

УДК 534.26:539.3
EDN SNBMKX (<https://elibrary.ru/snbmkx>)



ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ АНИЗОТРОПНОГО ТЕЛА, ОБЕСПЕЧИВАЮЩИХ МИНИМАЛЬНОЕ ЗВУКООТРАЖЕНИЕ*

Белкин А.Э.

Тульский государственный университет, г. Тула, Россия

АННОТАЦИЯ

Рассмотрена задача по определению значений плотности и упругих констант анизотропного тела, обеспечивающих минимальное, в некотором смысле, отражение звука от данного тела. Представлены постановки как обратной, так и прямой задач, посвящённых дифракции акустических волновых полей на теле, являющимся анизотропным цилиндрическим стержнем с жёстким центральным элементом – в неограниченном пространстве, заполненном идеальной ньютоновской жидкостью. Решение обратной задачи реализовано в виде алгоритма, являющийся вариацией генетического алгоритма. При использовании данного метода перебираются возможные значения искомых параметров тела. Отличие генетического алгоритма от обыкновенного метода перебора заключается в применении специальных операций – «скрещиваний» и «мутаций» наборов параметров. Для каждого рассматриваемого набора, называемого конфигурацией, решается прямая задача, в связи с чем она подробно рассмотрена в работе. Для заданных параметров тела и падающей волны поиск рассеянного звукового поля основан на модели распространения малых возмущений в идеальной ньютоновской жидкости, а также линейной теории упругости. Общие уравнения движения сплошной среды сводятся сперва к системе дифференциальных уравнений математической физики (в частных производных), затем к более простой системе дифференциальных уравнений, являющихся обыкновенными. Уравнения дополняются граничными условиями на поверхности тела и на границе анизотропной части с жёстким сердечником. Это позволяет определить коэффициенты разложения рассеянной волны. Степень звукоотражения определяется как функционал на пространстве параметров тела, выраженный через интеграл от потенциала скоростей рассеянной волны. Предложено несколько вариантов функционала, которые могут использоваться в различных вариациях обратной задачи. Генетический алгоритм используется для минимизации данного функционала. В работе подробно описаны специальные параметры алгоритма и их оптимальные значения, форма представления данных в генетическом алгоритме и все основные шаги.

Ключевые слова: обратная задача дифракции; трансверсальная анизотропия; дифракция акустических волн; генетический алгоритм; линейная теория упругости; краевая задача

ON THE USE OF A GENETIC ALGORITHM FOR DETERMINING THE PARAMETERS OF ANISOTROPIC BODY PROVIDING MINIMUM SOUND REFLECTION

Belkin A.E.

* Исследование выполнено за счёт гранта Российской научного фонда № 18-11-00199, <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>.

ABSTRACT

The problem of determining the values of the density and elastic constants of an anisotropic body, which provide the minimum, in a sense, sound reflection from a given body, is considered. Statements of both the inverse and the direct problem of the diffraction of acoustic waves from a body – an anisotropic cylinder with a rigid core - in an unlimited space filled with an ideal fluid are presented. An algorithm for solving the inverse problem is described, which is a variation of the genetic algorithm. When using this method, the possible values of the desired parameters of the body are sorted out. The difference between the genetic algorithm and the ordinary enumeration method lies in the use of special operations – "crossings" and "mutations" of parameter sets. For each considered set, called a configuration, a direct problem is solved, in connection with which it is considered in detail in the work. For given parameters of the body and the incident wave, the search for a scattered sound field is based on the model of the propagation of small perturbations in an ideal fluid and the linear theory of elasticity. The general equations of motion of a continuous medium are reduced first to a system of equations in partial derivatives, then to a system of ordinary differential equations. The equations are supplemented with boundary conditions on the surface of the body and on the boundary of the anisotropic part with the rigid core. This makes it possible to determine the expansion coefficients of the scattered wave. The degree of sound reflection is defined as a functional on the space of parameters of the body, expressed in terms of the integral of the potential of the velocities of the scattered wave. Several variants of the functional are proposed, which can be used in various variations of the inverse problem. A genetic algorithm is used to minimize this functional. The paper describes in detail the special parameters of the algorithm and their optimal values, the form of data representation in the genetic algorithm and all the main steps.

Keywords: inverse problem of diffraction; transversal anisotropy; diffraction of acoustic waves; genetic algorithm; linear theory of elasticity; edge task

ВВЕДЕНИЕ

Одной из ключевых задач математической физики и – в частности – механики сплошных сред – это задача об определении взаимосвязи внутренней структуры тел и влияния данных тел на внешние процессы. Тела в данном случае рассматриваются как сплошные среды различных типов и обладающие различными распределёнными характеристиками (плотность, постоянные упругости и так далее). В случае теории дифракции, интерес представляет задача об определении взаимосвязи между параметрами рассеивающего звук тела и картиной рассеяния звука (то есть, звукоотражающими свойствами тела). Рассмотрение более сложной структуры рассеивающего акустические волны тела сопровождается влиянием на картину рассеяния большего числа параметров, в связи с чем задача и алгоритм её решения заметно усложняются.

Исследование рассеяния звука на линейно упругих телах с различной внутренней структурой – это важная и актуальная тема. Представляющая большой интерес, данная тема рассматривалась во многих работах. Многие из последних посвящены задачам дифракции (рассеяния) акустических волновых полей на цилиндрических телах. Рассеяние акустических волновых полей на упругих радиально-неоднородных цилиндрах, расположенных в неограниченном пространстве, исследовалась, к примеру, в [1-3]. Некоторые работы [4-9] посвящены цилиндрам, неоднородным не полностью, а покрытым упругим

неоднородным слоем. В некоторых случаях – к примеру, как в работах [10-15] – цилиндры расположены в ограниченном пространстве. Работы [16-21] посвящены влиянию анизотропии тел на их свойства отражения звука в различных направлениях.

