

УДК 534.1

EDN QGYKOA (<https://elibrary.ru/qgykoa>)

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА КОЛЕБАНИЙ РЕГУЛЯРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ*

Гришанина Т.В.¹, Шклярчук Ф.Н.²

¹ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия

²ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Динамика упругих крупногабаритных космических конструкций представляет большой интерес при проектировании орбитальных станций, больших радиотелескопов, радиотелескопов, спутников с большими солнечными батареями. Особое место среди космических конструкций занимают стержневые системы, состоящие из многих тысяч элементов. Они могут использоваться в конструкциях больших отражателей антенн, платформ, силовых ферменных каркасов. Как правило, из удобства сборки в космосе такие системы имеют регулярную структуру, т.е. состоят из однотипных секций (модулей), последовательно соединенных друг с другом.

При расчете динамических характеристик таких конструкций может использоваться метод конечных элементов, либо другие численные методы. Но при их применении для систем с большим количеством секций возникают трудности, связанные с большой размерностью решаемых задач. Тогда расчет может оказаться весьма трудоемким. Поэтому представляет интерес разработка эффективных моделей и методов, основанных на использовании свойств регулярности таких конструкций.

В данной работе представлен численно-аналитический метод расчета собственных колебаний или гармонических вынужденных колебаний регулярных систем, трудоемкость которого не зависит от числа однотипных модулей и определяется числом степеней свободы одной секции.

Для оценки трудоемкости и точности предложенного расчетного метода решена задача изгибных колебаний шарнирно опертой однородной балки, представленной системой однотипных конечных элементов, и дано сравнение полученного на его основе решения с результатами точного решения и решения непосредственно на основе уравнений метода конечных элементов.

Из приведенных в статье расчетов видно, что изложенный способ позволяет получить результаты достаточно близкие к точным. Причем сходимость улучшается при увеличении количества однотипных элементов, составляющих регулярную систему. Таким образом, данный метод может быть эффективным при динамических расчетах регулярных конструкций, состоящих из большого числа последовательно соединенных однотипных модулей.

Ключевые слова: собственные колебания; гармонические колебания; метод конечных элементов; регулярные конструкции

* Работа выполнена в рамках государственного задания ИППРИМ РАН.

NUMERICAL-ANALYTICAL METHOD FOR CALCULATING THE OSCILLATIONS OF REGULAR STRUCTURES

Grishanina T.V.¹, Shklyarchuk F.N.²

¹*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia*

²*Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

ABSTRACT

Dynamics of elastic large-sized space structures is of great interest for design of orbital stations, large radio antennas, radio telescopes, satellites with large solar panels. Special place among space structures is occupied by truss systems consisting of many thousands of elements. They can be used for future large antenna reflectors, platforms, strength frameworks. As a rule, such systems for convenience of assembling in space have a regular structure, i.e. they consist of the same type of sections (modules) connected in series with each other.

When calculating the dynamic characteristics of such structures, the finite element method or other similar numerical methods can be used. But when they are used for systems with a large number of sections, difficulties arise due to the large dimension of the tasks being solved. Then the calculation can be very time-consuming. Therefore, it is of interest to develop effective models and methods based on the use of regularity properties of such structures.

This paper presents a numerical-analytical method for calculating natural oscillations or harmonic forced oscillations of regular systems, the complexity of which does not depend on the number of modules of the same type and is determined by the number of degrees of freedom of one section.

To assess the complexity and accuracy of the proposed calculation method, the problem of the flexural vibrations of a freely supported homogeneous beam is solved and the solution obtained on its basis is compared with the results of the exact solution and the direct solution based on the finite element method.

From the calculations given in the article, it can be seen that the described method allows you to get results that are quite close to exact. Moreover, convergence improves with an increase in the number of elements of the same type included in the regular system. Thus, this method can be effective in dynamic calculations of regular structures consisting of a large number of sequentially connected modules of the same type.

Keywords: natural oscillations; harmonic oscillations; finite element method; regular structures

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время много сделано в области совершенствования численных методов расчета конструкций: разработаны алгоритмы и созданы программы для анализа разнообразных сложных конструкций. Основные достижения связаны с методом конечных элементов (МКЭ).

Метод конечных элементов наиболее достоверно и полно описывает напряженно-деформированное состояние конструкции при использовании достаточно мелких конечных элементов. Он универсален, применим к объектам произвольной и сложной формы, позволяет учитывать динамические эффекты, нелинейность и в то же время метод легко алгоритмизируется и сравнительно просто реализуется на персональных компьютерах. С его помощью можно рассчитывать сложные конструкции, состоящие из элементов различных видов: стержней, работающих на растяжение-сжатие, изгибаемых балок, пластинок, оболочек, мембран, трехмерных тел и др. [1].

В различных строительных и космических конструкциях достаточно широко применяются конструкции, имеющие регулярную структуру, например, ферменные конструкции с однотипными модулями (секциями). Используя однотипность секций, составляющих такие конструкции, можно упростить решение рассматриваемых задач. Один из способов упрощения расчетов – это построение континуальных моделей. При построении континуальной модели регулярную конструкцию заменяют эквивалентной балкой или пластиной, обычно используя кинематические допущения о линейном распределении перемещений в поперечных сечениях фермы [2] (гипотеза плоских недеформируемых сечений), или в более общем случае учитывая деформацию поперечных сечений [3].

