются предел текучести Y_t и плотность ρ_t . Сетчатый ударник состоит из несжимаемого недеформируемого материала с плотностью ρ_s . Он имеет вид неограниченного полотна (рис.1а), состоящего из квадратных ячеек размером $2l$ (рис.1б), образованных проволоками диаметром $d_w = 2a$

и лежащих в одной плоскости. Круглое поперечное сечение проволоки сетки заменяем прямоугольным сечением с основанием $2a$ и той же площадью, что и круг диаметром $2a$. Считаем, что во все моменты времени полотно сетки параллельно поверхности полупространства преграды, а вектор скорости сетки перпендикулярен поверхности преграды.

В исходную постановку задачи входят следующие параметры: Y_t и ρ_t – определяющие механические свойства преграды; l и a – параметры, определяющие геометрию сетки; ρ_s – плотность материала сетки; V_0 – начальная скорость ударника. Анализ размерности показывает, что интегральные характеристики решения (например, безразмерная глубина проникания сетки в преграду $S_p/2a$) зависят от параметров задачи следующим образом

$$S_p/2a = F_p \left(\frac{\rho_t V_0^2}{Y_t}, \frac{\rho_s}{\rho_t}, \frac{a}{l} \right), \quad (1)$$

т.е. зависимость от геометрических параметров сетки учитывается только через безразмерный параметр a/l , который в тексте статьи обозначен через γ ($0 \leq \gamma \leq 1$).

После встречи сетки с преградой, картина течения преграды имеет ячеистую структуру, отображающую геометрию сетки. Ввиду периодической структуры сетки и симметрии ячейки сетки достаточно рассмотреть течение, сопровождающее внедрение только $1/8$ ячейки так, как это показано на рис.1с. Ось Z на рис.1 и 2 направлена против направления удара, ее начало расположено на поверхности преграды в точке контакта сетки с поверхностью преграды. Будем считать, что деформация происходит при $-h < z < 0$. Рассмотрим следующую схему течения, которое сопровождает внедрение сетки в преграду (рис.2).

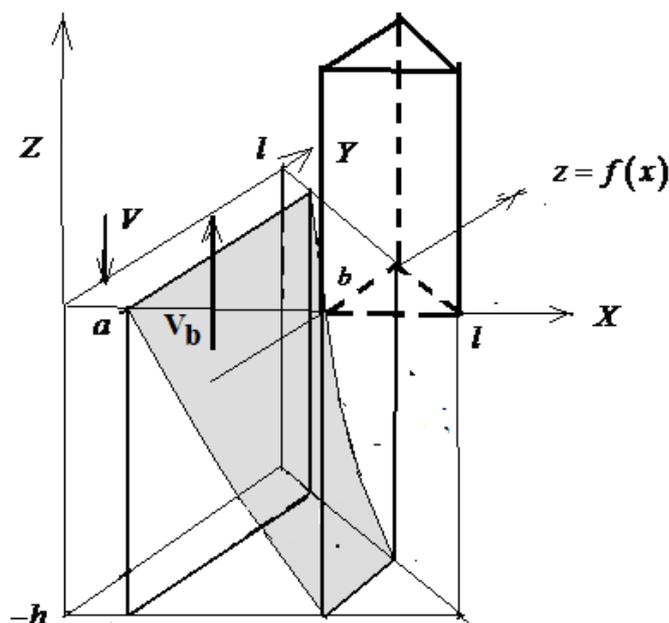


Рис.2. Схема течения при взаимодействии сетки с преградой (показана $1/8$ ячейки сетки).

Начальную скорость сетки обозначим через V_0 , текущую – через V . Деформация ячейки преграды происходит по следующей схеме. В каждой ячейке

имеются деформируемая зона, жесткая зона и неподвижная зона, которые разделены поверхностями $z = f(x)$, $x = b$. Жесткая зона расположена при $f(x) < x < b$. Неподвижная зона расположена при $b < x < l$. Жесткая зона движется как твердое недеформируемое тело со скоростью V_b (рис.2), против направления движения ударника. В силу условия несжимаемости имеем

$$V_b = V \frac{\gamma(2-\gamma)}{(\beta-\gamma)(2-\beta-\gamma)}, \text{ где } \gamma = a/l < 1; \beta = \frac{b}{l}, \gamma < \beta \leq 1. \quad (2)$$

Видно, что принятая модель деформации ячейки преграды отличается от модели [6] наличием неподвижной зоны в центре ячейки. Т.о. здесь появляется новый параметр задачи b (или $\beta = b/l$). Кроме того, в отличие от [6], мы предполагаем, что жесткий материал преграды, поднявшийся в процессе движения выше уровня границы контакта сетки с преградой, покидает преграду и в дальнейшем движении не рассматривается. Поле скоростей в материале преграды строится по схеме, которая вынесена в Приложении 1. Оно имеет вид (П1.5, П1.6, П1.1)

$$u_x = \frac{V}{2h} \left[\frac{l^2}{(l-x)} - l \right] + \frac{V}{2h} x, \quad (3)$$

$$u_y = -\frac{V}{2h} \left[\frac{l^2}{(l-x)^2} - 1 \right] y, \quad (4)$$

$$u_z = -\frac{V}{h} (z+h). \quad (5)$$

Вывод уравнения поверхности $z = f(x)$, разделяющей жесткую и деформируемую зону, также вынесен в Приложении 1. Уравнение имеет вид (П1.9)

$$f(x) = h \frac{l^2 - (l-b)^2}{(l-a)^2 - (l-b)^2} \left[\frac{l^2 - (l-a)^2}{l^2 - (l-x)^2} - 1 \right]. \quad (6)$$

Еще раз подчеркнем, что основное отличие данной модели от модели, рассмотренной в [6], состоит во введении границы деформируемой зоны b , которая определяется в процессе решения. В работе [6] полагалось $b = l$.

1.2. Мощность внутренних сил при внедрении.

Для дальнейшего анализа требуется определить полную мощность внутренних сил W . Она включает следующие составляющие: W_1 – полная мощность внутренних сил в деформируемой зоне; W_2 – полная мощность внутренних сил при разрыве скорости на поверхности $z = -h$; W_3 – полная мощность внутренних сил при разрыве скорости на поверхности $z = f(x)$; W_4 – полная мощность внутренних сил при разрыве скорости на поверхности $z = 0$; W_5 – полная мощность внутренних сил при разрыве скорости на поверхности $x = b$. Таким образом, полная мощность внутренних сил равна

$$W = \sum_{i=1}^5 W_i.$$

Используем безразмерные величины $\gamma = a/l$; $\beta = b/l$; $\bar{h} = h/l$ (в дальнейшем черту над h опускаем). Вычисления дают (см. Приложение 2, формула (П2.6))

$$W = \frac{Y_t}{\sqrt{3}} \frac{Vl^2}{12} \Phi(h; \gamma; \beta). \quad (7)$$

Значения параметров β , h определяем из условия минимума мощности в области $0 < h < \infty$, $\gamma < \beta \leq 1$. То есть, значения β , h фактически являются функциям $\gamma - \beta(\gamma)$, $h(\gamma)$. Поэтому функция $\Phi(h; \gamma; \beta)$ зависит только от γ . Обозначим $\Theta(\gamma) = \Phi[h(\gamma); \gamma; \beta(\gamma)]$. Тогда из (7)

$$W = \frac{Y_t}{\sqrt{3}} \frac{Vl^2}{12} \Theta(\gamma). \quad (8)$$

Анализ вычислений показывает, что при $\gamma > \gamma_*$ ($0.43 < \gamma_* < 0.44$) неподвижная зона в центре ячейки исчезает (β становится равным 1) и течение охватывает всю ячейку (рис.2). Функция $\Theta(\gamma)$ на интервале $0.05 < \gamma < 0.9$ неплохо задается приближенным соотношением $\Theta(\gamma) \approx \Theta_{AP}(\gamma)$, где $\Theta_{AP}(\gamma) = 50\gamma(1.2 - \gamma)$ при $\gamma < \gamma_*$ и $\Theta_{AP}(\gamma) = 18 - 35 \ln(1 - \gamma)$ при $\gamma > \gamma_*$.

1.3. Кинетическая энергия.