В данной задаче в качестве тела рассматривается бесконечный линейный цилиндр, внутренняя структура заключается в линейной упругости, радиальной неоднородности, трансверсальной изотропности и наличии жёсткого сердечника. Параметры, отражающие внутреннюю структуру рассматриваемого цилиндра – плотность, тензор упругости, соотношение радиусов упругого цилиндра и жёсткого сердечника. Плотность и компоненты тензора упругости являются функциями радиальной координаты, причём в обратной задаче данные функции считаются полиномами некоторого порядка.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАССЕЙННОГО ТЕЛА ПО ИЗВЕСТНЫМ ПАРАМЕТРАМ ТЕЛА

В работе рассматривается обратная задача дифракция, то есть, определение оптимальных параметров рассеивающего звук тела, которые обеспечат минимальное – в некотором смысле – отражение звука в различных направлениях.

1.1. Постановка задачи об определении рассеянной волны (прямая).

Рассматривается линейный круговой цилиндр (бесконечный в вертикальном направлении), радиус которого равен r_1 . Материал цилиндра – линейно упругий, трансверсально-изотропный и радиально-неоднородный. Плотность ρ цилиндра является непрерывной, а тензор модулей упругости Λ – непрерывно дифференцируемой функцией координаты r , выражающей расстояние от данной точки до оси цилиндра. Бесконечные цилиндрические поверхности являются поверхностями изотропии.

Тензор Λ , выражающий упругие свойства трансверсально-изотропного неоднородного слоя, может быть записан в соответствии с нотацией Фойгта [22] в матричной форме

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{rr}(r) & \lambda_{r\varphi}(r) & \lambda_{r\varphi}(r) & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{r\varphi}(r) & \lambda_{\varphi\varphi}(r) & \lambda_{\varphi z}(r) & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{r\varphi}(r) & \lambda_{\varphi z}(r) & \lambda_{\varphi\varphi}(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_{\varphi\varphi}(r) - \lambda_{\varphi z}(r)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_0(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_0(r) \end{pmatrix},$$

где λ_{rr} , $\lambda_{\varphi\varphi}$, $\lambda_{r\varphi}$, $\lambda_{\varphi z}$, λ_0 – независимые модули упругости (индексы выбраны условно для удобства записи). В дальнейшем в данной работе будем записывать модули упругости без аргумента, при отсутствии такой необходимости, подразумевая при этом их зависимость от r .

Внутри цилиндра расположен абсолютно твёрдый цилиндрический сердечник радиуса r_0 , имеющий ту же ось, что и внешний цилиндр. Упругий цилиндр с абсолютно твёрдым включением окружён идеальной жидкостью,

заполняющей всё внешнее пространство. Плотность идеальной жидкости равна ρ_i , скоростью звука данной жидкости равна c_i .

Приведём информацию о системах координат, используемых в задаче. В качестве базовой вводится прямоугольная декартова система координат $Oxyz$. Ось Oz совпадает с осью вращения цилиндра. Также, помимо декартовой, используется цилиндрическая система координат r, φ, z , которая связана с базовой системой координат x, y, z следующими выражениями

$$x = r \cos(\varphi), \quad y = r \sin(\varphi), \quad z = z.$$

В жидкости, заполняющей пространство, распространяется цилиндрическая звуковая волна, имеющая потенциал смещения

$$\Psi_0 = AH_0(kR)e^{-i\omega t}, \quad (1)$$

где A – амплитуда волны; $k = \frac{\omega}{c_i}$ – волновое число акустического поля

в жидкости; ω – циклическая частота колебаний в жидкости; H_m – цилиндрическая функция Ханкеля 1-ого рода порядка m (в данном случае $m = 0$); t – время; R – расстояние от данной точки до источника цилиндрических волн. Источник является линейным, параллельным оси цилиндра, и расположен в координатах $r = r_i, \varphi = 0$. Связь между координатами r и R выражается формулой

$$R = \left(r^2 + r_i^2 - 2rr_i \cos(\varphi) \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2)$$

Падающая волна является гармонической. Следовательно, после перехода колебаний в установившийся режим параметры движения (потенциалы смещения и скоростей, давление, компоненты тензора деформаций и компоненты тензора напряжений) имеют зависимости от времени вида $e^{-i\omega t}$. Так как уравнения, описывающие движение, являются линейными однородными, то временной множитель $e^{-i\omega t}$ будем в дальнейшем опускать.

Волна (1), взаимодействуя с цилиндрическим препятствием, искажается, образуя рассеянную волну. Требуется определить потенциал смещений Ψ_s рассеянного волнового поля.

Геометрическая схема поставленной задачи представлена на рис.1.

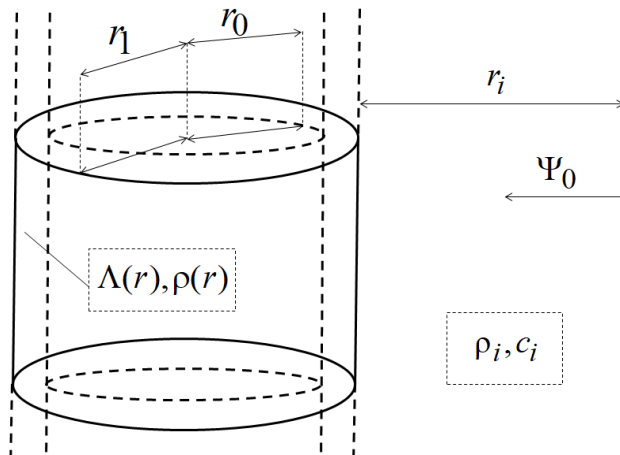


Рис.1. Геометрическая схема задачи.

1.2. Формулы падающей и рассеянной волны в идеальной жидкости.

Представляя (1) в виде разложения в ряд по цилиндрическим функциям Бесселя [23] и используя (2), получаем формулу падающей волны в виде бесконечной суммы

$$\Psi_0 = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} A e^{im\varphi} J_m(kr) H_m(kr_i), & r \leq r_i \\ \sum_{m=0}^{\infty} A e^{im\varphi} H_m(kr) J_m(kr_i), & r \geq r_i \end{cases}, \tag{3}$$

где J_m – функция Бесселя порядка m .

