

УДК 539.3
EDN OQLQDP (<https://elibrary.ru/oqlqdp>)



УСТОЙЧИВОСТЬ ЛЕЙНЕРА ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО КОМПОЗИТНОГО БАЛЛОНА ДАВЛЕНИЯ

Васильев В.В., Склезнев А.А.

АО «Центральный НИИ специального машиностроения», г. Хотьково, Россия

АННОТАЦИЯ

В работе рассматривается задача устойчивости внутренней герметизирующей оболочки (лейнера) композитного баллона давления, рассматриваемой как бесконечно длинная изотропная цилиндрическая оболочка, находящаяся в абсолютно жесткой среде, моделирующей композитный слой баллона и сжимающей оболочку так, что она может потерять устойчивость. С помощью уравнений нелинейной теории цилиндрических оболочек получено точное решение, определяющее критическое давление или предельную величину докритической деформации оболочки. Установлено, что критическое давление и деформация зависят от связи между внутренней изотропной и наружной композитной оболочками. Исследованы два предельных случая – оболочки, жестко связанные между собой, и оболочки, односторонне связанные только в радиальном направлении при отсутствии трения. Рассмотрены возможные промежуточные варианты – оболочки, связанные на части контура сечения. Уточнен полученный ранее результат, основанный на предположении о том, что форма потери устойчивости внутренней оболочки описывается нелинейными уравнениями теории пологих оболочек. Полученное решение сопоставляется с опубликованными экспериментальными результатами.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка; устойчивость оболочки при внешнем давлении; устойчивость оболочки при односторонних связях; композитные баллоны давления

LINER STABILITY OF A CYLINDRICAL COMPOSITE PRESSURE VESSEL

Vasiliev Valery V., Skleznev Andrey A.

Central Research Institute for Special Machinery, Khotkovo, Russia

ABSTRACT

The article considers the problem of stability of the inner sealing shell (liner) of a composite pressure cylinder, considered as an infinitely long isotropic cylindrical shell, located in an absolutely rigid environment, simulating the composite layer of the balloon and compressing the shell so that it can lose stability. Using the equations of the nonlinear theory of cylindrical shells, an exact solution is obtained that determines the critical pressure or the limiting value of the subcritical deformation of the shell. It has been established that the critical pressure and deformation depend on the connection between the inner isotropic and outer composite shells. Two limiting cases are studied – shells rigidly connected to each other, and shells unilaterally connected only in the radial direction in the absence of friction. Some possible intermediate variants are considered – shells connected on a part of the section contour. The result obtained earlier is refined, based on the assumption that the form of buckling of the inner shell is described

by nonlinear equations of the theory of shallow shells. The obtained solution is compared with the published experimental results.

Keywords: cylindrical shell; shell stability under external pressure; shell stability with unilateral constraints; composite pressure vessels

1. ВВЕДЕНИЕ

Композитные баллоны давления состоят, как правило, из двух слоев [1]. Внутренняя изотропная оболочка из металла или термопласта (лейнер), обеспечивает герметичность баллона и служит оправкой для намотки наружного композитного слоя, определяющего несущую способность баллона. Существенно, что при действии внутреннего давления композитный слой демонстрирует линейно-упругое поведение, а для материала лейнера характерно упругопластическое деформирование. При предварительном нагружении, которое проводится для подтверждения прочности изготовленного баллона, в материале лейнера образуются необратимые пластические деформации, приводящие при последующей разгрузке баллона к появлению в лейнере сжимающих напряжений. Эти напряжения могут вызвать потерю устойчивости лейнера, которая проявляется в отслоении лейнера от наружной композитной оболочки (рис.1). Сжимающие напряжения в лейнере образуются также при нагреве баллона, так его как коэффициент температурного расширения, как правило, больше, чем у композита.

Обзор исследований, посвященных рассматриваемой задаче, приведен в работе [2], где представлено решение, основанное на предположении о пологости отслоившегося участка оболочки (рис.1). В настоящей работе используются более полные нелинейные уравнения теории цилиндрических оболочек, которые учитывают изменения радиусов кривизны срединной поверхности оболочки и углы поворота нормали к срединной поверхности, образующиеся в процессе потери устойчивости [3]. В такой постановке получено точное в рамках принятых гипотез решение задачи.



Рис.1. Форма потери устойчивости внутренней оболочки из полипропилена (наружный слой – углепластик).

2. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В связи с тем, что композитный слой баллона является достаточно жестким, будем считать, что на участке, где сохраняется контакт между оболочками, двухслойная оболочка имеет круговую форму. Рассмотрим отслоившийся

деформированный участок оболочки, показанный на рис.1. Нелинейные уравнения, описывающие деформацию оболочки, имеют вид [3]

$$N' + Q(1 + \omega'_\alpha) = 0, \quad Q' - N(1 + \omega'_\alpha) = 0, \quad M' - RQ = 0, \quad (\cdot)' = \frac{d(\cdot)}{d\alpha}, \quad (2.1)$$

$$N = B\varepsilon_\alpha, \quad M = \frac{D}{R}\omega'_\alpha, \quad B = \bar{E}h, \quad D = \frac{1}{12}\bar{E}h^3, \quad \bar{E} = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad (2.2)$$

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{R}(u'_\alpha + w) + \frac{1}{2}\omega_\alpha^2, \quad \omega_\alpha = \frac{1}{R}(u_\alpha - w'). \quad (2.3)$$

Здесь N, Q, M – кольцевое усилие, поперечное усилие и изгибающий момент, положительные направления которых показаны на рис.2, u_α, w – кольцевое перемещение и прогиб, направленный по наружной нормали, ω_α – угол поворота нормали к поверхности оболочки. Уравнения (2.2) соответствуют бесконечно длинной цилиндрической оболочке. Для кольца в них следует принять $\nu = 0$.

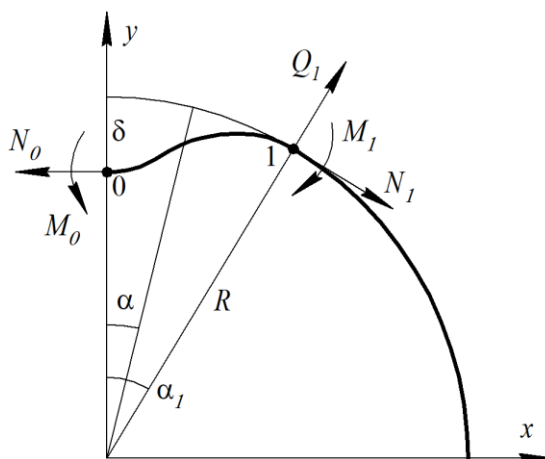


Рис.2. Силы и моменты, действующие на отслоившийся участок оболочки.

Уравнения (2.1) можно дополнить уравнениями равновесия участка 0-1 (рис.2) как твёрдого тела. Приравнявая нулю равнодействующие сил, действующих на этот участок, и суммарный момент относительно начала координат, получим

$$\begin{aligned} -N_0 + Q_1 \sin \alpha_1 + N_1 \cos \alpha_1 &= 0, & Q_1 \cos \alpha_1 - N_1 \sin \alpha_1 &= 0, \\ -N_0(R - \delta) + N_1R - M_0 + M_1 &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Рассмотрим равновесие внутренней оболочки, отделённой от наружной композитной (рис.3). Как уже отмечалось, на участке 1-2 оболочка сохраняет круговую форму, т.е. на этом участке на оболочку действует равномерное внешнее давление q , а в точке 2 действует только кольцевое усилие равное qR .

Решение этих уравнений совместно с уравнениями (2.4) даёт

$$N_0 = -\frac{qR}{\cos \alpha_1}, \quad N_1 = -qR, \quad Q_1 = -P_1 = -qR \tan \alpha_1, \quad M_1 = 0. \quad (2.5)$$

Преобразуем уравнения (2.1)-(2.3). Во-первых, будем считать контур поперечного сечения оболочки нерастяжимым. Тогда из первого равенства (2.3) имеем

$$u'_\alpha = -w - \frac{R}{2}\omega_\alpha^2. \quad (2.6)$$

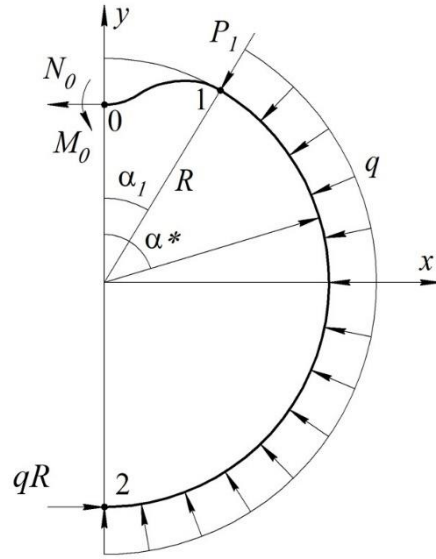


Рис.3. Условия нагружения внутренней оболочки.

Во-вторых, введём безразмерные переменные

$$\bar{N} = \frac{N}{qR}, \quad \bar{M} = \frac{M}{qR^2}, \quad \bar{u}_\alpha = \frac{u_\alpha}{R}, \quad \bar{w} = \frac{w}{R}, \quad \bar{Q} = \frac{Q}{qR}. \quad (2.7)$$

В результате, система уравнений (2.1)-(2.3) и равенства (2.5) принимают следующий вид

$$\bar{N}' + \bar{Q}(1 + \omega'_\alpha) = 0, \quad \bar{Q}' - \bar{N}(1 + \omega'_\alpha) = 0, \quad \bar{M}' = \bar{Q}, \quad (2.8)$$

$$\bar{M} = \frac{1}{12\lambda} \omega'_\alpha, \quad \omega'_\alpha = -\left(\bar{w} + \bar{w}'' + \frac{1}{2} \omega_\alpha^2 \right), \quad \lambda = \frac{qR^3}{Eh^3}, \quad (2.9)$$

$$\bar{N}_0 = -\frac{1}{\cos \alpha_1}, \quad \bar{N}_1 = -1, \quad \bar{Q}_1 = -\operatorname{tg} \alpha_1, \quad \bar{M}_1 = 0. \quad (2.10)$$