При разработке конечно-элементных моделей для регулярных конструкций стремятся к уменьшению размерности задачи или к получению приближенных формул, позволяющих оценить напряженно-деформированное состояние конструкции и её динамические характеристики в зависимости от числа однотипных модулей. Большое число публикаций связано с решением статических задач для регулярных стержневых систем [4-6].

Решения задач о колебаниях конструкций, имеющую регулярную структуру, в большинстве публикаций получено на примерах ферменных конструкций [6-10]. В работе [11] предложен метод расчета регулярных конструкций без привязки к типу самой конструкции. В этой работе с помощью переходной матрицы записывается зависимость векторов состояний последовательно соединенных одинаковых модулей, а разрешающие уравнения для определения собственных частот получают из однородных граничных условий, число которых равно размерности повторяющегося модуля, умноженной на два. Таким образом, размерность задачи определяется только размерностью типового элемента и не зависит от числа модулей в конструкции. В данной статье рассматриваются гармонические колебания регулярной конструкции, образованной из последовательно соединенных между собой одинаковых модулей. Колебания системы описываются в обобщенных координатах, которые представляют степени свободы модулей, по которым они кинематически соединяются друг с другом, и степени свободы внутренних присоединенных к каждому модулю элементов. Получены аналитические решения регулярной системы уравнений. В качестве примера расчета с оценками точности рассмотрена математическая модель поперечных колебаний однородной балки, составленная из произвольного числа одинаковых конечных элементов (модулей).

1. УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ

Рассмотрим систему, состоящую из N последовательно соединенных одинаковых модулей. Обозначим через \mathbf{r}_{k-1} , \mathbf{r}_k и \mathbf{q}_k – векторы обобщенных координат, представляющие $2n$ граничных (по n на каждом крае) и m внутренних степеней свободы k -ого модуля конструкции (рис.1). Тогда выражения кинетической и потенциальной энергий для этого модуля записываются в виде

$$T_k = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_{k-1}^T \mathbf{M}_{00} \dot{\mathbf{r}}_{k-1} + \dot{\mathbf{r}}_{k-1}^T \mathbf{M}_{01} \dot{\mathbf{r}}_k + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_k^T \mathbf{M}_{11} \dot{\mathbf{r}}_k + \dot{\mathbf{r}}_{k-1}^T \mathbf{M}_{10} \dot{\mathbf{q}}_k + \dot{\mathbf{r}}_k^T \mathbf{M}_{11} \dot{\mathbf{q}}_k + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_k^T \mathbf{M}_{22} \dot{\mathbf{q}}_k, \quad (1)$$

$$P_k = \frac{1}{2} \mathbf{r}_{k-1}^T \mathbf{K}_{00} \mathbf{r}_{k-1} + \mathbf{r}_{k-1}^T \mathbf{K}_{01} \mathbf{r}_k + \frac{1}{2} \mathbf{r}_k^T \mathbf{K}_{11} \mathbf{r}_k + \mathbf{r}_{k-1}^T \mathbf{K}_0 \mathbf{q}_k + \mathbf{r}_k^T \mathbf{K}_1 \mathbf{q}_k + \frac{1}{2} \mathbf{q}_k^T \mathbf{K}_2 \mathbf{q}_k,$$

где \mathbf{M}_{ij} , \mathbf{K}_{ij} при $i, j=0, 1$ порядка $n \times n$, \mathbf{M}_i , \mathbf{K}_i при $i=0, 1$ порядка $n \times m$, \mathbf{M}_i , \mathbf{K}_i при $i=2$ порядка $m \times m$ – блочные матрицы инерции и жесткости k -го модуля.

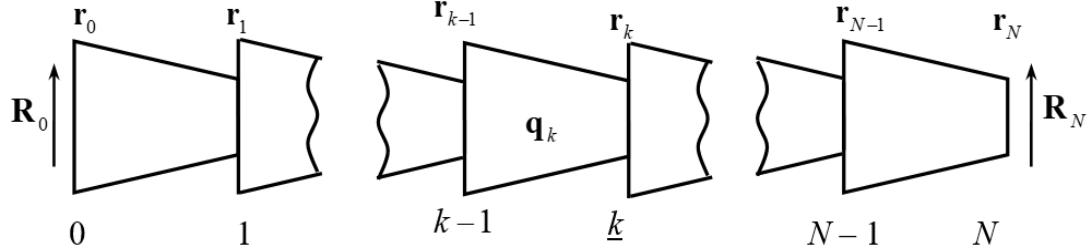


Рис.1. Структура регулярной конструкции.

Будем рассматривать собственные или вынужденные гармонические колебания системы с частотой ω . Причем в случае вынужденных колебаний считаем, что нагрузки приложены только в крайних сечениях $k=0$ и $k=N$ (или в этих сечениях заданы перемещения).