Волна Ψ в идеальной жидкости, возникающая после рассеяния падающей волны (4) на цилиндре, является решением уравнения Гельмгольца

$$\Delta\Psi + k_0^2\Psi = 0.$$

Рассеянная волна $\Psi_s = \Psi - \Psi_0$ также есть решение уравнения Гельмгольца. Решение данного уравнения методом разделения переменных с учётом условия излучения на бесконечности позволяет получить представление Ψ_s в виде бесконечной суммы

$$\Psi_s = \sum_{m=0}^{\infty} A_m H_m(kr) e^{im\varphi}, \tag{4}$$

где A_m – коэффициенты, подлежащие определению.

1.3. Формула рассеянной волны в идеальной жидкости.

Распространение упругих волн в неоднородном анизотропном цилиндрическом слое описывается общими уравнениями движения сплошной среды [24], в цилиндрической системе координат в случае гармонических колебаний записываемыми в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} + \omega^2\rho u_r &= 0, \\ \frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{2\sigma_{r\varphi}}{r} + \omega^2\rho u_\varphi &= 0, \end{aligned} \tag{5}$$

где u_i – компоненты вектора смещений \bar{u} ; σ_{ij} – компоненты тензора напряжений σ . Выражение тензора напряжений через тензор деформаций, а того, в свою очередь, через вектор смещений позволяет представить систему (5) в виде уравнений относительно неизвестных компонент вектора смещения \bar{u}

$$\begin{aligned} \lambda_{rr} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{\lambda_0}{2r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial\varphi^2} + \frac{\lambda_0 + 2\lambda_{r\varphi}}{2r} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r \partial\varphi} + \left(\lambda'_{rr} + \frac{\lambda_{rr}}{r} \right) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \\ + \left(\frac{\lambda'_{r\varphi}}{r} - \frac{\lambda_0 + 2\lambda_{\varphi\varphi}}{2r^2} \right) \frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} + \left(\frac{\lambda'_{r\varphi}}{r} - \frac{\lambda_{\varphi\varphi}}{r^2} \right) u_r + \omega^2\rho u_r &= 0, \\ \frac{\lambda_0}{2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\lambda_{\varphi\varphi}}{r^2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial\varphi^2} + \frac{\lambda_0 + 2\lambda_{r\varphi}}{2r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial\varphi} + \left(\frac{\lambda_0}{2r^2} + \frac{\lambda_{\varphi\varphi}}{r^2} + \frac{\lambda'_0}{2r} \right) \frac{\partial u_r}{\partial\varphi} + \\ + \left(\frac{\lambda_0}{2r} + \frac{\lambda'_0}{2} \right) \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \left(\frac{\lambda_0}{2r^2} + \frac{\lambda'_0}{2r} \right) u_\varphi + \omega^2\rho u_\varphi &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

В формуле (6) использованы следующие обозначения для производных компонент тензора упругости

$$\lambda'_{rr} = \frac{d(\lambda_{rr})}{dr}, \quad \lambda'_{r\varphi} = \frac{d(\lambda_{r\varphi})}{dr}, \quad \lambda'_0 = \frac{d(\lambda_0)}{dr}.$$

Компоненты вектора смещений \bar{u} , являющиеся периодическими функциями координаты φ , будем искать в виде рядов Фурье

$$\begin{aligned} u_r &= \sum_{m=0}^{\infty} U_{rm}(r) e^{im\varphi}, \\ u_\varphi &= \sum_{m=0}^{\infty} U_{\varphi m}(r) e^{im\varphi}, \end{aligned} \quad (7)$$

Подставляя представления компонент смещения (7) в систему уравнений (6), получим для каждого $m = 0, 1, 2, \dots$ систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных $U_{rm}(r)$, $U_{\varphi m}(r)$

$$\begin{aligned} 2r^2 \lambda_{rr} U''_{rm}(r) + 2r(\lambda'_{rr} r + \lambda_{rr}) U'_{rm}(r) + mr(2\lambda_{r\varphi} + \lambda_0) U'_{\varphi m}(r) + \\ + (2\omega^2 r^2 \rho - 2\lambda_{\varphi\varphi} - m^2 \lambda_0) U_{rm}(r) + \\ + m(2\lambda'_{r\varphi} r - 2\lambda_{\varphi\varphi} - \lambda_0) U_{\varphi m}(r) = 0, \\ 2r^2 \lambda_0 U''_{\varphi m}(r) - 2m(2\lambda_{r\varphi} + \lambda_0) r U'_{rm}(r) + 2r(\lambda_0 + \lambda'_0 r) U'_{\varphi m}(r) + \\ + (4\omega^2 r^2 \rho - 4m^2 \lambda_{\varphi\varphi} - 2\lambda_0 - 2\lambda'_0 r) U_{\varphi m}(r) - \\ - 2m(2\lambda_{r\varphi} + \lambda_0 - \lambda'_0 r) U_{rm}(r) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнения (8) следует дополнить граничными условиями на внешней и внутренней границах упругого анизотропного цилиндра. На внешней границе $r = r_1$ должны выполняться условия: равенство смещений частиц жидкости и частиц анизотропного упругого слоя; равенство нормального напряжения упругого слоя и акустического давления жидкости; отсутствие касательного напряжения

$$\left. \frac{\partial \Psi_0}{\partial r} \right|_{r=r_1} + \left. \frac{\partial \Psi_s}{\partial r} \right|_{r=r_1} = u_r \Big|_{r=r_1}. \quad (9)$$