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ

Рассмотрим уравнения (2.8). Складывая первые два уравнения, получим $\bar{N}'\bar{N} + \bar{Q}'\bar{Q} = 0$. Интегрируя с учётом граничных условий в точке 0 ($\bar{N} = \bar{N}_0$, $\bar{Q} = 0$) и уравнений (2.10), имеем

$$\bar{N}^2 + \bar{Q}^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha_1}. \quad (3.1)$$

Удовлетворим это уравнение, введя новую функцию $\theta(\alpha)$ такую, что

$$\bar{N} = -\frac{\cos \theta}{\cos \alpha_1}, \quad \bar{Q} = -\frac{\sin \theta}{\cos \alpha_1}.$$

Учитывая равенства (2.10), можно установить пределы изменения функции $\theta(\alpha)$, то есть

$$\theta(\alpha = 0) = 0, \quad \theta(\alpha = \alpha_1) = \alpha_1. \quad (3.2)$$

Рассмотрим первое уравнение (2.8). Подставляя в него равенства (3.1) и выражая ω'_α через \bar{M} с помощью первого равенства (2.9), получим

$$\theta' - (1 + 12\lambda\bar{M}) = 0. \quad (3.3)$$

Из третьего уравнения (2.8) и второго равенства (3.1) имеем

$$\bar{M}' = \bar{Q} = -\frac{\sin \theta}{\cos \alpha_1}. \quad (3.4)$$

Дифференцируя уравнение (3.3) и исключая \bar{M}' с помощью равенства (3.4), придём к следующему уравнению

$$\theta'' + k^2 \sin \theta = 0, \quad k^2 = \frac{12\lambda}{\cos \alpha_1}. \quad (3.5)$$

Решение уравнения (3.5) выражается через эллиптические интегралы. Однако оно неудобно для дальнейшего анализа так как не позволяет получить явного выражения $\theta(\alpha)$. В связи с этим упростим это уравнение, считая, что угол α_1 много меньше π (рис.1,3). Учитывая равенства (3.2), можно заключить, что тогда можно считать, что угол θ также много меньше π , и использовать приближенное соотношение $\sin \theta \approx \theta$. В результате, уравнение (3.5) упрощается следующим образом

$$\theta'' + k^2 \theta = 0. \quad (3.6)$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее граничным условиям (3.2), имеет вид

$$\theta = \frac{\alpha_1 \sin k\alpha}{\sin \eta}, \quad \eta = k\alpha_1.$$

Подставляя решение (3.6) в равенство (3.3), найдём изгибающий момент

$$\bar{M} = \frac{1}{12\lambda} \left(\frac{\eta \cos k\alpha}{\sin \eta} - 1 \right). \quad (3.7)$$

Определим момент, действующий на концах участка 1-2 (рис.2). Имеем

$$\begin{aligned} \bar{M}_0 = \bar{M}(\alpha = 0) &= \frac{1}{12\lambda} \left(\frac{\eta}{\sin \eta} - 1 \right), \\ \bar{M}_1 = \bar{M}(\alpha = \alpha_1) &= \frac{1}{12\lambda} \left(\frac{\eta}{\operatorname{tg} \eta} - 1 \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Для дальнейшего анализа введём вместо давления величину докритической кольцевой деформации оболочки, которая связана с давлением следующим образом $\varepsilon = qR/\bar{E}h$. Используя полученное выражение для преобразования параметра λ через деформацию, получим

$$\lambda = \varepsilon \left(\frac{R}{h} \right)^2. \quad (3.9)$$

Воспользуемся равенствами (2.9), (3.5), (3.6) и (3.9) и запишем развёрнутое выражение для параметра η то есть

$$\eta = 2\alpha_1 \sqrt{\frac{3\lambda}{\cos \alpha_1}} = 2\alpha_1 \frac{R}{h} \sqrt{\frac{3qR}{\bar{E}h \cos \alpha_1}} = 2\alpha_1 \frac{R}{h} \sqrt{\frac{3\varepsilon}{\cos \alpha_1}}. \quad (3.10)$$

Отсюда следует, что параметры η и λ являются параметрами нагружения. Рассмотрим первое соотношение (3.8). При малых значениях параметра η имеем $\sin \eta > 0$ и $\bar{M}_0 > 0$. При таком моменте оболочка изгибается наружу, что не соответствует условиям её закрепления. Как следует из рис.2, для того, чтобы

оболочка изгибалась внутрь, необходимо, чтобы выполнялось условие $\bar{M}_0 < 0$. Для этого в первом равенстве (3.8) должно быть $\sin \eta < 0$, что возможно, если нагрузка достигает значения, при котором $\pi < \eta < 2\pi$. Конкретное значение η следует из второго равенства (3.8). Согласно соответствующему уравнению (2.10), $\bar{M}_1 = 0$. В результате, получим следующее уравнение для η

$$\operatorname{tg} \eta = \eta. \quad (3.11)$$

Заметим, что при этом условии $d\bar{M}_0/d\eta = 0$, то есть если параметр η удовлетворяет уравнению (3.11), то момент \bar{M}_0 принимает минимальное абсолютное значение. Минимальный ненулевой корень уравнения (3.11) – $\eta = 4.4892$.