Кинетическая и потенциальная энергии и вариация работы внешних сил для всей системы

$$T = \sum_{k=1}^N T_k, \quad \Pi = \sum_{k=1}^N P_k, \quad \delta A = \delta \mathbf{r}_0^T \mathbf{R}_0 + \delta \mathbf{r}_N^T \mathbf{R}_N, \quad (2)$$

где \mathbf{R}_0 , \mathbf{R}_N – векторы обобщенных сил, приложенных в крайних сечениях $k=0$ и $k=N$.

Уравнение гармонических колебаний системы получим по методу Лагранжа. Пусть L – функция Лагранжа

$$L = \Pi - \omega^2 T = \sum_{k=1}^N L_k,$$

где

$$L_k = \frac{1}{2} \mathbf{r}_{k-1}^T \mathbf{D}_{00} \mathbf{r}_{k-1} + \mathbf{r}_{k-1}^T \mathbf{D}_{01} \mathbf{r}_k + \frac{1}{2} \mathbf{r}_k^T \mathbf{D}_{11} \mathbf{r}_k + \mathbf{r}_{k-1}^T \mathbf{C}_0^T \mathbf{q}_k + \mathbf{r}_k^T \mathbf{C}_1 \mathbf{q}_k + \frac{1}{2} \mathbf{q}_k^T \mathbf{C}_2 \mathbf{q}_k; \quad (3)$$

$$\mathbf{D}_{ij} = \mathbf{K}_{ij} - \omega^2 \mathbf{M}_{ij}, \quad i=0, 1; \quad j=0, 1; \quad \mathbf{C}_m = \mathbf{K}_m - \omega^2 \mathbf{M}_m, \quad m=0, 1, 2.$$

Из условия равенства нулю вариации функции Лагранжа L по \mathbf{r}_k и \mathbf{q}_k получим уравнения гармонических колебаний

$$\mathbf{D}_{01}^T \mathbf{r}_{k-1} + (\mathbf{D}_{00} + \mathbf{D}_{11}) \mathbf{r}_k + \mathbf{D}_{01} \mathbf{r}_{k+1} + \mathbf{C}_1 \mathbf{q}_k + \mathbf{C}_0 \mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{0}, \quad (4)$$

$$(k=1, 2, \dots, N-1)$$

$$\mathbf{C}_0^T \mathbf{r}_{k-1} + \mathbf{C}_1^T \mathbf{r}_k + \mathbf{C}_2 \mathbf{q}_k = \mathbf{0}, \quad (k=1, 2, \dots, N) \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D}_{00} \mathbf{r}_0 + \mathbf{D}_{01} \mathbf{r}_1 + \mathbf{C}_0 \mathbf{q}_1 &= \mathbf{R}_0 \\ \mathbf{D}_{01}^T \mathbf{r}_{N-1} + \mathbf{D}_{11} \mathbf{r}_N + \mathbf{C}_1 \mathbf{q}_N &= \mathbf{R}_N \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Уравнения (6) можно рассматривать как динамические граничные условия на краях $k=0$, $k=N$. Если заданы кинематические граничные условия

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{r}_N = \mathbf{u}_N, \tag{7}$$

то уравнения (6) можно использовать для определения неизвестных реакций \mathbf{R}_0 , \mathbf{R}_N , соответствующих заданным перемещениям \mathbf{u}_0 , \mathbf{u}_N . Наряду с условиями (6), (7) могут быть заданы смешанные граничные условия или условия сопряжения (например, для замкнутой системы $\mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_N = \mathbf{0}$, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_N$).

Из уравнений (5) получим

$$\mathbf{q}_k = -\mathbf{C}_2^{-1} (\mathbf{C}_0^T \mathbf{r}_{k-1} + \mathbf{C}_1^T \mathbf{r}_k). \tag{8}$$

С учетом (8) уравнения (4) и (6) преобразуются к виду

$$\mathbf{B}_{01}^T \mathbf{r}_{k-1} + (\mathbf{B}_{00} + \mathbf{B}_{11}) \mathbf{r}_k + \mathbf{B}_{01} \mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{0}, \quad (k = 1, 2, \dots, N-1) \tag{9}$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B}_{00} \mathbf{r}_0 + \mathbf{B}_{01} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{R}_0 \\ \mathbf{B}_{01}^T \mathbf{r}_{N-1} + \mathbf{B}_{11} \mathbf{r}_N &= \mathbf{R}_N \end{aligned} \right\}, \tag{10}$$

где $\mathbf{B}_{ij} = \mathbf{D}_{ij} - \mathbf{C}_i \mathbf{C}_2^T \mathbf{C}_j^T$, $i=0, 1$; $j=0, 1$.

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Уравнение (9) имеет частное решение вида

$$\mathbf{r}_k = \lambda^k \mathbf{Z}, \tag{11}$$

где \mathbf{Z} – неизвестный собственный вектор (порядка n), λ – неизвестное собственное значение. С учетом (11) получаем

$$[\lambda^{-1} \mathbf{B}_{01}^T + (\mathbf{B}_{00} + \mathbf{B}_{11}) + \lambda \mathbf{B}_{01}] \mathbf{Z} = \mathbf{0}. \tag{12}$$

Из этого матричного уравнения порядка n определяются $2n$ собственных значений и соответствующих им векторов. Для решения этого уравнения с помощью стандартных программ из математического обеспечения его следует записать в виде обычного матричного уравнения задачи о собственных значениях матрицы порядка $2n$

$$[\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}] \mathbf{W} = \mathbf{0}, \tag{13}$$

где

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} -\mathbf{B}_{01}^{-1} (\mathbf{B}_{00} + \mathbf{B}_{11}) & -\mathbf{B}_{01}^{-1} \mathbf{B}_{01}^T \\ \hline \mathbf{E} & \mathbf{0} \end{array} \right], \quad \mathbf{W} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{Z} \\ \lambda^{-1} \mathbf{Z} \end{array} \right],$$

\mathbf{E} – единичная матрица.