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_0}{\partial \varphi} \right) \Big|_{r=r_1} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_s}{\partial \varphi} \right) \Big|_{r=r_1} = u_\varphi \Big|_{r=r_1}. \quad (10)$$

$$\left(\omega^2 \rho_i \Psi_0 \right) \Big|_{r=r_1} + \left(\omega^2 \rho_i \Psi_s \right) \Big|_{r=r_1} = -\sigma_{rr} \Big|_{r=r_1}. \quad (11)$$

$$\sigma_{r\varphi} \Big|_{r=r_1} = 0. \quad (12)$$

Подставляя ряды (3), (4) и (7) в условие (9), получаем для каждого $m = 0, 1, 2, \dots$ равенство

$$A_m = \frac{U_{rm}(r_1) - AkH_m(kr_1)J'_m(kr_1)}{kH'_m(kr_1)}. \quad (13)$$

При подстановке формул (3)-(4) и (7) в условия (10)-(12) последние преобразуются в краевые условия для уравнений (8). Оставшиеся краевые условия для данных дифференциальных уравнений получаются из отсутствия смещений на внутренней границе внешнего цилиндра

$$U_{rm}(r_0) = 0, \quad (14)$$

$$U_{\varphi m}(r_0) = 0. \quad (15)$$

Таким образом, условия (10)-(12) и (14)-(15) представляют собой граничные условия. Данным условиям должно удовлетворять решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (8). Построенная краевая задача может быть решена каким-либо аналитическим или численным методом. В программе, использованной для численных исследований в данной работе, применялся метод сеток. Решив её, определяем поле смещений в упругом неоднородном анизотропном цилиндре, и, в частности, значения $U_{\varphi m}(r_1)$. Используя данные значения, вычисляем коэффициенты A_m по формуле (13). Подставляя данные значения в формулу (4), получаем аналитическое описание рассеянного волнового поля. В программной реализации решения задачи (в численных исследованиях данной работы) учитывается 15 членов ряда. Заметим, что всё решение задачи вплоть до построения краевой задачи является аналитическим. Вообще говоря, в зависимости от метода решения краевой задачи (12), (16), (18), (20) и (21) решение рассматриваемой задачи дифракции является приближённым аналитическим или численным. В используемой программной реализации решение является численным из-за использования метода сеток.

В дальней зоне – $kr \gg 1$ – возможно свести (4) к асимптотическому виду

$$\Psi_s = e^{i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)} \sqrt{\frac{r_1}{2r}} F(\varphi),$$

$$F(\varphi) = \sqrt{\frac{2}{\pi k r_1}} \sum_{m=0}^{\infty} (-i)^m A_m \cos(m\varphi). \quad (16)$$

Выражение (16) – амплитуда рассеяния волны, которая выражает интенсивность рассеяния волны на цилиндре в определённом направлении от него.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ЦИЛИНДРА С ПОМОЩЬЮ ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА

Далее рассматривается обратная задача дифракции. Описанный выше алгоритм решения прямой задачи дифракции многократно используется при решении обратной.

2.1. Определение используемых функционалов.

В постановке задачи указано, что требуется определить законы неоднородности $\rho(r)$, $\lambda_{rr}(r)$, $\lambda_{\varphi\varphi}(r)$, $\lambda_{r\varphi}(r)$, $\lambda_{\varphi z}(r)$ материала слоя, при которых рассеивающая способность цилиндра с покрытием будет – в некотором смысле – минимальной. Рассеивающая способность тела в данной работе характеризуется с помощью функционалов, построенных специальным образом. Функциональные зависимости $\rho(r)$, $\lambda_{rr}(r)$, $\lambda_{\varphi\varphi}(r)$, $\lambda_{r\varphi}(r)$, $\lambda_{\varphi z}(r)$, $\lambda_0(r)$ будем считать аппроксимированными многочленами некоторой степени N относительно переменной r .

Функционал F_1 выражает усреднённую интенсивность рассеяния акустических волн в некотором угловом интервале $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ при фиксированной частоте $\omega = \omega^*$ усреднённую

$$F_1 = \frac{1}{\varphi_2 - \varphi_1} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} |F(\varphi, \omega^*)|^2 d\varphi. \quad (17)$$

Функционал F_2 выражает усреднённую интенсивность рассеяния акустических волн в заданном диапазоне частот $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ при фиксированном угле наблюдения $\varphi = \varphi^*$

$$F_2 = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_{\omega_1}^{\omega_2} |F(\varphi^*, \omega)|^2 d\omega. \quad (18)$$

Функционал F_3 выражает усреднённую интенсивность рассеяния акустических волн в некоторых угловом и частотном диапазонах: $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$, $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$

$$F_3 = \frac{1}{(\varphi_2 - \varphi_1)(\omega_2 - \omega_1)} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\omega_1}^{\omega_2} |F(\varphi, \omega)|^2 d\varphi d\omega. \quad (19)$$

Требуется для какого-либо выбранного из функционалов F_1, F_2, F_3 определить коэффициенты полиномиальных функций $\rho(r), \lambda_{rr}(r), \lambda_{\varphi\varphi}(r), \lambda_{r\varphi}(r), \lambda_{\varphi z}(r), \lambda_0(r)$, при которых он достигает своё минимальное значение.

2.2. Представление элементов решения задачи в генетическом алгоритме.

Обозначим символом F любой произвольный функционал из F_1, F_2, F_3 . Символом $\chi(r)$ обозначим любой из полиномов $\rho(r), \lambda_{rr}(r), \lambda_{\varphi\varphi}(r), \lambda_{r\varphi}(r), \lambda_{\varphi z}(r), \lambda_0(r)$. Параметр $\chi(r)$ слоя представляется в виде

$$\chi(r) = \hat{\chi} \cdot \chi^*(r), \quad (20)$$

где $\hat{\chi}$ – характерные величины свойств материала покрытия, а функции

$$\chi^*(r) = \sum_{n=0}^N \chi^{(n)} r^n, \quad (21)$$

Задача сводится к определению коэффициентов $\chi^{(n)}$ для каждой из функций $\rho(r), \lambda_{rr}(r), \lambda_{\varphi\varphi}(r), \lambda_{r\varphi}(r), \lambda_{\varphi z}(r), \lambda_0(r)$. Для определения данных коэффициентов используется генетический алгоритм [25]. Для функций вида (21) вводятся ограничения

$$\eta_1 \leq \chi^*(r) \leq \eta_2, \quad r \in [r_0, r_1], \quad (22)$$

где η_1, η_2 – некоторые заданные положительные константы. Функцию $\chi^*(r)$, которая удовлетворяет ограничениям (22), будем условно в дальнейшем называть правильной. В генетическом алгоритме правильные функции необходимо закодировать в двоичном виде. Опишем принцип кодирования.