Полную кинетическую энергию представим в виде

$$E_p = E_0 + E_1 + E_2 + E_3, \quad (9)$$

где E_0 – кинетическая энергия выделенного участка сетки (рис.2); $E_1 + E_2$ – кинетическая энергия деформируемой среды; E_3 – кинетическая энергия жесткой зоны. Вычисление полной кинетической энергии приведено в Приложении 3 (П3.8)

$$E_p = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} \rho V^2 l^3 \Psi(h, \beta, \gamma), \quad (10)$$

где M – масса выделенного участка сетки

$$M = \frac{\pi}{4} \rho_s l^3 \gamma^2 (2 - \gamma). \quad (11)$$

Так как $\beta = \beta(\gamma)$, $h = h(\gamma)$ – функции γ , то $\Psi(h, \beta, \gamma)$ зависит только от γ . Обозначим

$$\Omega(\gamma) = \Psi[h(\gamma), \beta(\gamma), \gamma]. \quad (12)$$

Отметим, что данная функция на интервале $0.05 < \gamma < 0.9$ (см. Приложение 3) неплохо задается приближенным соотношением $\Omega(\gamma) \approx \Omega_{AP}(\gamma)$, где

$$\Omega_{AP}(\gamma) = 2.2\gamma^2 + 0.9\gamma^3 \text{ при } \gamma < \gamma_*; \quad \Omega_{AP}(\gamma) = -0.33 \frac{\ln(1-\gamma)}{1-\gamma} + 0.33 \frac{\gamma}{1-\gamma} \text{ при } \gamma > \gamma_*.$$

Таким образом, полная кинетическая энергия системы, согласно (П3.11), равна

$$E_p = \frac{1}{2} [M + \rho_l l^3 \Omega] V^2. \quad (13)$$

2. ГЛУБИНА ВНЕДРЕНИЯ СЕТКИ В ПРЕГРАДУ

Представляет интерес исследовать глубину внедрения S_p жесткого сетчатого ударника в преграду в зависимости от параметра сетки γ , равного отношению диаметра проволоки к периоду сетки ($0 \leq \gamma \leq 1$). Предельное значение этого параметра $\gamma = 1$ соответствует случаю, когда сетка трансформируется в сплошную пластинку. В этом случае $S_p = 0$, так как материал преграды несжимаем. Значение параметра $\gamma \ll 1$ соответствует случаю, когда соседние проволоки ячейки сетки не влияют на внедрение друг друга и S_p определяется глубиной внедрения жесткой одиночной струны в деформируемую преграду [8].

Из баланса энергии имеем

$$\frac{dE_p}{dt} + W + K_b = 0, \quad (14)$$

где K_b – поток кинетической энергии частиц, покинувших преграду.

Согласно (ПЗ.14)

$$K_b = \frac{1}{2} \rho_i l^2 H(\gamma) V^3, \quad (15)$$

где $H(\gamma)$ на интервале $0.05 < \gamma < 0.9$ неплохо задается приближенным соотношением $H(\gamma) \approx H_{AP}(\gamma)$, где $H_{AP}(\gamma) = \frac{2}{25} \gamma (2-\gamma)^2 \frac{3.5-2\gamma}{(1-\gamma)^2}$ при $\gamma \leq \gamma_*$;

$H_{AP}(\gamma) = \frac{1}{8} \frac{\gamma^2 (2-\gamma)^2}{(1-\gamma)^4}$ при $\gamma > \gamma_*$. Напомним, что $\gamma_* \approx 0.43$.

Преобразуя (14), с учетом (8), (13), (15) имеем

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} [M + \rho_i l^3 \Omega(\gamma)] V^2 \right\} + \frac{Y_t}{\sqrt{3}} \frac{V l^2}{12} \Theta(\gamma) + \frac{1}{2} \rho_i l^2 H(\gamma) V^3 = 0, \quad (16)$$

$$\frac{dS_p}{dt} = V, \quad (17)$$

с начальным условием ($t = 0$): $S_p = 0$; $V = u_0$, где $u_0 = V_0 \sqrt{\frac{M}{M + \rho_i l^3 \Omega(\gamma)}}$. Видно,

что u_0 меньше скорости удара V_0 . Это происходит вследствие мгновенного перераспределения части начальной кинетической энергии ударника по всей области течения, так как материал преграды несжимаем.

Поскольку время явно не входит в эти соотношения, то будем искать V как функцию S_p : $V = V(S_p)$. Тогда из (16), (17) имеем

$$\frac{d}{dS_p} \left\{ \frac{1}{2} [M + \rho_i l^3 \Omega(\gamma)] V^2 \right\} \frac{dS_p}{dt} + \frac{Y_t}{\sqrt{3}} \frac{V l^2}{12} \Theta(\gamma) + \frac{1}{2} \rho_i l^2 H(\gamma) V^3 = 0,$$

$$\frac{[M + \rho_i l^3 \Omega(\gamma)]}{\frac{Y_t}{\sqrt{3}} \frac{l^2}{12} \Theta(\gamma) + \frac{1}{2} \rho_i l^2 H(\gamma) V^2} V \frac{dV}{dS_p} = -1 \quad (18)$$

с условием

$$V = u_0, \quad \text{где } u_0 = V_0 \sqrt{\frac{M}{M + \rho_t l^2 \Omega(\gamma)}} \quad \text{при } S_p = 0. \quad (19)$$

Интегрируя уравнение (18) с условием (19), получаем

$$V = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \rho_t l^2 H(\gamma)}} \sqrt{\left[\frac{Y_t l^2}{\sqrt{3} 12} \Theta(\gamma) + \frac{1}{2} \rho_t l^2 H(\gamma) u_0^2 \right] \exp \left\{ -\frac{\rho_t l^2 H(\gamma)}{[M + \rho_t l^3 \Omega(\gamma)]} S_p \right\} - \frac{Y_t l^2}{\sqrt{3} 12} \Theta(\gamma)}, \quad (20)$$

Полная глубина проникания в преграду S_f определяется из условия $V = 0$.

Из этого условия имеем

$$S_f = \frac{M + \rho_t l^3 \Omega(\gamma)}{\rho_t l^2 H(\gamma)} \ln \frac{\frac{Y_t l^2}{\sqrt{3} 12} \Theta(\gamma) + \frac{1}{2} \rho_t l^2 H(\gamma) u_0^2}{\frac{Y_t l^2}{\sqrt{3} 12} \Theta(\gamma)}.$$

Так как $u_0 = V_0 \sqrt{\frac{M}{M + \rho_t l^3 \Omega(\gamma)}}$ и $M = \frac{\pi}{4} \rho_s l^3 \gamma^2 (2 - \gamma)$. После преобразований

получим

$$S_f = \frac{\pi}{2} \frac{\delta \gamma^2 (2 - \gamma) + \frac{4}{\pi} \Omega(\gamma)}{H(\gamma)} \ln \left[1 + \alpha \frac{3\sqrt{3}}{\Theta(\gamma)} H(\gamma) \frac{\delta \gamma^2 (2 - \gamma)}{\delta \gamma^2 (2 - \gamma) + \frac{4}{\pi} \Omega(\gamma)} \right], \quad (21)$$

где обозначено $\alpha = \frac{\rho_t V_0^2}{Y_t}$; $\delta = \frac{\rho_s}{\rho_t}$ и $\bar{S}_f = \frac{S_f}{l}$ (здесь и далее черту опускаем).

Выброшенную массу при внедрении обозначим m_b . Имеем с учетом (2)

$$\frac{dm_b}{dt} = \frac{\rho_t}{8} \left[(l - a)^2 - (l - b)^2 \right] (V + V_b),$$

$$\frac{dm_b}{dt} = \frac{\rho_t l^2}{8} \left[1 - (1 - \beta)^2 \right] V.$$

Тогда суммарная масса M_b , выброшенная при движении элемента сетки (рис.2) до его полной остановки, равна

$$M_b = \frac{\rho_t}{8} \left[l^2 - (l - b)^2 \right] l S_f = \frac{1}{8} \rho_t l^3 \left[1 - (1 - \beta)^2 \right] S_f.$$

Так как $\left[1 - (1 - \beta)^2 \right]$ является функцией γ , обозначим $H_0(\gamma) = \left[1 - (1 - \beta)^2 \right]$.