Таким образом, порядок системы разрешающих уравнений определяется количеством степеней свободы одного структурного модуля (подсистемы) и не зависит от числа этих модулей.

В общем случае решение уравнения (12) является комплексным и собственные значения и векторы разбиваются на сопряженные пары

$$\begin{aligned} \lambda_v &= \alpha_v + i\beta_v, & \bar{\lambda}_v &= \alpha_v - i\beta_v, \\ \mathbf{Z}_v &= \mathbf{X}_v + i\mathbf{Y}_v, & \bar{\mathbf{Z}}_v &= \mathbf{X}_v - i\mathbf{Y}_v, \end{aligned}$$

Рассмотрим случай, когда все собственные значения являются комплексными [12]. Тогда общее решение уравнения (9) записывается в виде

$$\mathbf{r}_k = \sum_{v=1}^n (C_v \lambda_v^k \mathbf{Z}_v + \bar{C}_v \bar{\lambda}_v^k \bar{\mathbf{Z}}_v), \tag{14}$$

где $C_v = a_v + ib_v$, $\bar{C}_v = a_v - ib_v$ – произвольные константы.

Решение (14) можно привести к действительной форме

$$\mathbf{r}_k = \sum_{v=1}^n \rho_v^k (a_v \mathbf{U}_{kv} + b_v \mathbf{V}_{kv}), \quad (15)$$

где

$$\rho_v = \sqrt{\alpha_v^2 + \beta_v^2}, \quad \varphi_v = \arctg(\beta_v/\alpha_v);$$

$$\mathbf{U}_{kv} = \mathbf{X}_v \cos(k\varphi_v) - \mathbf{Y}_v \sin(k\varphi_v), \quad \mathbf{V}_{kv} = \mathbf{X}_v \sin(k\varphi_v) + \mathbf{Y}_v \cos(k\varphi_v).$$

В случае, когда не все собственные значения являются комплексными, общее решение (9) записывается в ином виде. Пусть в результате решения задачи на собственные значения найдены $2n$ корней λ и соответствующих им векторов \mathbf{Z} , из которых p – пар комплексно-сопряженных, остальные $2(n-p)$ – действительные. Тогда общее решение уравнения будет

$$\mathbf{r}_k = \sum_{v=1}^p \rho_v^k (a_v \mathbf{U}_{kv} + b_v \mathbf{V}_{kv}) + \sum_{i=2p+1}^{2n} C_i \lambda_i^k \mathbf{Z}_i. \quad (16)$$

Его можно записать в матричной форме

$$\mathbf{r}_k = \Phi_k \mathbf{C}, \quad (17)$$

где \mathbf{C} – вектор порядка $2n$, состоящий из набора неизвестных коэффициентов

$$\mathbf{C} = [a_1 \mid b_1 \mid a_2 \mid b_2 \mid \dots \mid a_p \mid b_p \mid C_{2p+1} \mid C_{2p+2} \mid \dots \mid C_{2n}]^T,$$

Φ_k – матрица размером $n \times 2n$, составленная из произведений собственных значений и векторов

$$\Phi_k = [\rho_1^k \mathbf{U}_{k1} \mid \rho_1^k \mathbf{V}_{k1} \mid \dots \mid \rho_p^k \mathbf{U}_{kp} \mid \rho_p^k \mathbf{V}_{kp} \mid \lambda_{2p+1}^k \mathbf{Z}_{2p+1} \mid \dots \mid \lambda_{2n}^k \mathbf{Z}_{2n}].$$

Произвольные константы a_v, b_v ($v=1, 2, \dots, p$) и C_i ($i=2p+1, 2p+2, \dots, 2n$) определяются из граничных условий (7) или (10), которые записываются в виде системы $2n$ алгебраических уравнений относительно этих коэффициентов. С учетом (17) эту систему можно записать в матричной форме следующим образом

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{R}, \quad (18)$$

где \mathbf{G} – квадратная матрица порядка $2n$, \mathbf{R} – вектор порядка $2n$. Если граничные условия заданы в виде (10), то

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{00} \Phi_0 + \mathbf{B}_{01} \Phi_1 \\ \dots \\ \mathbf{B}_{01}^T \Phi_{N-1} + \mathbf{B}_{11} \Phi_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 \\ \dots \\ \mathbf{R}_N \end{bmatrix}. \quad (19)$$

При однородных граничных условиях ($\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$ или $\mathbf{R}_0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{r}_N = \mathbf{0}$ или $\mathbf{R}_N = \mathbf{0}$), приравняв нулю определитель матрицы \mathbf{G} , получим характеристическое уравнение $\det[\mathbf{G}(\omega)] = 0$, из которого можно определить собственные частоты колебаний. После этого для каждой найденной частоты можно найти коэффициенты a_v, b_v, C_i и вычислить, используя (15), соответствующую форму колебаний.