Выберем на отрезке $[r_0, r_1]$ точки в количестве $N + 1$, определяемые как

$$r_{0n} = r_0 + \frac{(r_1 - r_0)n}{N}, \quad n = 0, \dots, N,$$

Обозначив $\chi(r_{0n}) = \chi_n$, можем вычислить коэффициенты $\chi^{(n)}$ из системы линейных алгебраических уравнений

$$RK = g, \quad K = R^{-1}g,$$

где

$$K = \begin{pmatrix} \chi^{(0)} \\ \chi^{(1)} \\ \dots \\ \chi^{(N)} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & r_{00} & \dots & r_{00}^N \\ 1 & r_{01} & \dots & r_{01}^N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & r_{0N} & \dots & r_{0N}^N \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} \chi_0 \\ \chi_1 \\ \dots \\ \chi_N \end{pmatrix}.$$

Даже в том случае выполнения $\chi_n \in [\eta_1, \eta_2]$, значения функции $\chi^*(r)$ всё равно могут выходить за пределы отрезка $[\eta_1, \eta_2]$, из чего следует нарушение ограничения (22). Соответствующие наборы коэффициентов $\chi^{(n)}$ следует исключать из рассмотрения. Для выяснения того, является ли функция $\chi^*(r)$ правильной или нет, следует выполнить анализ стационарные точки функции $\chi^*(r)$, лежащие на отрезке $[r_0, r_1]$, на соответствие ограничению (22). Если значение $\chi^*(r)$ хотя бы в одной из таких точек лежит за пределами $[\eta_1, \eta_2]$, то функция не является правильной. Каждое из значений χ_n представляется в виде

$$\chi_n = \eta_1 + M_n \cdot \frac{\eta_2 - \eta_1}{2^q - 1}, \quad (23)$$

где M_n – целое неотрицательное число, q – разрядность числа M_n в двоичной системе счисления, представляемое в виде двоичного q –разрядного числа. Числа χ_n , определяемые представлением (23), лежат в отрезке $[\eta_1, \eta_2]$ при любом M_n . Двоичное представление чисел M_n есть представление функции $\chi^*(r)$ в генетическом алгоритме.

2.3. Описание генетического алгоритма.

Каждое из двоичных представлений отдельного числа M_n носит название гена. Параметр q одинаков для всех генов, участвующих в алгоритме. Последовательность $N+1$ генов, представляющих функцию $\chi^*(r)$ – хромосома. Конфигурация (особь) есть совокупность 6 хромосом, соответствующих $\rho(r)$, $\lambda_{rr}(r)$, $\lambda_{\varphi\varphi}(r)$, $\lambda_{r\varphi}(r)$, $\lambda_{\varphi z}(r)$, $\lambda_0(r)$. Конфигурация называется правильной, если все входящие в неё функции являются правильными. Выполнение генетического алгоритма состоит в рассмотрении набора особей, изменяемого на каждой итерации. Состояние набора особей в конкретной итерации носит название поколения. Итерация генетического алгоритма включает следующие этапы:

Этап 1. Генерация начального поколения V (шаг только для первой итерации), которая заключается в случайном задании N_0 особей (конфигураций).

Этап 2. Вычисление значения функции приспособленности для каждой конфигурации в текущем поколении. Если F – значение функционала для данной конфигурации, то функция приспособленности для него вычисляется как $P = L - F$, где L – параметр генетического алгоритма, задаваемый экспериментально таким образом, чтобы значение P было положительно при

всех правильных конфигурациях. Наивысшее среди всех значений P для данного поколения обозначим P_{\max} .

Этап 3. Происходит проверка изменения P_{\max} на протяжении последних поколений. Если на протяжении K поколений относительное улучшение значения P_{\max} не превышает числа δ (где K, δ – параметры алгоритма), то происходит остановка генетического алгоритма, и в качестве решения задачи берётся конфигурация из текущего поколения, приспособленность которой равна P_{\max} .

Этап 4. Формирование динамических наборов конфигураций для дальнейшего применения операторов скрещиваний и мутаций. N_1 особей из V , имеющих наибольшее значение функции приспособленности, формируют набор V_1 . N_2 конфигураций из V , не вошедших в V_1 , отбираются для формирования набора V_2 . Из оставшихся конфигураций (не вошедших в V_1 и V_2) формируется набор V_3 . Заметим, что $N_1 < N_0$ и $N_2 \leq N_0 - N_1$.

Этап 5. Для N_3 пар конфигураций выполняется скрещивание. Каждая пара выбирается случайным образом из $(V_1 \cup V_2)^2$, причём конфигурация не может скрещиваться сама с собой, равно как конфигурация не может участвовать в двух скрещиваниях в одной итерации алгоритма. Конфигурации, полученные в результате скрещивания, формируют новое множество V_4 (они называются потомками). Конфигурации из V_2 , участвовавшие в скрещивании, исключаются из данного множества. Количество потомков, создаваемых при каждом скрещивании, равно количеству участвующих в нём особей из V_2 : это обеспечивает постоянство числа особей в поколении, так как набор V_1 переходит в следующее поколение.

Процесс скрещивания следующий: хромосомы потомков формируются из хромосом данных конфигураций таким образом, чтобы часть генов каждой хромосомы была получена от одной исходной конфигурации, часть – от другой. Для этого в каждой хромосоме случайным образом задаётся точка скрещивания таким образом, чтобы обменивающиеся участки хромосом состояли из целого числа генов. Гены до точки скрещивания потомок получает от первой исходной конфигурации, после точки скрещивания – от второй. Если формируется второй потомок, то исходные конфигурации меняются ролями.

Этап 6. Для случайно выбранных конфигураций из V_3 выполняются мутации. В гене, подвергаемом мутации, инвертируется двоичный код. Число особей, их хромосом и генов, подвергаемых мутации, определяется случайным образом.