Тогда

$$\frac{M_b}{M} = \frac{1}{2} \frac{1}{\pi \delta \gamma^2 (2 - \gamma)} H_0(\gamma) S_f. \quad (22)$$

Отметим, что данная функция на интервале $0.05 < \gamma < 0.9$ удовлетворительно аппроксимируется приближенным соотношением

$H_0(\gamma) \approx H_{0AP}(\gamma)$ (Приложение 4), где $H_{0AP}(\gamma) = 3\gamma - 1.8\gamma^2$ при $\gamma \leq \gamma_*$ и $H_{0AP}(\gamma) = 1$ при $\gamma > \gamma_*$.

Импульс выброшенной массы обозначим через p_b . Имеем

$$\frac{dp_b}{dt} = \frac{\rho_t}{8} [(l-a)^2 - (l-b)^2] (V + V_b) V_b.$$

С учетом (2)

$$\frac{dp_b}{dt} = \frac{\rho_t l^2}{8} \frac{[1 - (1-\gamma)^2][1 - (1-\beta)^2]}{(1-\gamma)^2 - (1-\beta)^2} V^2.$$

Так как

$$[M + \rho_t l^3 \Omega(\gamma)] \frac{dV}{dt} = -\frac{Y_t}{\sqrt{3}} \frac{l^2}{12} \Theta(\gamma) - \frac{1}{2} \rho_t l^2 H(\gamma) V^2,$$

то

$$\frac{dp_b}{dV} = -[M + \rho_t l^3 \Omega(\gamma)] \frac{\rho_t l^2}{8} \frac{[1 - (1-\gamma)^2][1 - (1-\beta)^2]}{(1-\gamma)^2 - (1-\beta)^2} V^2 \frac{1}{\frac{Y_t}{\sqrt{3}} \frac{l^2}{12} \Theta(\gamma) + \frac{1}{2} \rho_t l^2 H(\gamma) V^2} \quad (23)$$

Так как $\beta(\gamma)$ является функцией γ , обозначим

$$H_1(\gamma) = \frac{1}{4} \frac{[1 - (1-\gamma)^2][1 - (1-\beta)^2]}{(1-\gamma)^2 - (1-\beta)^2}.$$

Тогда (23) принимает вид

$$\frac{dp_b}{dV} = -[M + \rho_t l^3 \Omega(\gamma)] \frac{\rho_t l^2}{2} H_1(\gamma) V^2 \frac{1}{\frac{Y_t}{\sqrt{3}} \frac{l^2}{12} \Theta(\gamma) + \frac{1}{2} \rho_t l^2 H(\gamma) V^2}.$$

Функция $H_1(\gamma)$ на интервале $0.05 < \gamma < 0.9$ удовлетворительно аппроксимируется приближенным соотношением $H_1(\gamma) \approx H_{1AP}(\gamma)$

(см. Приложение 4), где $H_{1AP}(\gamma) = \frac{5.5}{8} \gamma(2-\gamma)(1+1.2\gamma^2)$ при $\gamma \leq \gamma_*$

и $H_{1AP}(\gamma) = \frac{1}{4} \frac{\gamma(2-\gamma)}{(1-\gamma)^2}$ при $\gamma > \gamma_*$. Суммарный импульс выброшенной массы P_b

равен

$$P_b = [M + \rho_t l^3 \Omega(\gamma)] \frac{H_1}{H} u_0 - [M + \rho_t l^3 \Omega] \frac{H_1}{H^2} \sqrt{\frac{Y_t}{\rho_t \sqrt{3}} \frac{1}{6} \Theta} H \arctg \frac{u_0}{\sqrt{\frac{1}{6\sqrt{3}} \frac{Y_t}{\rho_t} \frac{\Theta}{H}}}.$$

Поскольку $u_0 = V_0 \sqrt{\frac{M}{M + \rho_t l^3 \Omega(\gamma)}}$, $M = \frac{\pi}{4} \rho_s l^3 \gamma^2 (2-\gamma)$, с учетом ранее

принятых обозначений $\alpha = \frac{\rho_t V_0^2}{Y_t}$; $\delta = \frac{\rho_s}{\rho_t}$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{P_b}{MV_0} = & \left[1 + \frac{1}{\delta} \frac{4}{\pi\gamma^2(2-\gamma)} \Omega(\gamma) \right] \frac{H_1}{H} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{1}{\delta} \frac{4}{\pi\gamma^2(2-\gamma)} \Omega(\gamma)}} - \\ & - \left[1 + \frac{1}{\delta} \frac{4}{\pi\gamma^2(2-\gamma)} \Omega \right] \frac{H_1}{H^2} \sqrt{\frac{1}{\alpha\sqrt{3}} \frac{1}{6} \Theta} H \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\alpha}{1 + \frac{1}{\delta} \frac{4}{\pi\gamma^2(2-\gamma)} \Omega(\gamma)} \frac{6\sqrt{3}H}{\Theta}}. \end{aligned} \quad (24)$$

Энергию выброшенной массы обозначим через E_b . Тогда из (П3.14) имеем

$$\frac{dE_b}{dt} = \frac{1}{2} \rho_t l^2 H(\gamma) V^3$$

или

$$\frac{dE_b}{dV} = - \left[M + \rho_t l^3 \Omega(\gamma) \right] \frac{1}{2} \rho_t l^2 H(\gamma) V^3 \frac{1}{\frac{Y_t}{\sqrt{3}} \frac{l^2}{12} \Theta(\gamma) + \frac{1}{2} \rho_t l^2 H(\gamma) V^2}. \quad (25)$$

Из (25) получаем

$$E_b = \frac{1}{2} \left[M + \rho_t l^3 \Omega(\gamma) \right] \int_0^{u_0} \frac{\frac{1}{2} \rho_t l^2 H(\gamma) V^2}{\frac{Y_t}{\sqrt{3}} \frac{l^2}{12} \Theta(\gamma) + \frac{1}{2} \rho_t l^2 H(\gamma) V^2} dV^2.$$

Поскольку $M = \frac{\pi}{4} \rho_s l^3 \gamma^2 (2-\gamma)$, после преобразований получим

$$\frac{E_b}{\frac{1}{2} MV_0^2} = 1 - \left[1 + \frac{4}{\pi\delta\gamma^2(2-\gamma)} \Omega \right] \frac{1}{\alpha\sqrt{3}} \frac{1}{6} \frac{\Theta}{H} \ln \left[1 + 6\sqrt{3}\alpha \frac{H}{\Theta} \frac{1}{1 + \frac{4}{\pi\delta\gamma^2(2-\gamma)} \Omega} \right]. \quad (26)$$

Ниже, в Таблицах 1 и 2, приведены расчеты некоторых вариантов соударения стальной сетки с алюминиевой преградой для параметров материала сетки $\rho_s = 7800 \text{ кг/м}^3$ и преграды $\rho_t = 2700 \text{ кг/м}^3$, $Y_t = 0.38 \text{ ГПа}$.

В Таблице 1 в зависимости от параметра $0 \leq \gamma \leq 1$, который характеризует геометрию сетки, приведены: полная глубина внедрения сетки, нормированная на половину периода сетки (S_f/l) и диаметр проволоки ($S_f/2a$); суммарная масса материала преграды, выброшенного при внедрении сетки, нормированная на массу сетки (M_b/M); суммарный импульс выброшенной массы, нормированный на начальный импульс сетки (P_b/MV_0); суммарная энергия выброшенной массы, нормированная на начальную кинетическую энергию сетки ($E_b/0.5MV_0^2$). В Таблице 2 приведены зависимости тех же величин от начальной скорости удара V_0 при фиксированном значении параметра γ .

Таблица 1.

$\gamma = a/l$	V_0 , км/с	S_f/l	$S_f/2a$	M_b/M	P_b/MV_0	B	$E_b/0.5MV_0^2$
0.1	3.0	3.31	16.55	5.43	0.67	1.67	0.63
0.2	3.0	3.80	9.49	2.90	0.66	1.66	0.64
0.3	3.0	3.67	6.12	1.72	0.64	1.64	0.66
0.4	3.0	3.36	4.20	1.06	0.61	1.61	0.69
0.5	3.0	2.92	2.92	0.64	0.54	1.54	0.75
0.6	3.0	1.97	1.64	0.30	0.39	1.39	0.86
0.7	3.0	1.12	0.80	0.13	0.25	1.25	0.93
0.8	3.0	0.47	0.29	0.04	0.13	1.13	0.97
0.9	3.0	0.095	0.053	0.0065	0.048	1.048	0.99

Таблица 2.