Определим прогиб оболочки. Из равенств (2.9) и (3.7) имеем

$$\omega'_\alpha = 12\lambda\bar{M} = \frac{\eta \cos k\alpha}{\sin \eta} - 1. \quad (3.12)$$

Угол поворота должен удовлетворять граничному условию (рис.2): $\omega_\alpha(\alpha = 0) = 0$. Интегрируя равенство (3.12) с учётом этого условия и равенства (3.6) для η , получим

$$\omega_\alpha = \frac{\alpha_1 \sin k\alpha}{\sin k\alpha_1} - \alpha.$$

Отсюда следует, что $\omega_\alpha(\alpha = \alpha_1) = 0$, то есть угол поворота равен нулю в точках 1 и 2 (рис.2). Из второго уравнения (2.9) получим

$$\bar{w} + \bar{w}'' = -\left(\omega'_\alpha + \frac{1}{2}\omega_\alpha^2\right), \quad (3.13)$$

где ω'_α определяется равенством

$$\omega'_\alpha = 12\lambda\bar{M} = \frac{\eta \cos k\alpha}{\sin \eta} - 1. \quad (3.14)$$

Решение уравнения (3.13), симметричное по координате α (рис.2), имеет вид

$$\bar{w} = \bar{w}_0 \cos \alpha + \cos \alpha \int_0^\alpha \left(\omega'_\alpha + \frac{1}{2}\omega_\alpha^2\right) \sin \alpha d\alpha - \sin \alpha \int_0^\alpha \left(\omega'_\alpha + \frac{1}{2}\omega_\alpha^2\right) \cos \alpha d\alpha. \quad (3.15)$$

Здесь $\bar{w}_0 = \bar{w}(\alpha = 0)$ определяет максимальный прогиб оболочки, который находится из условия $\bar{w}(\alpha = \alpha_1) = 0$ (рис.2). В результате получим

$$\bar{w}_0 = \tan \alpha_1 \int_0^{\alpha_1} \left(\omega'_\alpha + \frac{1}{2}\omega_\alpha^2\right) \cos \alpha d\alpha - \int_0^{\alpha_1} \left(\omega'_\alpha + \frac{1}{2}\omega_\alpha^2\right) \sin \alpha d\alpha. \quad (3.16)$$

Подставляя выражение (3.14) в равенства (3.15) и (3.16) и интегрируя, окончательно найдём

$$\bar{w} = \frac{\bar{w}_0 \cos \alpha + \frac{f(\alpha)}{\sin^2 \eta}}{4\left(\frac{\eta}{\alpha_1}\right)^6 - 9\left(\frac{\eta}{\alpha_1}\right)^4 + 6\left(\frac{\eta}{\alpha_1}\right)^2 - 1}, \quad \bar{w}_0 = 2c, \quad (3.17)$$

где

$$\begin{aligned}
 f(\alpha) &= 4\eta \sin \eta \cos \frac{\eta\alpha}{\alpha_1} \left(\left[\frac{\eta}{\alpha_1} \right]^2 - \frac{1}{4} \right) \left(\left[\frac{\eta}{\alpha_1} \right]^2 - 5 \right) - \frac{\alpha_1^2}{2} \left(\left[\frac{\eta}{\alpha_1} \right]^2 - 1 \right)^2 \cos \frac{2\eta\alpha}{\alpha_1} - \\
 &- 8\alpha\alpha_1 \sin \eta \sin \frac{\eta\alpha}{\alpha_1} \left(\left[\frac{\eta}{\alpha_1} \right]^2 - 1 \right) \left(\left[\frac{\eta}{\alpha_1} \right]^2 - \frac{1}{2} \right) + \\
 &+ \cos \alpha \left[\eta \sin \eta \left(21 \left[\frac{\eta}{\alpha_1} \right]^2 - 4 \left[\frac{\eta}{\alpha_1} \right]^4 - 5 \right) + \right. \\
 &\left. + 2 \left(\left[\frac{\eta}{\alpha_1} \right]^2 - 1 \right)^2 \left\{ 5 \cos^2 \eta \left(2 \left[\frac{\eta}{\alpha_1} \right]^2 - \frac{1}{2} \right) + (\alpha_1^2 - 10) \left[\frac{\eta}{\alpha_1} \right]^2 + \frac{5}{2} \right\} \right] + \\
 &+ 8 \left\{ \cos^2 \eta \left(\alpha^2 - \frac{5}{2} \right) - \alpha^2 - \frac{\alpha_1^2}{4} + \frac{5}{2} \right\} \left(\left[\frac{\eta}{\alpha_1} \right]^2 - 1 \right)^2 \left(\left[\frac{\eta}{\alpha_1} \right]^2 - \frac{1}{2} \right), \\
 c &= \frac{\alpha_1^2}{\cos \alpha_1} \left\{ \frac{\cos 2\eta}{4 \sin^2 \eta} \left(\left[\frac{\eta}{\alpha_1} \right]^2 - 1 \right)^2 + \left(4 \left[\frac{\eta}{\alpha_1} \right]^2 - 5 \right) \left[\frac{\eta}{\alpha_1} \right]^2 + 1 \right\} - \\
 &- \left[5 \left\{ \left(2 \left[\frac{\eta}{\alpha_1} \right]^2 - \frac{1}{2} \right) \cos^2 \eta + \frac{1}{2} + \frac{\eta^2}{5} - 2 \left[\frac{\eta}{\alpha_1} \right]^2 \right\} - \frac{\alpha_1^2 \cos^2 \eta}{\cos \alpha_1} \left(\left[\frac{\eta}{\alpha_1} \right]^2 - \frac{1}{4} \right) \right] \frac{\left(\left[\frac{\eta}{\alpha_1} \right]^2 - 1 \right)^2}{\sin^2 \eta}.
 \end{aligned}$$