Этап 7. Новое поколение для следующей итерации формируется как объединение множеств $V := V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$, после чего происходит переход к шагу 2.

К параметрам, отвечающих за работу генетического алгоритма и определяемым перед началом его работы, относятся: степень полиномов N ; разрядность гена q ; константа для построения функции приспособленности L ; пороговое относительное улучшение значения функции приспособленности δ ;

число поколений для контроля условия остановки K ; число конфигураций в популяции N_0 ; число отбираемых конфигураций с наивысшей приспособленностью N_1 ; число конфигураций, отбираемых в набор для участия в скрещивании N_2 ; число отбираемых пар для скрещивания N_3 . Также к параметрам генетического алгоритма можно отнести пары чисел $\{\eta_1, \eta_2\}$.

Общее количество использования решения прямой задачи в процессе использования генетического алгоритма не может быть заранее предсказано и определяется только после получения результата решения обратной задачи. Это связано, во-первых, со случайным характером некоторых этапов алгоритма; во-вторых, с этапом 3 алгоритма, на котором определяется необходимость остановки алгоритма или перехода к следующей итерации.

3. ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

По алгоритму, описанному выше, проведены численные расчёты законов неоднородности цилиндрического покрытия, обеспечивающие минимальное рассеяние звука. Следует заметить, что покрытие выполнено на основе материала, неоднородного по плотности. Приведём входные данные.

В численных исследованиях рассматривается упругий цилиндр с внешним радиусом $r_0 = 2$ м, толщина внешнего цилиндра (с учётом расположенного внутри твёрдого сердечника) равна $r_1 - r_0 = 1$ м. Источник цилиндрических волн расположен в координатах $r_i = 100$ м, $\varphi = 0$. Из всех параметров материала цилиндра, являющихся функциями координаты r , неизвестной (искомой) величиной в данном исследовании является плотность $\rho(r)$. Известна средняя по толщине плотность внешней части цилиндра, равная $\bar{\rho} = 1,5 \cdot 10^3$ кг/м³. Компоненты тензора упругости считаем известными: $\lambda_{rr} = 3,9 \cdot 10^9$ Н/м², $\lambda_{\varphi\varphi} = 4,9 \cdot 10^9$ Н/м², $\lambda_{r\varphi} = 3,9 \cdot 10^9$ Н/м², $\lambda_{\varphi r} = 3,9 \cdot 10^9$ Н/м², $\lambda_0 = 4,1 \cdot 10^9$ Н/м².

Упругий цилиндр окружён идеальной жидкостью с плотностью $\rho_i = 1000$ кг/м³, и скоростью звука $\rho_i = 1485$ м/с. Распространяющаяся в жидкости падающая волна характеризуется волновым числом $k = 2$ м⁻¹.

Далее приведём параметры генетического алгоритма, с помощью которого отыскивается оптимальная формула множителя $\rho^*(r)$. Минимальное и максимальное значения данной функции принимаются равными следующим числам: $\eta_1 = 0,3$, $\eta_2 = 1,3$. Функция $\rho^*(r)$ аппроксимируется полиномом степени $N = 3$. Разрядность гена $q = 8$. Константы для построения функции приспособленности $L = 10^{-3}$, $\delta = 10^{-3}$. Число поколений для контроля условия остановки $K = 15$. Число конфигураций в популяции равно $N_0 = 15$. Число отбираемых конфигураций с наивысшей приспособленностью равно $N_1 = 5$. Число конфигураций, отбираемых в набор для участия в скрещивании, принимается равным $N_2 = 5$. Число отбираемых пар для скрещивания выбирается равным $N_3 = 2$.

На рис.2 изображён график распределения функции плотности $\rho^*(r)$ во внешней части упругого цилиндра, обеспечивающей минимум функционала (17), для выше указанных входных данных и параметров генетического алгоритма.

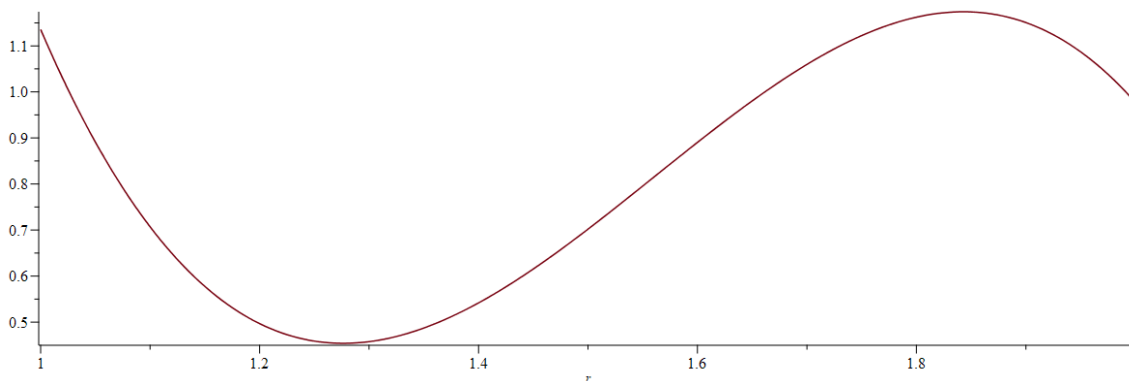


Рис.2. График оптимальной функции плотности.