$\gamma = a/l$	V_0 , км/с	S_f/l	$S_f/2a$	M_b/M	P_b/MV_0	B	$E_f/0.5MV_0^2$
0.3	1.0	0.72	1.20	0.34	0.19	1.19	0.22
0.3	2.0	2.19	3.66	1.03	0.46	1.46	0.50
0.3	3.0	3.67	6.12	1.72	0.64	1.64	0.66
0.3	4.0	4.96	8.27	2.32	0.76	1.76	0.76
0.3	5.0	6.06	10.11	2.84	0.84	1.84	0.82

Из Таблицы 1 видно, что при значениях γ близких к 1 глубина внедрения мала, а при $\gamma = 1$ должна обратиться в 0, ввиду предположения о несжимаемости материала преграды. При малых γ проволоки ячейки сетки внедряются независимо, поэтому $S_f/2a \gg 1$, аналогично внедрению одной струны [8]. При этом масса выброшенного материала преграды значительно превышает массу сетки. При росте γ значение M_b/M падает и практически исчезает при γ близким к единице.

Эффективность передачи импульса в литературе (см., например, [9]) часто характеризуют безразмерной величиной, которую называют «коэффициентом усиления импульса», обозначающую отношение изменения импульса преграды после удара и импульса ударника. В нашем случае коэффициент усиления импульса имеет вид

$$B = 1 + \frac{P_b}{MV_0}. \quad (27)$$

Его значения приведены в Таблицах 1 и 2. Видно, что при фиксированной скорости удара, эффект усиления импульса максимален для сетки с малым значением параметра γ и может достигать 5/3 от импульса удара. При фиксированном значении параметра γ коэффициент усиления импульса B растет при увеличении скорости удара.

ВЫВОДЫ

Предложена аналитическая модель высокоскоростного взаимодействия жесткого сетчатого ударника (сетки) с полубесконечной деформируемой

преградой, которая моделируется жестко идеально-пластичным телом. До встречи с преградой полотно сетки параллельно поверхности полупространства преграды, а вектор скорости сетки перпендикулярен к ней. Элементарный анализ размерности показывает, что зависимость решения от геометрических параметров сетки может быть учтена только одним безразмерным параметром γ равным отношению диаметра проволоки к периоду сетки ($0 \leq \gamma \leq 1$). После встречи сетки с преградой, картина течения преграды имеет ячеистую структуру, отображающую геометрию сетки. Ввиду периодической структуры сетки и симметрии ячейки сетки достаточно рассмотреть течение, сопровождающее внедрение только для $1/8$ ячейки так, как это показано на рис.2.

Малые значения параметра $\gamma \ll 1$ соответствуют случаю, когда соседние проволоки ячейки сетки не влияют на внедрение друг друга. В этом случае, например, для нахождения глубины внедрения сетки достаточно рассмотреть внедрение одной струны. Решение задачи о внедрении одной жесткой струны в деформируемое полупространство дано нами в [8]. Случай, когда апертура сетки (видимое на просвет расстояние между проволоками) сравнима или меньше диаметра проволоки, из которой сплетена сетка, рассмотрен нами в работе [6]. Этот случай соответствует $\gamma_* < \gamma < 1$, где величина $\gamma_* \approx 0.43$ определяется в рамках модели, предложенной в настоящей работе.

Модель, предложенная в настоящей работе, обобщает два перечисленных выше случая и охватывает весь интервал значений параметра $\gamma: 0 \leq \gamma \leq 1$. Принятая здесь модель деформации ячейки преграды отличается от модели [6] наличием неподвижной зоны в центре ячейки. Т.о. в задаче появляется новый параметр длины b (или $\beta = b/l$), характеризующий эту зону. Кроме того, в отличие от [6], мы предполагаем, что жесткий материал преграды, поднявшийся в процессе движения выше уровня границы контакта сетки с преградой, покидает преграду и в дальнейшем движении не рассматривается.

Показано, что интегральные характеристики решения (например, безразмерная глубина внедрения сетки в преграду) зависят только от следующего набора безразмерных параметров задачи $\alpha = \frac{\rho_t V_0^2}{Y_t}$; $\delta = \frac{\rho_s}{\rho_t}$; γ . В работе получены аналитические формулы для: 1) глубины внедрения сетки в полубесконечную преграду, S_f ; 2) суммарной массы, выброшенной при внедрении сетки, M_b ; 3) суммарного импульса выброшенной массы, P_b ; 4) суммарной энергии выброшенной массы, E_b . Даны количественные оценки значений этих величин при внедрении стальной сетки в алюминиевую преграду в зависимости от $0 < \gamma < 1$.

Коэффициент усиления импульса B максимален для сетки с малым значением параметра γ , когда диаметр проволоки значительно меньше периода сетки, и для скорости удара ~ 3 км/с может достигать $5/3$ в случае удара стальной сетки по алюминиевой преграде. При фиксированном значении параметра γ коэффициент усиления импульса B растет при увеличении скорости удара.

В литературе отсутствуют количественные данные экспериментов по взаимодействию сеток с преградами в рассматриваемой постановке. Известные эксперименты (см., например, [10,11]) по взаимодействию ударников из различных материалов с сеточными экранами дают только качественную

картину и, вообще говоря, не могут быть использованы для количественной оценки глубины внедрения сетки в ударник из-за конечных размеров тестируемых ударников.

Приложение 1.

Скорости и деформации в деформируемой зоне.

Из постановки задачи следует, что нормальные составляющие скоростей на поверхностях $X = 0$, $Y = 0$, $X + Y = l$ равны нулю. Считаем, что скорость u_z является линейной функцией координаты z и не зависит от других координат. Следовательно, u_z равна

$$u_z = -\frac{V}{h}(z+h). \quad (\text{П1.1})$$

Функцию u_y полагаем линейной функцией y . Поскольку $u_y = 0$ при $x = 0$, то

$$u_y = -g(x)y, \quad g(0) = 0. \quad (\text{П1.2})$$

Из условия несжимаемости $\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$ и так как $u_x = 0$ при $x = 0$, то

$$u_x = \int_0^x g(s)ds + \frac{V}{h}x. \quad (\text{П1.3})$$

Так как нормальная составляющая скорости равна нулю при $X + Y = l$, то $u_x + u_y = 0$ при $X + Y = l$ и из (П1.2), (П1.3) имеем уравнение для $g(x)$ при $0 < x < l$

$$-g(x)(l-x) + \int_0^x g(s)ds + \frac{V}{h}x = 0.$$

Решение этого уравнения с условием $g(0) = 0$, как легко видеть, имеет вид

$$g = \frac{V}{2h} \left[\frac{l^2}{(l-x)^2} - 1 \right]. \quad (\text{П1.4})$$

Тогда подставляя (П1.4) в (П1.3) и (П1.2) имеем u_x и u_y

$$u_x = \frac{V}{2h} \left[\frac{l^2}{(l-x)} - l \right] + \frac{V}{2h}x, \quad (\text{П1.5})$$

$$u_y = -\frac{V}{2h} \left[\frac{l^2}{(l-x)^2} - 1 \right] y. \quad (\text{П1.6})$$

Скорость u_z определяется формулой (П1.1).

Из условия непрерывности нормальной составляющей скорости на этой поверхности найдем уравнение поверхности $z = f(x)$. Вектор нормали к поверхности имеет вид

$$\vec{N} = \{N_x, N_y, N_z\} = \left\{ -\frac{df}{dx}, 0, 1 \right\}. \quad (\text{П1.7})$$

Из условия непрерывности нормальной скорости имеем

$$u_x N_x + u_y N_y + u_z N_z = V_b N_z.$$

Используя, (П1.1), (П1.5)-(П1.7), после преобразований, получаем дифференциальное уравнение для $f(x)$

$$\frac{df}{dx} + \frac{2(l-x)}{l^2 - (l-x)^2} f = -\frac{2(l-x)}{l^2 - (l-x)^2} h \frac{l^2 - (l-b)^2}{(l-a)^2 - (l-b)^2}. \quad (\text{П1.8})$$

Полагая $f(a) = 0$, находим решение для $f(x)$

$$f = h \frac{l^2 - (l-b)^2}{(l-a)^2 - (l-b)^2} \left[\frac{l^2 - (l-a)^2}{l^2 - (l-x)^2} - 1 \right]. \quad (\text{П1.9})$$

Заметим, что $f(b) = -h$.