3. ПРИМЕР РАСЧЕТА

В качестве примера рассмотрим поперечные колебания балки с учетом поперечного сдвига, предварительного продольного растяжения и без учета

инерции вращения поперечных сечений. Геометрические, массовые и жесткостные характеристики балки считаем постоянными по всей длине балки. Для такой балки существует точное решение задачи о собственных колебаниях и поэтому её удобно использовать для тестирования метода.

3.1. Метод конечных элементов.

Разобьем балку на N конечных элементов (КЭ) одинаковой длины. В качестве обобщенных координат будем рассматривать поперечные перемещения и углы поворота поперечных сечений на краях КЭ v_k и ϑ_k , $k=0,1,\dots,N$ (рис.2). В данном случае $n=2$, $m=0$, $\mathbf{r}_k^T = [v_k \ \vartheta_k]$. Перемещение v и угол поворота ϑ в любой точке КЭ выражаются через перемещения и углы поворота на краях $v_{k-1}(t)$, $\vartheta_{k-1}(t)$, $v_k(t)$, $\vartheta_k(t)$, которые примем в виде точного решения однородной статической задачи изгиба-сдвига k -го КЭ (рис.2б) без учёта продольной силы, [13]

$$\begin{aligned} v(x,t) &= v_{k-1}(t)\varphi_0(x) + \vartheta_{k-1}(t)\psi_0(x) + v_k(t)\varphi_1(x) + \vartheta_k(t)\psi_1(x), \\ \vartheta(x,t) &= v_{k-1}(t)\eta_0(x) + \vartheta_{k-1}(t)\chi_0(x) + v_k(t)\eta_1(x) + \vartheta_k(t)\chi_1(x), \end{aligned} \quad (20)$$

где координата x отсчитывается от края $k-1$; функции формы имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= 1 - (1-\kappa)\frac{x}{a} - 3\kappa\frac{x^2}{a^2} + 2\kappa\frac{x^3}{a^3}; \\ \psi_0 &= \frac{1+\kappa}{2}x - \frac{1+3\kappa}{2}\frac{x^2}{a} + \kappa\frac{x^3}{a^2}; \\ \eta_0 &= \frac{d\varphi_0}{dx} + \frac{1-\kappa}{a}, \quad \chi_0 = \frac{d\psi_0}{dx} + \frac{1-\kappa}{2}; \quad \kappa = \left(1 + \frac{12EI}{a^2GF_c}\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (21)$$

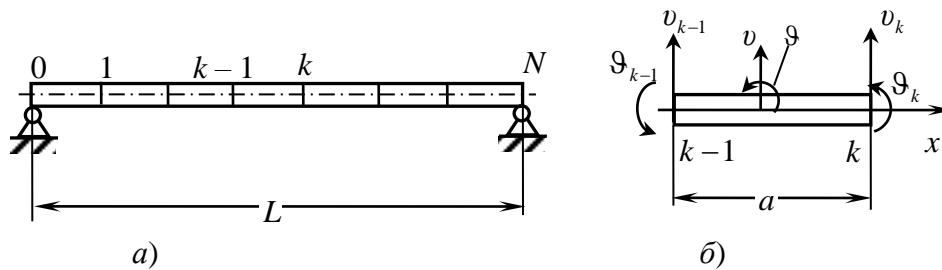


Рис.2.

Остальные функции записываются через функции (21)

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 1 - \varphi_0, \quad \psi_1 = x - a(1 - \varphi_0) - \psi_0, \\ \eta_1 &= -\eta_0, \quad \chi_1 = 1 + a\eta_0 - \chi_0, \end{aligned}$$

которые следуют из того, что выражения (20) должны быть справедливы также и в случае перемещения и поворота недеформируемого КЭ, т.е. в случае, когда $v = A + Bx$ и $\vartheta = B$, где A и B – произвольные константы.

Если пренебречь поперечным сдвигом, то $GF_c \rightarrow \infty$ и $\kappa = 1$.

Потенциальную и кинетическую энергии k -го КЭ определяем по формулам

$$P_k = \frac{1}{2} \int_0^a \left[EI (\vartheta')^2 + GF_c (v' - \vartheta)^2 + N^0 (v')^2 \right] dx, \quad T_k = \frac{1}{2} \int_0^a \mu \dot{v}^2 dx. \quad (22)$$

Здесь EI , GF_c – жесткости на изгиб и сдвиг; μ – погонная масса балки; N^0 – продольное растягивающее усилие в начальном состоянии; a – длина КЭ. Подставляя (20) в формулы для потенциальной и кинетической энергий (22), запишем их через перемещения и углы поворотов на торцах КЭ в матричном виде

$$P_k = \frac{1}{2} \mathbf{r}_k^T \mathbf{K} \mathbf{r}_k, \quad T_k = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_k^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{r}}_k. \quad (23)$$