Формула полученной оптимальной функции плотности

$$\rho^*(r) = -7,925r^3 + 37,083r^2 - 55,929r + 27,907,$$

Описанный в данной работе алгоритм позволяет определять распределение параметров материала в упругом неоднородном трансверсально-изотропном цилиндрическом теле, оптимальное для минимизации рассеяния звука.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ларин Н.В., Толоконников Л.А. Дифракция плоской звуковой волны на неоднородном термоупругом цилиндрическом слое, граничащем с невязкими теплопроводными жидкостями // Прикладная математика и механика. – 2009. – Т.73. – Вып.3. – С.474-483.
2. Толоконников Л.А., Романов А.Г. Дифракция цилиндрических звуковых волн на неоднородном полом цилиндре в вязкой жидкости // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. – 2008. – Вып.2. – С.151-160.
3. Ларин Н.В. Дифракция плоской звуковой волны на термоупругом цилиндре с непрерывно-неоднородным покрытием // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2017. – Вып.6. – С.154-173.
4. Ларин Н.В. О влиянии непрерывно-неоднородного покрытия на звукоотражающие свойства термоупругого цилиндра // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2017. – Вып.9. – Ч.1. – С.395-403.
5. Ларин Н.В., Толоконников Л.А. Рассеяние плоской звуковой волны упругим цилиндром с дискретно-слоистым покрытием // Прикладная математика и механика. – 2015. – Т.79. – Вып.2. – С.242-250.
6. Романов А.Г., Толоконников Л.А. Рассеяние звуковых волн цилиндром с неоднородным упругим покрытием // Прикладная математика и механика. – 2011. – Т.75. – Вып.5. – С.850-857.

7. Толоконников Л.А. *Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием* // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. – 2013. – Вып.2-2. – С.256-274.
8. Толоконников Л.А., Ларин Н.В., Скобельцын С.А. *Моделирование неоднородного покрытия упругого цилиндра с заданными звукоотражающими свойствами* // Прикладная математика и техническая физика. – 2017. – Т.58. – №.4. – С.189-199.
9. Толоконников Л.А., Ларин Н.В. *О рассеянии звуковых волн цилиндром с неоднородным упругим покрытием, находящимся в плоском волноводе с идеальными границами* // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2019. – Вып.9. – С.236-244.
10. Толоконников Л.А., Ларин Н.В. *Математическое моделирование неоднородного покрытия упругого цилиндра, находящегося в плоском волноводе* // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2018. – Вып.9. – С.315-323.
11. Толоконников Л.А. *Дифракция звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным покрытием в плоском волноводе с абсолютно жесткими границами* // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. – 2015. – Вып.2. – С.76-83.
12. Толоконников Л.А. *Дифракция звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным покрытием в плоском волноводе акустически мягкими границами* // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. – 2015. – Вып.1. – С.43-53.
13. Толоконников Л.А. *Рассеяние звуковых волн цилиндром с радиально-неоднородным упругим покрытием в плоском волноводе* // Чебышевский сборник. – 2019. – Т.20. – Вып.1. – С.270-281.
14. Толоконников Л.А. *Дифракция плоской звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, находящемся вблизи плоской поверхности* // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2018. – Вып.9. – С.276-289.
15. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. *A slightly inhomogeneous surface wave in a two-layered medium involving an isotropic layer and weakly anisotropic half-space* // J. Acoust. Soc. Amer. – 1993. – Vol.94. – No.6. – Pp.3295-3301.
16. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. *Application of weakly anisotropic models of a continuous medium for solving the problems of wave dynamics* // Applied Mechanics Reviews. – 2000. – Vol.53. – No3. – Pp.37-85.
17. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. *Conversion of sh wave into a stoneley wave under weak distortion of a crystal lattice of the elastic isotropic space material* // J. Acoust. Soc. Amer. – 1995. – Vol.97. – No.5. – Pp.2826-2835.
18. Скобельцын С.А., Толоконников Л.А. *Прохождение звуковых волн через трансверсально-изотропный неоднородный плоский слой* // Акустический журнал. – 1990. – Т.36. – №4. – С.740-744.
19. Скобельцын С.А., Толоконников Л.А. *Рассеяние звуковых волн трансверсально-изотропным неоднородным цилиндрическим слоем* // Акустический журнал. – 1995. – Т.41. – №1. – С.134-138.
20. Толоконников Л.А. *Дифракция звуковых волн на неоднородном анизотропном полом цилиндре* // Оборонная техника. – 1998. – №4-5. – С.11-14.
21. Федоров Ф.И. *Теория упругих волн в кристаллах*. – М.: Наука, 1965. – 388 с.

22. Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики*. – М.: Наука, 1966. – 724 с.
23. Новацкий В. *Теория упругости. Т.2*. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
24. Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. *Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечёткие системы*. – М.: Горячая линия-Телеком, 2006. – 452 с.

REFERENCES

1. Larin N.V., Tolokonnikov L.A. *Difraktsiya ploskoj zvukovoj volny na neodnorodnom termouprugom tsilindricheskom sloe, granichashhem s nevyazkimi teploprovodnymi zhidkostyami [Diffraction of a plane sound wave by an inhomogeneous thermoelastic cylindrical layer bordering on inviscid heat-conducting liquids]*. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 2009, Vol.73, Iss.3. Pp.474-483.
2. Tolokonnikov L.A., Romanov A.G. *Difraktsiya tsilindricheskikh zvukovykh voln na neodnorodnom polom tsilindre v vyazkoj zhidkosti [Diffraction of cylindrical sound waves by an inhomogeneous hollow cylinder in a viscous liquid]*. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennye nauki*, 2008, Iss.2, Pp.151-160.
3. Larin N.V. *Difraktsiya ploskoj zvukovoj volny na termouprugom tsilindre s nepreryvno-neodnorodnym pokrytiem [Diffraction of a plane sound wave on a thermoelastic cylinder with a continuously inhomogeneous coating]*. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki*, 2017, Iss.6, Pp.154-173.
4. Larin N.V. *O vliyanii nepreryvno-neodnorodnogo pokrytiya na zvukootrazhayushhie svoystva termouprugogo tsilindra [On the influence of a continuously inhomogeneous coating on the sound-reflecting properties of a thermoelastic cylinder]*. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki*, 2017, Iss.9, Part 1, Pp.395-403.
5. Larin N.V., Tolokonnikov L.A. *Rasseyanie ploskoj zvukovoj volny uprugim tsilindrom s diskretno-sloistym pokrytiem [Scattering of a Plane Sound Wave by an Elastic Cylinder with a Discretely Layered Coating]*. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 2015, Vol.79, Iss.2, Pp.242-250.
6. Romanov A.G., Tolokonnikov L.A. *Rasseyanie zvukovykh voln tsilindrom s neodnorodnym uprugim pokrytiem [Scattering of sound waves by a cylinder with an inhomogeneous elastic coating]*. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 2011. Vol.75. Iss.5. Pp.850-857.
7. Tolokonnikov L.A. *Rasseyanie naklonno padayushhej ploskoj zvukovoj volny uprugim tsilindrom s neodnorodnym pokrytiem [Scattering of an obliquely incident plane sound wave by an elastic cylinder with an inhomogeneous coating]*. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennye nauki*, 2013, Iss.2-2, Pp.256-274.
8. Tolokonnikov L.A., Larin N.V., Skobeltsyn S.A. *Modelirovanie neodnorodnogo pokrytiya uprugogo tsilindra s zadannymi zvukootrazhayushhimi svoystvami [Modeling of an inhomogeneous coating of an elastic cylinder with given sound-reflecting properties]*. *Prikladnaya matematika i tekhnicheskaya fizika*, 2017, Vol.58, No.4, Pp.189-199.
9. Tolokonnikov L.A., Larin N.V. *O rasseyanii zvukovykh voln tsilindrom s neodnorodnym uprugim pokrytiem, nakhodyashhimsya v ploskom volnovode*