Используя, (П1.1), (П1.5), (П1.6) определим соответствующие скорости деформаций

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{V}{2h} \frac{l^2}{(l-x)^2} + \frac{V}{2h}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{V}{2h} \frac{l^2}{(l-x)^2} + \frac{V}{2h}; \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{V}{h}; \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = -\frac{V}{2h} \frac{l^2}{(l-x)^3} y; \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = 0; \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned} \quad (\text{П1.10})$$

Приложение 2.

Мощность внутренних сил.

Мощность внутренних сил в единице объема w в деформируемой зоне равна $w = Y_t \sqrt{\frac{2}{3} \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + 2\varepsilon_{xy}^2 + 2\varepsilon_{xz}^2 + 2\varepsilon_{yz}^2}}$, мощность внутренних сил w на разрывах скоростей на единицу площади поверхности разрыва равна $w = \frac{Y_t}{\sqrt{3}} [v]$, где $[v]$ – модуль разности скорости на поверхности.

Пусть W_1 – полная мощность внутренних сил в деформируемой зоне. Согласно (П1.10), получаем

$$W_1 = Y_t \sqrt{\frac{2}{3}} \int_0^a \left[\int_0^{l-x} \left(\int_{-h}^0 \sqrt{\Psi_1} dz \right) dy \right] dx + Y_t \sqrt{\frac{2}{3}} \int_a^b \left[\int_0^{l-x} \left(\int_{-h}^{f(x)} \sqrt{\Psi_1} dz \right) dy \right] dx, \quad (\text{П2.1})$$

$$\text{где } \Psi_1 = \frac{V^2}{2h^2} \left[\frac{l^4}{(l-x)^4} + 3 + \frac{l^4}{(l-x)^6} y^2 \right].$$

Далее определим мощности на разрыве касательных скоростей.

W_2 – полная мощность внутренних сил при разрыве скорости на поверхности $z = -h$. На этой поверхности $[v] = \frac{V}{2h} \left[\frac{l^2 - (l-x)^2}{(l-x)^2} \right] \sqrt{(l-x)^2 + y^2}$.

Тогда

$$W_2 = \frac{Y_t}{\sqrt{3}} \int_0^b \left(\int_0^{l-x} [v] dy \right) dx = \frac{Y_t}{\sqrt{3}} \frac{V}{2h} \int_0^b \left(\int_0^{l-x} \left[\frac{l^2 - (l-x)^2}{(l-x)^2} \right] \sqrt{(l-x)^2 + y^2} dy \right) dx. \quad (\text{П2.2})$$

W_3 – полная мощность внутренних сил при разрыве скорости на поверхности $z = f(x)$. На данной поверхности

$$[v] = \frac{V}{2h} \sqrt{\left[\frac{l^2 - (l-x)^2}{(l-x)^2} \right]^2 + \left[\frac{l^2 - (l-x)^2}{(l-x)^2} \right]^2 y^2 + 4h^2 \frac{b^2 (2l-b)^2}{(b-a)^2 (2l-a-b)^2} \frac{a^2 (2l-a)^2}{x^2 (2l-x)^2}}.$$

Тогда

$$W_3 = \frac{Y_t}{\sqrt{3}} \int_a^b \left(\int_0^{l-x} [v] dy \right) \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx} \right)^2} dx. \quad (\text{П2.3})$$

W_4 – полная мощность внутренних сил при разрыве скорости на поверхности $z = 0$. При $z = 0$ разрыв скорости

$$[v] = \frac{V}{2h} \left[\frac{l^2 - (l-x)^2}{(l-x)^2} \right] \sqrt{(l-x)^2 + y^2}. \text{ Получаем}$$

$$W_4 = \frac{Y_t}{\sqrt{3}} \int_0^a \left(\int_0^{l-x} [v] dy \right) dx = \frac{Y_t}{\sqrt{3}} \frac{V}{2h} \int_0^a \left(\int_0^{l-x} \left[\frac{l^2 - (l-x)^2}{(l-x)^2} \right] \sqrt{(l-x)^2 + y^2} dy \right) dx. \quad (\text{П2.4})$$

W_5 – полная мощность внутренних сил при разрыве скорости на поверхности $x = b$. При $x = b$ разрыв скорости $[v] = V \frac{l^2 - (l-a)^2}{(l-a)^2 - (l-b)^2}$.

Следовательно,

$$W_5 = \frac{Y_t}{\sqrt{3}} \int_{-h}^0 \left(\int_0^{l-b} [v] dy \right) dz = \frac{Y_t}{\sqrt{3}} \int_{-h}^0 \left(\int_0^{l-b} V \frac{l^2 - (l-a)^2}{(l-a)^2 - (l-b)^2} dy \right) dz. \quad (\text{П2.5})$$

Введем безразмерные величины $\gamma = a/l$; $\beta = b/l$; $\bar{h} = h/l$ (в дальнейшем черту над h опускаем).

Полная мощность внутренних сил W равна

$$W = \sum_{i=1}^5 W_i.$$

Проводя соответствующие вычисления в (П2.1)-(П2.5), получаем

$$W = \frac{Y_t}{\sqrt{3}} \frac{Vl^2}{12} \Phi(h; \gamma; \beta), \quad (\text{П2.6})$$

где

$$\Phi(h; \gamma; \beta) = 6 \int_0^{\bar{h}} \left[\frac{1}{(1-x)} \left\{ \sqrt{2+3(1-x)^4} + [1+3(1-x)^4] \ln \frac{1+\sqrt{2+3(1-x)^4}}{\sqrt{1+3(1-x)^4}} \right\} \right] dx +$$

$$\begin{aligned}
& +6 \frac{\gamma(2-\gamma)}{(\beta-\gamma)(2-\beta-\gamma)} \times \\
& \times \int_{\gamma}^{\beta} \left[\frac{1}{(1-x)} \frac{(\beta-x)(2-\beta-x)}{x(2-x)} \left\{ \sqrt{2+3(1-x)^4} + [1+3(1-x)^4] \ln \frac{1+\sqrt{2+3(1-x)^4}}{\sqrt{1+3(1-x)^4}} \right\} \right] dx + \\
& + \frac{1}{h} [\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})] [\beta^2(3-\beta) + \gamma^2(3-\gamma)] + 12h \frac{\gamma(2-\gamma)(1-\beta)}{(\beta-\gamma)(2-\beta-\gamma)} + \\
& + \frac{3}{h} \int_{\gamma}^{\beta} x(2-x) \times \left\{ \sqrt{2+h^2R} + [1+h^2R] \ln \frac{1+\sqrt{2+h^2R}}{\sqrt{1+h^2R}} \right\} \sqrt{1+h^2R} dx,
\end{aligned} \tag{П2.7}$$

$$R(x; \beta; \gamma) = 4 \frac{\beta^2(2-\beta)^2 \gamma^2(2-\gamma)^2}{(\beta-\gamma)^2(2-\beta-\gamma)^2} \frac{(1-x)^2}{x^4(2-x)^4}. \tag{П2.8}$$

Значения β, h определяем из условия минимума мощности в области $0 < h < \infty, \gamma < \beta \leq 1$.