Зависимости $\bar{w}(\alpha)$, соответствующие $\alpha_1 = 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ$ показаны на рис.4.

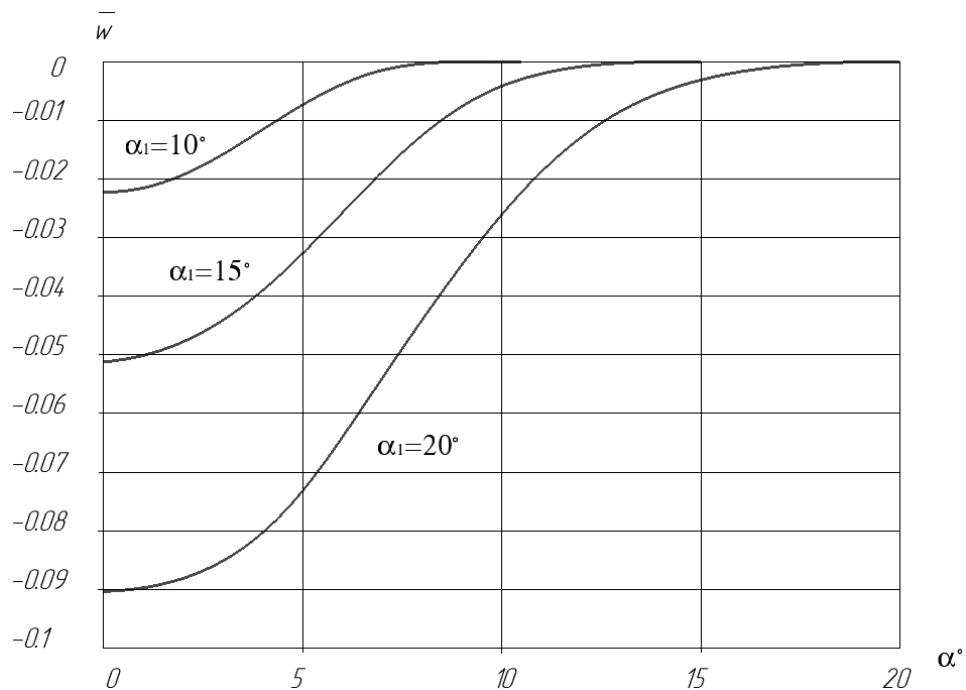


Рис.4. Прогиб оболочки при различных значениях угла α_1 .

Определим угол α_1 (рис.2). При потере устойчивости на участке 0-1 (рис.3) образуется прогиб оболочки, и точка 1 при принятом ранее условии нерастяжимости оболочки при этом смещается в кольцевом направлении на величину $u_\alpha^{(1)}$, которую можно определить, проинтегрировав уравнение (2.6).

Учитывая граничное условие $u_\alpha(\alpha = 0) = 0$, получим

$$u_\alpha^{(1)} = -R \int_0^{\alpha_1} \left(\bar{w} + \frac{1}{2} \omega_\alpha^2 \right) d\alpha. \quad (3.18)$$

Интегрируя выражение (3.18), найдём

$$u_\alpha^{(1)} = \frac{g(\alpha_1) \cdot R}{2\eta^2 \cos \alpha_1 \sin^2 \eta \sin^2 2\eta (\alpha_1^2 - 4\eta^2) (\alpha_1^2 - \eta^2)^2}, \quad (3.19)$$