- s ideal'nymi granitsami [On the scattering of sound waves by a cylinder with an inhomogeneous elastic coating located in a plane waveguide with ideal boundaries]. Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki, 2019, Iss.9, Pp.236-244.*
10. Tolokonnikov L.A., Larin N.V. *Matematicheskoe modelirovanie neodnorodnogo pokrytiya uprugogo tsilindra, nakhodyashhegosya v ploskom volnovode [Mathematical modeling of an inhomogeneous coating of an elastic cylinder located in a plane waveguide]. Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki, 2018, Iss.9, Pp.315-323.*
 11. Tolokonnikov L.A. *Difraktsiya zvukovykh voln na uprugom tsilindre s neodnorodnym pokrytiem v ploskom volnovode s absolutno zhestkimi granitsami [Diffraction of sound waves by an elastic cylinder with an inhomogeneous coating in a flat waveguide with absolutely rigid boundaries]. Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennye nauki, 2015, Iss.2, Pp.76-83.*
 12. Tolokonnikov L.A. *Difraktsiya zvukovykh voln na uprugom tsilindre s neodnorodnym pokrytiem v ploskom volnovode akusticheski myagkimi granitsami [Diffraction of sound waves on an elastic cylinder with an inhomogeneous coating in a flat waveguide with acoustically soft boundaries]. Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennye nauki, 2015, Iss.1, Pp.43-53.*
 13. Tolokonnikov L.A. *Rasseyanie zvukovykh voln tsilindrom s radial'no-neodnorodnym uprugim pokrytiem v ploskom volnovode [Scattering of sound waves by a cylinder with a radially inhomogeneous elastic coating in a flat waveguide]. Chebyshevskij sbornik, 2019, Vol.20, Iss.1, Pp.270-281.*
 14. Tolokonnikov L.A. *Difraktsiya ploskoj zvukovoj volny na uprugom tsilindre s neodnorodnym pokrytiem, nakhodyashhemsya vblizi ploskoj poverkhnosti [Diffraction of a plane sound wave on an elastic cylinder with an inhomogeneous coating located near a flat surface]. Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki, 2018, Iss.9, Pp.276-289.*
 15. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. *A slightly inhomogeneous surface wave in a two-layered medium involving an isotropic layer and weakly anisotropic half-space. J. Acoust. soc. amer., 1993, Vol.94, No.6, Pp.3295-3301.*
 16. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. *Application of weakly anisotropic models of a continuous medium for solving the problems of wave dynamics. Applied Mechanics Reviews, 2000, Vol.53, No.3, Pp.37-85.*
 17. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. *Conversion of sh wave into a stoneley wave under weak distortion of a crystal lattice of the elastic isotropic space material. J. Acoust. soc. amer., 1995, Vol.97, No.5, Pp.2826-2835.*
 18. Skobeltsyn S.A., Tolokonnikov L.A. *Prokhozhenie zvukovykh voln cherez transversal'no-izotropnyj neodnorodnyj ploskij sloj [Transmission of sound waves through a transversally isotropic inhomogeneous flat layer]. Akusticheskij zhurnal, 1990, Vol.36, No.4, Pp.740-744.*
 19. Skobeltsyn S.A., Tolokonnikov L.A. *Rasseyanie zvukovykh voln transversal'no-izotropnym neodnorodnym tsilindricheskim sloem [Scattering of sound waves by a transversally isotropic inhomogeneous cylindrical layer]. Akusticheskij zhurnal, 1995, Vol.41, No.1, Pp.134-138.*
 20. Tolokonnikov L.A. *Difraktsiya zvukovykh voln na neodnorodnom anizotropnom polom tsilindre [Diffraction of sound waves by an inhomogeneous anisotropic hollow cylinder]. Oboronnyaya tekhnika, 1998, No.4-5, Pp.11-14.*

21. Fedorov F.I. *Teoriya uprugikh voln v kristallakh [Theory of elastic waves in crystals]*. Moskva, Nauka, 1965, 388 p.
22. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Uravneniya matematicheskoy fiziki [Equations of mathematical physics]*. Moskva, Nauka, 1966, 724 p.
23. Novatsky V. *Teoriya uprugosti. Tom 2 [Theory of elasticity. Vol.2]*. Moskva, Mir, 1975, 872 p.
24. Rutkovskaya D, Pilinsky M., Rutkovsky L. *Nejronnye seti, geneticheskie algoritmy i nechyotkie sistemy [Neural networks, genetic algorithms and fuzzy systems]*. Moskva, Goryachaya liniya-Telekom, 2006, 452 p.

Поступила в редакцию 16 марта 2022 года.

Сведения об авторе:

Белкин Антон Эдуардович – асп., Тульский государственный университет. г. Тула, Россия;
e-mail: antonedurd2020@mail.ru