Матрицы жесткости и инерции имеют вид

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{00} & \mathbf{K}_{01} \\ \mathbf{K}_{10} & \mathbf{K}_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & c & -b & c \\ c & d & -c & ca-d \\ -b & -c & b & -c \\ c & ca-d & -c & d \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{00} & \mathbf{M}_{01} \\ \mathbf{M}_{10} & \mathbf{M}_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{34} \end{bmatrix},$$

где

$$b = 12EI \frac{\kappa}{a^3} + \frac{N^0}{a} \left(1 + \frac{\kappa^2}{5} \right), \quad c = 6EI \frac{\kappa}{a^2} + \frac{N^0}{10} \kappa^2,$$

$$d = EI \frac{1+3\kappa}{a} + N^0 a \left(\frac{1}{12} + \frac{\kappa^2}{20} \right), \quad \kappa = \left(1 + \frac{12}{a^2} \frac{EI}{GF_c} \right)^{-1};$$

$$m_{11} = m_{33} = \frac{\mu a}{6} \left(2 + \frac{\kappa}{5} + \frac{\kappa^2}{35} \right), \quad m_{12} = -m_{34} = \frac{\mu a^2}{6} \left(\frac{1}{4} + \frac{\kappa}{20} + \frac{\kappa^2}{70} \right),$$

$$m_{13} = \frac{\mu a}{6} \left(1 - \frac{\kappa}{5} - \frac{\kappa^2}{35} \right), \quad m_{14} = -m_{23} = \frac{\mu a^2}{6} \left(-\frac{1}{4} + \frac{\kappa}{20} + \frac{\kappa^2}{70} \right),$$

$$m_{22} = m_{44} = \frac{\mu a^3}{6} \left(\frac{1}{20} + \frac{\kappa^2}{140} \right), \quad m_{24} = \frac{\mu a^3}{6} \left(-\frac{1}{20} + \frac{\kappa^2}{140} \right).$$

После подстановки в уравнение (12) значений \mathbf{K}_{00} , \mathbf{K}_{01} , \mathbf{K}_{11} и \mathbf{M}_{00} , \mathbf{M}_{01} , \mathbf{M}_{11} получим следующее матричное уравнение

$$\left[\lambda^{-1} (\mathbf{K}_{01}^T - \omega^2 \mathbf{M}_{01}^T) + \mathbf{K}_{00} + \mathbf{K}_{11} - \omega^2 (\mathbf{M}_{00} + \mathbf{M}_{11}) + \lambda (\mathbf{K}_{01} - \omega^2 \mathbf{M}_{01}) \right] \mathbf{Z} = \mathbf{0}.$$

Из условия равенства определителя этого уравнения нулю определяются собственные значения λ_i ($i=1, 2, 3, 4$). Из этого уравнения для каждого значения λ_i находим собственные векторы \mathbf{Z}_i ($i=1, 2, 3, 4$). В рассматриваемом примере два собственных значения комплексно-сопряженные $\lambda_1, \bar{\lambda}_1$ и два действительных λ_3, λ_4 . В этом случае матрица Φ_k в (17) имеет размерность 2×4 и вычисляется по формуле

$$\Phi_k = \left[\rho_1^k \mathbf{U}_{k1} \mid \rho_1^k \mathbf{V}_{k1} \mid \lambda_3^k \mathbf{Z}_3 \mid \lambda_4^k \mathbf{Z}_4 \right], \quad (24)$$

где $\rho_1 = \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}$, $\varphi_1 = \arctg(\beta_1/\alpha_1)$; $\lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1$, $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{X}_1 + i\mathbf{Y}_1$;

$$U_{k1} = X_1 \cos(k\varphi_1) - Y_1 \sin(k\varphi_1), \quad V_{k1} = X_1 \sin(k\varphi_1) + Y_1 \cos(k\varphi_1).$$

При решении задачи о собственных колебаниях частота ω определяется из условия равенства нулю определителя системы однородных граничных условий.

При шарнирном закреплении граничные условия свободно опертой балки будут

$$\begin{aligned} \text{при } k = 0 \quad v_0 = 0, \quad d\vartheta_0 - cv_1 + (ca - d)\vartheta_1 = 0; \\ \text{при } k = N \quad v_N = 0, \quad cv_{N-1} + (ca - d)\vartheta_{N-1} + d\vartheta_N = 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Подставляя в условия (25) выражения перемещений и углов поворота через собственные значения и векторы в виде (24) получим систему 4-х уравнений относительно неизвестных констант. Из условия равенства нулю определителя этой системы находим собственные частоты. Затем для каждого значения частоты вычисляются формы колебаний после определения констант.

Определитель для граничных условий (25) имеет вид

$$\left\| \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & d \end{array} \right) \Phi_0 + \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -c & ca - d \end{array} \right) \Phi_1 \\ \dots \\ \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ c & ca - d \end{array} \right) \Phi_{N-1} + \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & d \end{array} \right) \Phi_N \end{array} \right\|.$$

Здесь $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_{N-1}, \Phi_N$ вычисляются по формуле (24) при $k=0, 1, N-1, N$, соответственно.