где

$$g(\alpha_1) = \alpha_1^3 \eta (\alpha_1^2 - \eta^2)^2 \left\{ -\alpha_1 \eta \sin \alpha_1 \cos^2 2\eta + \left[\frac{3}{2} (\alpha_1^2 - 4\eta^2) \cos^2 \eta - 2\alpha_1^2 + 6\eta^2 \right] \cos \alpha_1 \sin 2\eta \right\} +$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} \left[\alpha_1^5 \eta \cos \alpha_1 \sin \eta \cos \eta (\alpha_1^2 - \eta^2)^2 + 5\eta^6 (2 - \alpha_1^2) + \right. \\ \left. + \alpha_1 (\alpha_1^2 - 4\eta^2) \left((\eta^4 (\alpha_1^2 - 10) (\eta^2 - 2\alpha_1^2) + \alpha_1^6 (\eta^2 - 2)) \cos^2 \eta \right) + \right. \\ \left. + 4\alpha_1^4 \eta \sin \eta \cos \eta (\eta^2 - 1) + 4\eta^4 \alpha_1^2 (\alpha_1^2 - 5) + 2\alpha_1^6 (1 - \eta^2) \right] \cos \alpha_1 + \\ \left. + 2\eta^2 \left[\left\{ 4(2\alpha_1^2 - 5)\eta^6 + 5\alpha_1^2 (9 - 2\alpha_1^2)\eta^4 + 2\alpha_1^4 (\alpha_1^2 - 15)\eta^2 + 5\alpha_1^6 \right\} \cos^2 \eta + \right. \right. \\ \left. \left. + \alpha_1^2 \eta (5\alpha_1^4 - 21\alpha_1^2 \eta^2 + 4\eta^4) \sin \eta \cos \eta + \right. \right. \\ \left. \left. + \left\{ 10(\alpha_1^2 - 2)\eta^4 + 5\alpha_1^2 (5 - \alpha_1^2)\eta^2 + \alpha_1^6 - 5\alpha_1^4 \right\} (\alpha_1^2 - \eta^2) \right] \sin \alpha_1 \right\} \cos 2\eta +$$

$$+ (\alpha_1^2 - 2\eta^2) \left\{ \begin{array}{l} \left[2(\alpha_1^6 - 10\eta^4 \alpha_1^2 + 5\eta^6) \cos^2 \eta + 2\alpha_1^4 \eta (\alpha_1^2 - \eta^2) \sin 2\eta + \right. \\ \left. + (\alpha_1^2 - 10)\eta^6 + 2\alpha_1^2 (10 - \alpha_1^2)\eta^4 + \alpha_1^6 (\eta^2 - 2) \right] \cos \alpha_1 - \\ \left[2\left\{ (5 - 2\alpha_1^2)\eta^4 + 2\alpha_1^2 (5 - \alpha_1^2)\eta^2 + 5\alpha_1^4 \right\} \cos^2 \eta + \right. \\ \left. + 2\eta \alpha_1^2 (5\alpha_1^2 - 2\eta^2) \sin \eta \cos \eta + \right. \\ \left. \left. + \left\{ 5(2 - \alpha_1^2)\eta^2 + (\alpha_1^2 - 10)\alpha_1^2 \right\} (\alpha_1^2 - \eta^2) \right] \sin \alpha_1 \right\} \end{array} \right.$$

Поскольку оболочка имеет предварительную деформацию сжатия ε , эта деформация релаксирует при потере устойчивости так, что $u_\alpha^{(1)} = \varepsilon l^*$. Здесь $l^* = R\alpha^*$ – длина по окружности, на которой происходит релаксация деформации (рис.3). Определить эту длину и соответствующий угол α^* не представляется возможным так как они зависят от величины накопленной в оболочке упругой энергии и силы трения между оболочкой и окружающей её средой. Однако возможны два предельных случая. Если оболочка жёстко связана со средой в кольцевом направлении, то проскальзывать может только её отслоившийся участок и $\alpha^* = \alpha_1$. Если трение между оболочкой и средой отсутствует, то проскальзывает вся оболочка и $\alpha^* = \pi$ (рис.3). Возможны также некоторые промежуточные варианты, для которых, например, $\alpha^* = \pi/4, \pi/2, 3\pi/4$. Таким образом, имеем

$$R\alpha^* \varepsilon = -u_\alpha^{(1)}.$$

Подставляя ε из равенства (3.9), найдем

$$\left(\frac{h}{R}\right)^2 = -\frac{u_\alpha^{(1)}}{\alpha^* \lambda R}. \tag{3.20}$$

Из первого равенства (3.10) имеем

$$\lambda = \frac{\eta^2 \cos \alpha_1}{12\alpha_1^2}. \tag{3.21}$$

Таким образом

$$\left(\frac{h}{R}\right)^2 = -\frac{12\alpha_1^2 u_\alpha^{(1)}}{R\eta^2 \alpha^* \cos \alpha_1}. \tag{3.22}$$

Это условие определяет зависимость α_1 от h/R , которая показана на рис.5 для случаев $\alpha^* = \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi$.