Наименьшее значение, может лежать либо она определяется системой уравнений

$$\frac{\partial \Phi}{\partial h} = 0. \tag{П2.9}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \beta} = 0. \tag{П2.10}$$

Согласно (П2.7)-(П2.9), имеем

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{h^2} [\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})] [\beta^2(3-\beta) + \gamma^2(3-\gamma)] + 12 \frac{\gamma(2-\gamma)(1-\beta)}{(\beta-\gamma)(2-\beta-\gamma)} + \\
& + \frac{3}{h^2} \int_{\gamma}^{\beta} x(2-x) \left\{ (2Rh^2 - 1) \sqrt{1+h^2R} \ln \frac{1+\sqrt{2+h^2R}}{\sqrt{1+h^2R}} - \frac{\sqrt{2+h^2R}}{\sqrt{1+h^2R}} \right\} dx = 0.
\end{aligned} \tag{П2.11}$$

Согласно (П2.7), (П2.8), (П2.10)

$$\begin{aligned}
& \frac{12\gamma(2-\gamma)(1-\beta)}{(\beta-\gamma)^2(2-\beta-\gamma)^2} \int_{\gamma}^{\beta} \frac{(x-\gamma)(2-x-\gamma)}{x(1-x)(2-x)} \left[\left\{ \sqrt{2+3(1-x)^4} + \right. \right. \\
& \left. \left. + [1+3(1-x)^4] \ln \frac{1+\sqrt{2+3(1-x)^4}}{\sqrt{1+3(1-x)^4}} \right\} \right] dx + \frac{3}{h} [\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})] \beta(2-\beta) - \\
& - 12h \frac{\gamma(2-\gamma)[(1-\beta)^2 + (1-\gamma)^2]}{(\beta-\gamma)^2(2-\beta-\gamma)^2} + \frac{3}{h} \beta(2-\beta) \left\{ \sqrt{2+h^2G(\beta; \gamma)} + \right. \\
& \left. + [1+h^2G(\beta; \gamma)] \ln \frac{1+\sqrt{2+h^2G(\beta; \gamma)}}{\sqrt{1+h^2G(\beta; \gamma)}} \right\} \sqrt{1+h^2G(\beta; \gamma)} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -24 \frac{\beta(1-\beta)(2-\beta)\gamma^3(2-\gamma)^3}{(\beta-\gamma)^3(2-\beta-\gamma)^3} h \int_{\gamma}^{\beta} \frac{(1-x)^2}{x^3(2-x)^3} \times \\
 & \times \left\{ \frac{\sqrt{2+h^2R}}{\sqrt{1+h^2R}} + 3\sqrt{1+h^2R} \ln \frac{1+\sqrt{2+h^2R}}{\sqrt{1+h^2R}} \right\} dx = 0,
 \end{aligned}
 \tag{П2.12}$$

где $G(\beta; \gamma) = 4 \frac{\gamma^2(2-\gamma)^2}{(\beta-\gamma)^2(2-\beta-\gamma)^2} \frac{(1-\beta)^2}{\beta^2(2-\beta)^2}$.

Система уравнений определяет (П2.11), (П2.12) возможную точку минимума функции $\Phi(h; \gamma; \beta)$.

Второй возможный вариант, минимум лежит на границе $\beta=1$. В этом случае условие минимума определяется методом, рассмотренным ранее, то есть минимум по h функции $\Phi_1(h; \gamma) = \Phi(h; \gamma; 1)$.

$$\begin{aligned}
 \Phi_1(h; \gamma) = & 6 \int_0^{\gamma} \left[\frac{1}{(1-x)} \left\{ \sqrt{2+3(1-x)^4} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + [1+3(1-x)^4] \ln \frac{1+\sqrt{2+3(1-x)^4}}{\sqrt{1+3(1-x)^4}} \right\} \right] dx + \\
 & + 6 \frac{\gamma(2-\gamma)}{(1-\gamma)^2} \int_{\gamma}^1 \left[\frac{(1-x)}{x(2-x)} \left\{ \sqrt{2+3(1-x)^4} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + [1+3(1-x)^4] \ln \frac{1+\sqrt{2+3(1-x)^4}}{\sqrt{1+3(1-x)^4}} \right\} \right] dx + \\
 & + \frac{2}{h} [\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})] + \frac{1}{h} [\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})] \gamma^2(3-\gamma) + \\
 & + \frac{3}{h} \int_{\gamma}^1 x(2-x) \times \left\{ \sqrt{2+h^2R_1} \sqrt{1+h^2R_1} + [1+h^2R_1]^{\frac{3}{2}} \ln \frac{1+\sqrt{2+h^2R_1}}{\sqrt{1+h^2R_1}} \right\} dx,
 \end{aligned}
 \tag{П2.13}$$

где $R_1(x; \gamma) = 4 \frac{(1-x)^2}{x^4(2-x)^4} \frac{\gamma^2(2-\gamma)^2}{(1-\gamma)^4}$.

В этом случае уравнение для определения h имеет вид $\frac{\partial \Phi_1}{\partial h} = 0$ или в явном виде

$$-\frac{1}{h^2} [\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})] (2+3\gamma^2-\gamma^3) - \frac{3}{h^2} \int_{\gamma}^1 \frac{\sqrt{\frac{2}{h^2} + R_1}}{\sqrt{\frac{1}{h^2} + R_1}} x(2-x) dx +$$

$$+ 3h \int_{\gamma}^1 \sqrt{\frac{1}{h^2} + R_1} \left[2R_1 - \frac{1}{h^2} \right] \ln \frac{\frac{1}{h} + \sqrt{\frac{2}{h^2} + R_1}}{\sqrt{\frac{1}{h^2} + R_1}} x(2-x) dx = 0. \quad (\text{П2.14})$$

Можно показать, что уравнение (П2.14) имеет единственное решение для $0 < h < \infty$ при $0 < \gamma < 1$. Так как $\lim_{\beta \rightarrow \gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} = -\infty$, то исследовать границу $\beta = \gamma$ нет необходимости.

Система уравнений (П2.11), (П2.12), (П2.14) определяет β , h как функции γ . Ниже, в Таблице П.1, приведены результаты вычислений $\beta(\gamma)$, $h(\gamma)$.

Таблица П.1.

γ	β	h	β/γ	h/γ
0.1	0.162	0.091	1.621	0.909
0.2	0.332	0.194	1.662	0.970
0.3	0.514	0.315	1.714	1.052
0.4	0.718	0.474	1.794	1.185
0.5	1.	0.778	2.000	1.557
0.6	1.	0.689	1.667	1.149
0.7	1.	0.593	1.429	0.847
0.8	1.	0.481	1.250	0.602
0.9	1.	0.339	1.111	0.377

Из Таблицы П.1 видно, что при $\gamma > \gamma_*$ неподвижная зона в центре ячейки исчезает (параметр β становится равным 1) и течение охватывает всю ячейку (рис.2). Вычисления показывают, что $0.43 < \gamma_* < 0.44$. При $\gamma < \gamma_*$ отношение β/γ меняется в интервале от 1.6 до 1.85 и примерно равно 1.7. Отношение h/γ меняется в интервале от 0.8 до 1.3 и имеет порядок единицы. Поскольку $\beta = \beta(\gamma)$, $h = h(\gamma)$, то функция $\Phi(h; \gamma; \beta)$ фактически является функцией γ . Обозначим $\Theta(\gamma) = \Phi[h(\gamma); \gamma; \beta(\gamma)]$. Тогда

$$W = \frac{Y_l}{\sqrt{3}} \frac{Vl^2}{12} \Theta(\gamma). \quad (\text{П2.15})$$

В Таблице 2 приведены вычисления значений функции $\Theta(\gamma) = \Phi[h(\gamma); \gamma; \beta(\gamma)]$. Отметим, что данная функция на интервале $0.05 < \gamma < 0.9$ неплохо задается приближенным соотношением $\Theta(\gamma) \approx \Theta_{AP}(\gamma)$, где $\Theta_{AP}(\gamma) = 50\gamma(1.2 - \gamma)$ при $\gamma \leq \gamma_*$; $\Theta_{AP}(\gamma) = 18 - 35 \ln(1 - \gamma)$ при $\gamma > \gamma_*$. В Таблице П.2 также приведены результаты вычислений и сравнение значения $\Theta(\gamma)$

$$\text{с } \Theta_{AP}(\gamma) - \Delta = \frac{|\Theta_{AP}(\gamma) - \Theta(\gamma)|}{\Theta(\gamma)} \times 100.$$

Таблица П.2.

γ	$\Theta(\gamma)$	$\Theta_{AP}(\gamma)$	Δ
0.1	10.630	10.500	1.226
0.2	20.162	20.000	0.802
0.3	28.663	28.500	0.569
0.4	36.222	36.000	0.614
0.5	42.291	42.260	0.074
0.6	48.835	50.070	2.530
0.7	57.440	60.139	4.699
0.8	70.378	74.330	5.616
0.9	96.011	98.591	2.687

Приложение 3.