Точное значение собственных частот колебаний свободно опертой балки с постоянным поперечным сечением без учета поперечного сдвига ($GF_c \rightarrow \infty, \kappa = 1$), предварительно растянутой силой N^0 , определяются по формуле

$$\omega_n^* = \frac{\pi^2 n^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu} \left(1 + \frac{N^0 L^2}{\pi^2 n^2 EI} \right)}, \quad n = 1, 2, \dots \tag{26}$$

Ниже в Табл.1 приведены значения четырех низших безразмерных собственных частот $\Omega_i = \omega_i \sqrt{\frac{\mu L^4}{EI}}$, полученных аналитически предложенным методом, методом конечных элементов (МКЭ) и точные значения (26) при $\frac{N^0 L^2}{EI} = -0.4$ и $\kappa = 1$.

Таблица 1.

Ω_n	точное решение	$N = 10$		$N = 20$		$N = 100$	
		МКЭ	метод	МКЭ	метод	МКЭ	метод
Ω_1	9.66754	9.66760	9.67394	9.66754	9.66833	9.66754	9.66754
Ω_2	39.2779	39.28215	39.3838	39.27818	39.29104	39.27791	39.27801
Ω_3	88.6262	88.67378	89.17813	88.62924	88.69416	88.62622	88.62674
Ω_4	157.714	157.9755	159.5212	157.7305	157.9340	157.7136	157.7152

На рис.3 приведены графики относительной разности $\delta_n = \left| \omega_n^* - \omega_n \right| / \omega_n \cdot 100\%$ для четырех низших собственных частот, где ω_n^* – точное значение n -й частоты, вычисленное по формуле (26) для континуальной модели балки, а ω_n – значение n -й частоты, вычисленной на основе конечно-элементной модели представленным аналитическим методом. Номера графиков соответствуют номерам частот в порядке возрастания.

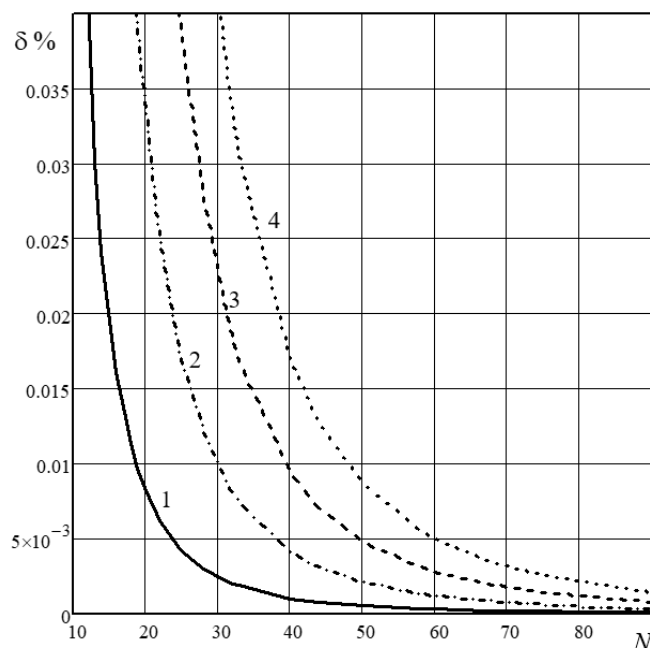


Рис.3. Относительные различия собственных частот.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенный здесь метод расчета собственных колебаний или вынужденных гармонических колебаний регулярных систем является численно-аналитическим и его трудоемкость не зависит от числа однотипных модулей, образующих систему. Колебания таких же систем без учета внутренних степеней свободы ($\mathbf{q}_k = \mathbf{0}$) рассматривались другими методами с использованием переходных матриц в работе [11].

Решения тестовой задачи было получены для балки при различном числе конечных элементов. Анализ результатов показал, что наиболее точно вычисляются частоты для низших форм колебаний. Даже при небольшом числе участков разбиения относительная погрешность для них не превышает 2%. При увеличении количества составляющих элементов решение сходится к точному решению. Таким образом, можно сделать вывод о том, что данный расчетный метод является эффективным для расчета колебаний регулярных конструкций с большим числом составляющих элементов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С. *Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов*. – М.: Высшая школа, 1985. – 390 с.
2. Усюкин В.И. *Строительная механика конструкций космической техники*. – М.: Машиностроение, 1988. – 392 с.
3. Шклярчук Ф.Н. *Упругодинамические континуальные модели длинных ферм регулярной структуры* // Изв. РАН. МТТ. – 1994. – №1. – С.156-163.
4. Галишникова В.В., Игнатъев В.А. *Регулярные стержневые системы. Теория и методы расчета*. – Волгоград: ВолгГАСУ, 2006. – 551 с.
5. Игнатъев В.А. *Расчет регулярных стержневых систем*. – Саратов: Саратовское высшее военно-химическое военное училище, 1973. – 433 с.
6. Кирсанов М.Н. *Аналитический расчет регулярной балочной фермы с произвольным числом панелей со сложной решеткой* // Строительная механика и расчет сооружений. – 2016. – №3. – С.16-19.
7. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. *Формулы для расчета спектра частот собственных колебаний балочной фермы с произвольным числом панелей* // Постулат. – 2019. – №3. – С.11.
8. Мишустин И.В., Рыбаков Л.С. *Собственные колебания плоских регулярных упругих ферм ортогональной структуры* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1999. – Т.5. – №2. – С.3-16.
9. Мишустин И.В., Рыбаков Л.С. *Малые упругие колебания плоских ферм ортогональной структуры* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2003. – Т.9. – №1. – С.42-58.
10. Мишустин И.В., Рыбаков Л.С. *Колебания плоских упругих ферм ортогональной структуры* // Изв. РАН. МТТ. – 2003. – №2. – С.168-184.
11. Бидерман В.Л. *Теория механических колебаний*. – М.: Высшая школа, 1980. – 408 с.
12. Шклярчук Ф.Н., Бобылев Д.С. *Колебания упругих систем, образованных из последовательно соединенных однотипных модулей* / Сборник «Вопросы прочности тонкостенных конструкций». – М.: Изд-во МАИ, 1989. – С.52-56.
13. Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. *Колебания упругих систем*. – М.: Изд-во МАИ, 2013. – 100 с.