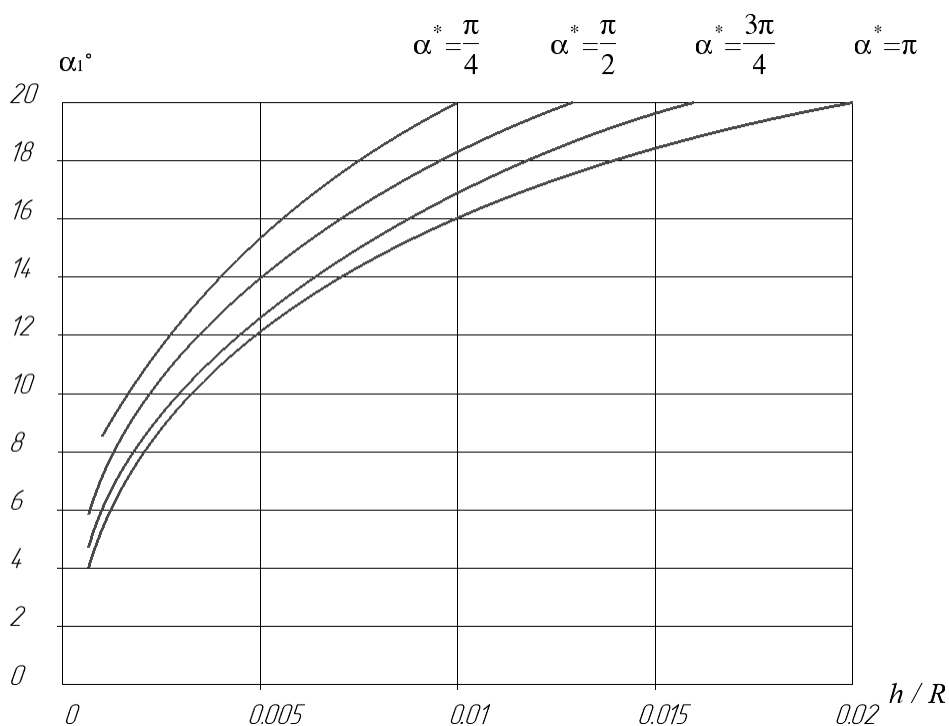


Рис.5. Зависимость угла α_1 от отношения h/R при различном значении угла α^* .

Критическая деформация определяется из равенств (3.9) и (3.22) и имеет вид

$$\varepsilon_{cr} = \frac{\eta^2 \cos \alpha_1}{12\alpha_1^2} \left(\frac{h}{R}\right)^2. \tag{3.23}$$

Зависимости критической деформации от отношения h/R показаны для различных значений угла α^* на рис.6.

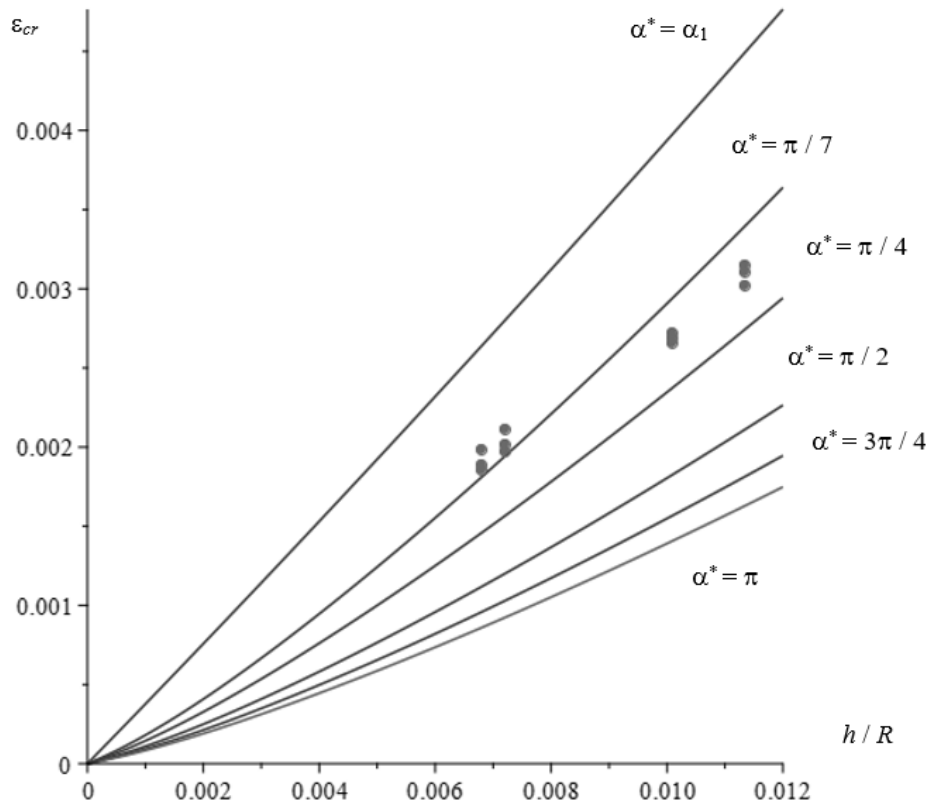


Рис.6. Зависимость критической деформации от отношения h/R при различном значении угла α^* .

4. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Критическая деформация (3.23) зависит от модуля упругости и толщины теряющей устойчивость оболочки через угол α^* . Чем больше энергия деформаций докритического состояния, которая пропорциональна этим параметрам, тем больше угол α^* . Как следует из рис.6, величина этого угла оказывает значительное влияние на критическую деформацию. Точками на рис.6 показаны экспериментальные результаты, полученные при нагреве двухслойных колец с внутренним слоем из нержавеющей стали с толщиной 0,5 мм и наружным слоем из углепластика [1]. Этот эксперимент может быть использован для оценки угла α^* , который составляет $\pi/7$.

В работах по устойчивости оболочки в жесткой среде критическая деформация оболочки аппроксимируется следующим соотношением

$$\varepsilon_{cr} = C \left(\frac{h}{R} \right)^{1.2},$$

где C – некоторый коэффициент. Для кривой, соответствующей $\pi/7$, получим $C=0.73$. Ранее были получены следующие значения: в работе [4] – $C=1.11$, в [5] – $C=1.2$, в [6] – $C=0.43$, в [7] – $C=1$, в [2] – $C=0.55$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках варианта нелинейной теории оболочек, учитывающего углы поворота нормали к поверхности оболочки и нелинейные члены, связанные с изменением кривизны оболочки в процессе деформации, получено решение, определяющее критическое значение деформации оболочки, сжимаемой бесконечно жесткой внешней средой. Установлено, что эта деформация существенно зависит от соотношения между упругой энергией в сжатой оболочке и силами трения, действующими между оболочкой и средой. Исследованы два предельных случая – отсутствие трения между средой и оболочкой и жесткая тангенциальная связь между ними. Полученное решение сопоставлено с экспериментом. Предложена эмпирическая формула для критической деформации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев В.В., Мороз Н.Г. *Композитные баллоны давления – проектирование, расчёт изготовление и испытания.* – М.: Машиностроение, 2015. – 373 с.
2. Васильев В.В., Салов В.А. *Устойчивость бесконечно длинной цилиндрической оболочки, нагруженной наружным давлением, создаваемым жёсткой внешней средой* // Изв. РАН. МТТ. – 2021. – №4. – С.98-108.
3. Васильев В.В. *Механика конструкций из композиционных материалов.* – М.: Машиностроение, 1988. – 270 с.
4. Cheney J.A. *Pressure buckling of ring encased in cavity* // Journal of the Engineering Mechanical Division. – 1971. – Vol.97. – No.2. – Pp.333-343.
5. Chicurel R. *Shrink buckling of thin circular rings* // J. Appl. Mech. – 1968. – Vol.35. – No.3. – Pp.608-610.
6. Glock D. *Post-critical behavior of a rigidly encased circular pipe subject to external water pressure and temperature rise* // Der Stahlbau. – 1977. – Vol.46. – No.7. – Pp.212-217.
7. Буюков И.А. *Простейшее решение задачи о выпучивании кольца внутри жёсткой обоймы* // Космонавтика и ракетостроение. – 2004. – Вып.1(34). – С.119-130.

REFERENCES

1. Vasiliev V.V., Moroz N.G. *Kompozitnye ballony davleniya – proektirovanie, raschyot izgotovlenie i ispytaniya* [Composite pressure vessels – design, calculation, manufacture and testing]. Moskva, Mashinostroenie, 2015, 373 p.
2. Vasiliev V.V., Salov V.A. *Stability of an infinitely long cylindrical shell loaded with external pressure created by a rigid environment.* Mechanics of Solids, 2021, No.4, Pp.98-108.
3. Vasiliev V.V. *Mekhanika konstruksij iz kompozitsionnykh materialov* [Composite materials structures mechanics]. Moskva, Mashinostroenie, 1988, 270 p.
4. Cheney J.A. *Pressure buckling of ring encased in cavity.* Journal of the Engineering Mechanical Division, 1971, Vol.97, No.2, Pp.333-343.
5. Chicurel R. *Shrink buckling of thin circular rings.* J. Appl. Mech., 1968, Vol.35, No.3, Pp.608-610.
6. Glock D. *Post-critical behavior of a rigidly encased circular pipe subject to external water pressure and temperature rise.* Der Stahlbau, 1977, Vol. 46, No.7, Pp.212-217.

7. Buyakov I.A. *Prostejshee reshenie zadachi o vypuchivanii kol'tsa vnutri zhyostkoj obojmy* [The simplest solution to the problem of ring buckling inside a rigid cage]. Kosmonavtika i raketostroenie, 2004, Iss.1(34), Pp.119-130.

Поступила в редакцию 17 марта 2022 года.

Сведения об авторах:

Васильев Валерий Витальевич – акад. РАН, д.т.н., проф., зам. глав. констр., АО «Центральный НИИ специального машиностроения», г. Хотьково, Россия; e-mail: yvas@dol.ru

Склезнев Андрей Анатольевич – к.т.н., с.н.с., АО «Центральный НИИ специального машиностроения», г. Хотьково, Россия; e-mail: andrey@skleznev.ru