Кинетическая энергия.

Полную кинетическую энергию представим в виде

$$E_p = E_0 + E_1 + E_2 + E_3, \quad (\text{П3.1})$$

где E_0 – кинетическая энергия выделенного участка сетки (рис.2); $E_1 + E_2$ – кинетическая энергия деформируемой среды; E_3 – кинетическая энергия жесткой зоны.

Кинетическая энергия выделенного участка сетки равна

$$E_0 = \frac{1}{2} MV^2. \quad (\text{П3.2})$$

M – масса выделенного участка. Заметим, что

$$M = \frac{\pi}{4} \rho_s l^3 \gamma^2 (2 - \gamma). \quad (\text{П3.3})$$

$E_1 + E_2$ – кинетическая энергия деформируемой среды, которая вычисляется по формулам

$$E_1 = \int_0^a \left[\int_0^{l-x} \left(\int_{-h}^0 e dz \right) dy \right] dx, \quad (\text{П3.4})$$

$$E_2 = \int_a^b \left[\int_0^{l-x} \left(\int_{-h}^{f(x)} e dz \right) dy \right] dx. \quad (\text{П3.5})$$

e – кинетическая энергия единицы объема; E_3 – кинетическая энергия жесткой зоны

$$E_3 = \frac{1}{2} \rho V_b^2 \int_a^b \left[\int_0^{l-x} \left(\int_{f(x)}^0 dz \right) dy \right] dx. \quad (\text{П3.6})$$

Согласно (3)-(5)

$$e = \frac{1}{8} \rho \frac{V^2}{h^2} \left[\frac{l^4}{(l-x)^2} - l^2 - 2xl + x^2 + \right]$$

$$+y^2 \frac{l^4}{(l-x)^4} - 2y^2 \frac{l^2}{(l-x)^2} + y^2 + 4(z+h)^2 \Big]. \quad (\text{ПЗ.7})$$

Используя (ПЗ.4)-(ПЗ.7), (2), проводя соответствующие вычисления, получаем

$$E_p = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\rho V^2 l^3 \Psi(h, \beta, \gamma), \quad (\text{ПЗ.8})$$

где

$$\begin{aligned} \Psi(h, \beta, \gamma) = & \frac{1}{12} \frac{1}{h} \left[4 \ln \frac{1}{1-\gamma} - 4\gamma - 2\gamma^2 + 4\gamma^3 - \gamma^4 + 4h^2\gamma - 2h^2\gamma^2 \right] - \\ & - \frac{1}{3} \frac{1}{h} \frac{1-(1-\gamma)^2}{(1-\gamma)^2 - (1-\beta)^2} (1-\beta)^2 \ln \frac{1-\gamma}{1-\beta} + \\ & + \frac{1}{12} \frac{1}{h} \left[1-(1-\gamma)^2 \right] \left[2-(1-\gamma)^2 + (1-\beta)^2 \right] + \\ & + \frac{1}{12} h \frac{1-(1-\gamma)^2}{(1-\gamma)^2 - (1-\beta)^2} \left[3-2(1-\gamma)^2 - (1-\beta)^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.9})$$

Так как $\beta = \beta(\gamma)$, $h = h(\gamma)$ – функции γ , то $\Psi(h, \beta, \gamma)$ фактически является функцией γ .

Обозначим

$$\Omega(\gamma) = \Psi[h(\gamma), \beta(\gamma), \gamma]. \quad (\text{ПЗ.10})$$

В Таблице 3 приведены вычисления значений функции $\Omega(\gamma) = \Psi[h(\gamma), \beta(\gamma), \gamma]$.

Отметим, что данная функция на интервале $0.05 < \gamma < 0.9$ неплохо задается приближенным соотношением $\Omega(\gamma) \approx \Omega_{AP}(\gamma)$, где $\Omega_{AP}(\gamma) = 2.2\gamma^2 + 0.9\gamma^3$ при $\gamma \leq \gamma_*$; $\Omega_{AP}(\gamma) = -0.33 \frac{\ln(1-\gamma)}{1-\gamma} + 0.33 \frac{\gamma}{1-\gamma}$ при $\gamma > \gamma_*$, где $\gamma_* \approx 0.43$. В Таблице 3 приведены результаты вычислений и сравнение значения $\Omega(\gamma)$ с $\Omega_{AP}(\gamma)$ –

$$\Delta = \frac{|\Omega_{AP}(\gamma) - \Omega(\gamma)|}{\Omega(\gamma)} \times 100.$$

Таблица 3.

γ	$\Omega(\gamma)$	$\Omega_{AP}(\gamma)$	Δ
0.1	0.0223	0.0229	2.546
0.2	0.0908	0.0952	4.840
0.3	0.212	0.222	4.843
0.4	0.408	0.410	0.344
0.5	0.800	0.787	1.607
0.6	1.246	1.251	0.376
0.7	2.047	2.094	2.306
0.8	3.836	3.976	3.633
0.9	10.416	10.569	1.465

Таким образом, полная кинетическая энергия системы, согласно (П3.8), равна

$$E_p = \frac{1}{2} [M + \rho_t l^3 \Omega] V^2, \quad (\text{П3.11})$$

где

$$M = \frac{\pi}{4} \rho_s l^3 \gamma^2 (2 - \gamma) \quad (\text{П3.12})$$

– масса выделенного участка сетки (рис.2).

Поскольку мы предполагаем, что материал преграды, поднявшийся выше нижней границы сетки, покидает преграду и в дальнейшем движении системы не участвует, нам требуется оценить поток уносимой энергии. Обозначим K_b поток кинетической энергии частиц, покинувших преграду.

В силу условия несжимаемости, поток массы частиц, покинувших преграду, равен

$$\frac{dm_b}{dt} = \frac{\rho_t}{8} [(l-a)^2 - (l-b)^2] (V + V_b). \quad (\text{П3.13})$$

Так как скорость частиц, покидающих преграду, равна V_b , то

$$K_b = \frac{1}{2} \frac{dm_b}{dt} V_b^2 = \frac{1}{16} \rho_t [(l-a)^2 - (l-b)^2] (V + V_b) V_b^2.$$

Используя (2), получаем

$$K_b = \frac{1}{16} \rho_t \frac{[l^2 + (l-b)^2][l^2 - (l-a)^2]^2}{[(l-a)^2 - (l-b)^2]^2} V^3.$$

Представим данное выражение в виде

$$K_b = \frac{1}{2} \rho_t l^2 \frac{[1 + (1-\beta)^2][1 - (1-\gamma)^2]^2}{[(1-\gamma)^2 - (1-\beta)^2]^2} V^3.$$

Так как $\beta = \beta(\gamma)$, имеем

$$K_b = \frac{1}{2} \rho_t l^2 H(\gamma) V^3, \quad (\text{П3.14})$$

$$\text{где } H(\gamma) = \frac{1}{8} \frac{[1 - (1-\beta)^2][1 - (1-\gamma)^2]^2}{[(1-\gamma)^2 - (1-\beta)^2]^2}.$$

Отметим, что данная функция на интервале $0.05 < \gamma < 0.9$ неплохо задается приближенным соотношением $H(\gamma) \approx H_{AP}(\gamma)$, где $H_{AP}(\gamma) = \frac{2}{25} \gamma (2-\gamma)^2 \frac{3.5-2\gamma}{(1-\gamma)^2}$

при $\gamma \leq \gamma_*$; $H_{AP}(\gamma) = \frac{1}{8} \frac{\gamma^2 (2-\gamma)^2}{(1-\gamma)^4}$ при $\gamma > \gamma_*$. Ниже, в Таблице 4, приведены

результаты вычислений и сравнение значения $H(\gamma)$ с $H_{AP}(\gamma)$ –

$$\Delta = \frac{|H_{AP}(\gamma) - H(\gamma)|}{H(\gamma)} \times 100.$$

Таблица 4.

γ	$H(\gamma)$	$H_{AP}(\gamma)$	Δ
0.1	0.116	0.118	1.841
0.2	0.238	0.251	5.607
0.3	0.385	0.410	6.707
0.4	0.600	0.614	2.391
0.5	1.125	1.125	0.0
0.6	3.445	3.445	0.0
0.7	12.779	12.779	0.0
0.8	72.000	72.000	0.0
0.9	1225.13	1225.13	0.0

Приложение 4.