REFERENCES

1. Obraztsov I.F., Savel'ev L.M., Khazanov Kh.S. *Metod konechnykh ehlementov v zadachakh stroitel'noj mekhaniki letatel'nykh apparatov* [The finite element method in the problems of structural mechanics of aircraft]. Moskva, Vysshaya shkola, 1985, 390 p.
2. Usyukin V.I. *Stroitel'naya mekhanika konstruksij kosmicheskoy tekhniki* [Construction mechanics of space technology structures]. Moskva, Mashinostroenie, 1988, 392 p.
3. Shklyarchuk F.N. *Uprugodinamicheskie kontinual'nye modeli dlinnykh ferm regul'yarnoj struktury* [Elastic-dynamic continuum models of long trusses of regular structure]. Izvestiya Rossijskoj akademii nauk, Mekhanika tverdogo tela, 1994, No.1, Pp.156-163. (переводная версия журнала существует, но информация о переводе статьи отсутствует)

4. Galishnikova V.V., Ignat'ev V.A. *Regulyarnye sterzhnevye sistemy. Teoriya i metody rascheta [Regular core systems. Theory and methods of calculation]*. Volgograd, VolgGASU, 2006, 551 p.
5. Ignat'ev V.A. *Raschet regulyarnykh sterzhnevnykh sistem [Calculation of regular core systems]*. Saratov, Saratovskoe vysshee voenno-khimicheskoe voennoe uchilishhe, 1973, 433 p.
6. Kirsanov M.N. *Analiticheskij raschet regulyarnoj balochnoj fermy s proizvol'nym chislom panelej so slozhnoj reshetkoj [Analytical calculation of the regular girder with an arbitrary number of panels with a complex lattice]*. Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenij, 2016, No.3, Pp.16-19.
7. Kirsanov M.N., Tin'kov D.V. *Formuly dlya rascheta spektra chastot sobstvennykh kolebanij balochnoj fermy s proizvol'nym chislom panelej [Formulas for calculating the frequency spectrum of natural oscillations of a beam truss with an arbitrary number of panels]*. Postulat, 2019, No.3, Pp.11.
8. Mishustin I.V., Rybakov L.S. *Sobstvennye kolebaniya ploskikh regulyarnykh uprugikh ferm ortogonal'noj struktury [Vibration of flat regular elastic truss with orthogonal structure]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 1999, Vol.5, No.2, Pp.3-16.
9. Mishustin I.V., Rybakov L.S. *Malye uprugie kolebaniya ploskikh ferm ortogonal'noj struktury [Small vibrations of plane girders of orthogonal structure]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2003, Vol.9, No.1, Pp.42-58.
10. Mishustin I.V., Rybakov L.S. *Kolebaniya ploskikh uprugikh ferm ortogonal'noj struktury [Vibrations of plane elastic orthogonal frameworks]*. Izvestiya Rossijskoj akademii nauk, Mekhanika tverdogo tela, 2003, No.2, Pp.168-184. (переводная версия журнала существует, но информация о переводе статьи отсутствует)
11. Biderman V.L. *Teoriya mekhanicheskikh kolebanij [Theory of mechanical vibrations]*. Moskva, Vysshaya shkola, 1980, 408 p.
12. Shklyarchuk F.N., Bobylev D.S. *Kolebaniya uprugikh sistem, obrazovannykh iz posledovatel'no soedinennykh odnotipnykh modulej [Vibrations of elastic systems formed from sequentially connected modules of the same type]*. Sbornik "Voprosy prochnosti tonkostennykh konstruksii". Moskva, Izdatel'stvo MAI, 1989, Pp.52-56.
13. Grishanina T.V., Shklyarchuk F.N. *Kolebaniya uprugikh sistem [Vibrations of elastic systems]*. Moskva, Izdatel'stvo MAI, 2013, 100 p.

Поступила в редакцию 24 марта 2022 года.

Сведения об авторах:

Гришанина Татьяна Витальевна – д.ф.-м.н., проф., проф. каф. «Проектирование и прочность авиационно-ракетных и космических изделий» ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия; e-mail: grishaninatat@list.ru

Шклярчук Федор Николаевич – д.ф.-м.н., проф., г.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: shklyarchuk@list.ru