Некоторые аппроксимации.

Функция $H_0(\gamma) = [1 - (1 - \beta)^2]$, где $\beta = \beta(\gamma)$; $H_0(\gamma) \approx H_{0AP}(\gamma)$, где $H_{0AP}(\gamma) = 3\gamma - 1.8\gamma^2$ при $\gamma \leq \gamma_*$; $H_{0AP}(\gamma) = 1$ при $\gamma > \gamma_*$. Ниже, в Таблице 5, приведены результаты вычислений и сравнение значения $H_0(\gamma)$ с $H_{0AP}(\gamma)$ – $\Delta = \frac{|H_{0AP}(\gamma) - H_0(\gamma)|}{H_0(\gamma)} \times 100$.

Таблица 5.

γ	$H(\gamma)$	$H_{AP}(\gamma)$	Δ
0.1	0.298	0.282	5.325
0.2	0.554	0.528	4.752
0.3	0.764	0.738	3.419
0.4	0.920	0.912	0.892
0.5	1.	1.	0.

Функция $H_1(\gamma) = \frac{1}{4} \frac{[1 - (1 - \gamma)^2][1 - (1 - \beta)^2]}{(1 - \gamma)^2 - (1 - \beta)^2}$, где $\beta = \beta(\gamma)$;

$H_1(\gamma) \approx H_{1AP}(\gamma)$, где $H_{1AP}(\gamma) = \frac{5.5}{8} \gamma(2 - \gamma)(1 + 1.2\gamma^2)$ при $\gamma \leq 0.43$;

$H_{1AP}(\gamma) = \frac{1}{4} \frac{\gamma(2 - \gamma)}{(1 - \gamma)^2}$ при $\gamma > 0.43$. Ниже, в Таблице 6, приведены результаты

вычислений и сравнение значения $H_1(\gamma)$ с $H_{1AP}(\gamma)$ – $\Delta = \frac{|H_{1AP}(\gamma) - H_1(\gamma)|}{H_1(\gamma)} \times 100$.

Таблица 6.

γ	$H_1(\gamma)$	$H_{1AP}(\gamma)$	Δ
0.1	0.131	0.133	1.076
0.2	0.257	0.262	2.195
0.3	0.383	0.398	3.803
0.4	0.525	0.546	3.837
0.5	0.750	0.750	0.0
0.6	1.313	1.313	0.0
0.7	2.528	2.528	0.0
0.8	6.000	6.000	0.0
0.9	24.750	24.750	0.0

ЛИТЕРАТУРА

1. Protection Manual (2019). IADC-WD-04-03. Version 7.1. Prepared by the IADC WG3 members.
Retrieved from https://www.iadc-home.org/documents_public/view/page/6/id/81#u
2. Безруков Л.Н., Гадасин И.М., Киселев А.И. и др. *О физических принципах построения защиты модуля «Заря» Международной космической станции от ударного повреждения частицами околоземной среды* // Космонавтика и ракетостроение. – 2000. – Vol.18. – Pp.140-151.
3. Horz F., Cintala M.J., Bernhard R.P. et al. *Multiple-mesh bumpers: a feasibility study* // Int. J. Impact Eng. – 1995. – Vol.17. – Pp.431-442.
4. Smirnov N.N., Kiselev A.B., Smirnova M.N., Nikitin V.F. *Space traffic hazards from orbital debris mitigation strategies* // Acta Astron. – 2015. – Vol.109. – Pp.144-152.
5. Мягков Н.Н., Сулимов А.В., Шумихин Т.А. *Численное моделирование высокоскоростного взаимодействия ударника с дискретными экранами* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2008. – Т.14. – №4. – С.532-546.
6. Goloveshkin V.A., Myagkov N.N., Shumikhin T.A. *Model of interaction of a rigid mesh with a deformable target* // Meccanica. – 2021. – Vol.56. – No.1. – Pp.179-193.
7. Головешкин В.А., Мягков Н.Н., Чернова П.Д. *Моделирование взаимодействия жесткого сетчатого ударника с деформируемой преградой* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2020. – Т.26. – №1. – С.3-23.
8. Goloveshkin V.A., Myagkov N.N. *Model for the Interaction of a Rigid String with a Deformable Target* // Russian Metallurgy (Metally). – 2019. – Vol.2019. – Iss.4. – Pp.294-300.
9. Головешкин В.А., Мягков Н.Н. *Модель переноса импульса при высокоскоростном ударе* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2021. – Т.27. – №2. – С.147-168.
10. Semenov A., Bezrukov L., Malkin A. et al. *Impact fragmentation dependence on geometrical parameter of single mesh bumpers* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2006. – Vol.12. – No.2. – Pp.256-262.
11. Myagkov N.N., Shumikhin T.A., Bezrukov L.N. *Experimental and Numerical Study of Peculiarities at High-Velocity Interaction between a Projectile and Discrete Bumpers* // Int. J. Impact Engn. – 2010. – Vol.37. – Pp.980-994.

REFERENCES

1. Protection Manual (2019). IADC-WD-04-03. Version 7.1. Prepared by the IADC WG3 members.
Retrieved from https://www.iadc-home.org/documents_public/view/page/6/id/81#u
2. Bezrukov L.N., Gadasin I.M., Kiselev A.I. et al. *O fizicheskikh printsipakh postroeniya zashhity modulya "Zarya" Mezhdunarodnoj kosmicheskoy stantsii ot udarnogo povrezhdeniya chastitsami okolozemnoj sredy [About the physical bases of building the protection of the ISS module "Zarya" against impact damage by near-earth space debris fragments]*. Kosmonavtika i raketostroenie, 2000, Vol.18, Pp.140-151.
3. Horz F., Cintala M.J., Bernhard R.P. et al. *Multiple-mesh bumpers: a feasibility study*. Int. J. Impact Eng., 1995, Vol.17, Pp.431-442.
4. Smirnov N.N., Kiselev A.B., Smirnova M.N., Nikitin V.F. *Space traffic hazards from orbital debris mitigation strategies*. Acta Astron, 2015, Vol.109, Pp.144-152.
5. Myagkov N.N., Sulimov A.V., Shumikhin T.A. *Chislennoe modelirovanie vysokoskorostnogo vzaimodejstviya udarnika s diskretnymi ehkranami [Numerical Simulation of High-Velocity Interaction of a Projectile with Discrete Bumpers]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2008, Vol.14, No.4, Pp.532-546.
6. Goloveshkin V.A., Myagkov N.N., Shumikhin T.A. *Model of interaction of a rigid mesh with a deformable target*. Meccanica, 2021, Vol.56, No.1, Pp.179-193.
7. Goloveshkin V.A., Myagkov N.N., Chernova P.D. *Modelirovanie vzaimodejstviya zhestkogo setchatogo udarnika s deformiruemoy pregradoj [Model of interaction of a rigid mesh with a deformable target]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2020, Vol.26, No.1, Pp.3-23.
8. Goloveshkin V.A., Myagkov N.N. *Model for the Interaction of a Rigid String with a Deformable Target*. Russian Metallurgy (Metally), 2019, Vol.2019, Iss.4, Pp.294-300.
9. Goloveshkin V.A., Myagkov N.N. *Model' perenosa impul'sa pri vysokoskorostnom udare [Model of momentum transfer in hypervelocity impact]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2021, Vol.27, No.2. Pp.147-168.
10. Semenov A., Bezrukov L., Malkin A. et al. *Impact fragmentation dependence on geometrical parameter of single mesh bumpers*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2006, Vol.12, No.2, Pp.256-262.
11. Myagkov N.N., Shumikhin T.A., Bezrukov L.N. *Experimental and Numerical Study of Peculiarities at High-Velocity Interaction between a Projectile and Discrete Bumpers*. Int. J. Impact Engn., 2010, Vol.37, Pp.980-994.

Поступила в редакцию 24 февраля 2022 года.

Сведения об авторах:

Головешкин Василий Адамович – д.т.н., проф., в.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

Мягков Николай Николаевич – д.ф.-м.н., зав. лаб., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: nn_myagkov@mail.ru