

УДК 539.3
EDN IAFQAJ (<https://elibrary.ru/iafqaj>)



ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ БАЛКИ ТИМОШЕНКО, СВЯЗАННОЙ С ДЕФОРМИРУЕМЫМ ОСНОВАНИЕМ*

Грицков А.В.¹, Киреевков А.А.², Федотенков Г.В.^{1,3}

¹ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия

²ФГБУН Институт проблем механики РАН им. А.Ю. Ишлинского, г. Москва, Россия

³НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Построены и исследованы нестационарные фундаментальные решения (функции Грина) задачи для неограниченной балки Тимошенко, связанной с деформируемыми основаниями различных типов. В качестве моделей оснований рассмотрены однопараметрическое основание Винклера, двухпараметрическая модель основания Пастернака и трёхпараметрическая модель инерционного основания Пастернака. Для построения решения использован аппарат интегральных преобразований Лапласа по времени и Фурье по пространственной координате. Для построения оригиналов изображений по Фурье и Лапласу предложено два способа аналитического обращения. Первый из них базируется на связи интегрального преобразования Фурье с разложением в ряд на переменном интервале. Второй способ основан на разложении изображений в ряды по степеням рациональных функций и применим только в случае отсутствия основания. Построены интегральные представления решения. Входящие в них интегральные операторы имеют вид свёрток с ядрами в виде найденных функций влияния. Приведены примеры расчётов.

Ключевые слова: балка Тимошенко; нестационарные колебания; метод суперпозиции; функции влияния; ряды Фурье; интегральные преобразования; основание Винклера; основание Пастернака

GREEN FUNCTIONS FOR A TIMOSHENKO BEAM ASSOCIATED WITH A DEFORMABLE BASE

Gritskov Andrey V.¹, Kireenkov Alexey A.², Fedotenkov Gregory V.^{1,3}

¹Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

²Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia

³Research Institute of Mechanics Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

ABSTRACT

Transient fundamental solutions (Green's functions) of the problem for an unbounded Timoshenko beam associated with deformable foundations of various types are constructed and investigated. The one-parameter Winkler base, the two-parameter model of the Pasternak base and the three-parameter model of the Pasternak inertial base are considered as base models. To construct the solution, the apparatus of Laplace integral transformations in time and Fourier

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 20-08-01120 А).

transformations in the spatial coordinate was used. To construct the original images according to Fourier and Laplace, two methods of analytical inversion are proposed. The first of them is based on the connection between the integral Fourier transform and the series expansion on a variable interval. The second method is based on the expansion of images into series in powers of rational functions and is applicable only in the absence of a base. Integral representations of the solution are constructed. The integral operators included in them have the form of convolutions with kernels in the form of the found influence functions. Examples of calculations are given.

Keywords: beam Timoshenko; non-stationary oscillations; superposition method; influence functions; Fourier series; integral transformations; Winkler base; foundation of Pasternak

ВВЕДЕНИЕ

Исследование колебаний балочных элементов конструкций, связанных с деформируемыми основаниями, является актуальной и важной как в теоретическом, так и в прикладном отношении научной проблемой. Технический прогресс в областях строительства и машиностроения вызывает потребность в точных знаниях напряженно-деформируемого состояния всевозможных конструкций под действием различных нестационарных нагрузок. Это связано с широким применением тонкостенных элементов в конструкциях аэрокосмических аппаратов, автомобилей, кораблей, различных инженерных и строительных сооружений. Подобные задачи особенно актуальны для развития высокоскоростного железнодорожного транспорта, поскольку используемые в них модели с достаточной степенью точности описывают поведение рельса, связанного с деформируемым грунтом и испытывающего высокоинтенсивные нестационарные нагрузки при движении локомотивов. Также эти задачи актуальны для развития аэрокосмической отрасли. Например, при проектировании перспективных ракетных систем с использованием рельсотронных ускорителей.

Следует отметить, что наряду с большим количеством имеющихся публикаций, посвященных исследованию колебательных процессов в балках, в настоящее время практически отсутствуют работы, направленные на изучение нестационарного поведения балки Тимошенко, опертой на упругое и инерционное основание Винклера, а также на упругое основание Пастернака.

В данной работе исследуются фундаментальные решения (функции Грина) задачи о балке Тимошенко, связанной с деформируемым основанием. В качестве инструментов для решения задачи использованы интегральные преобразования Фурье по координате и Лапласа по времени, элементы теории обобщенных функций и теории вычетов в сочетании с оригинальными подходами аналитического построения оригиналов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ EQUATION SECTION (NEXT)

В начальный момент времени на неограниченную по протяженности балку Тимошенко, опертую на деформируемое основание, прикладывается распределенная по произвольному закону нестационарная нагрузка $p(x, t)$ (рис.1). Отметим, что носитель нагрузки $p(x, t)$ может быть как неподвижным, так и подвижным.

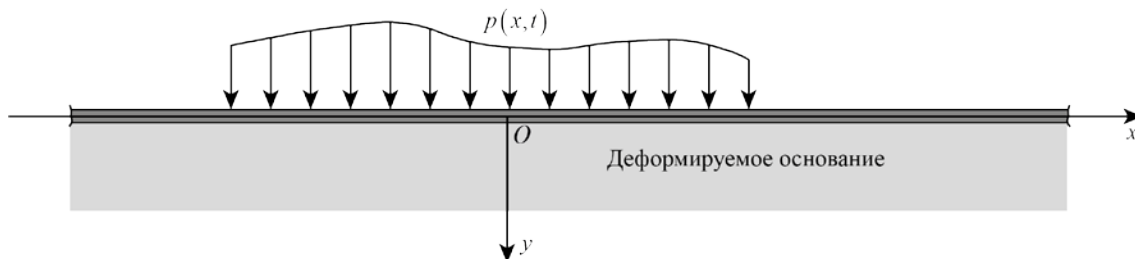


Рис.1. Балка на деформируемом основании.

Для описания движения балки на деформируемом основании используются уравнения движения С.П. Тимошенко, модифицированные с учётом влияния реакции основания [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= k^2 c_2^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \chi_z \right) + \frac{p}{\rho F} + L(w), \\ \frac{\partial^2 \chi_z}{\partial t^2} &= c_p^2 \frac{\partial^2 \chi_z}{\partial x^2} - \frac{c_2^2 F k^2}{I_z} \left(\chi_z - \frac{\partial w}{\partial x} \right). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь w – прогиб балки, t – время, k – поправочный коэффициент сдвига, c_2 – скорость волн сдвига, χ_z – угол поворота поперечного сечения за счёт сдвиговых деформаций, p – поперечная нагрузка, ρ – плотность материала, F – площадь поперечного сечения, c_p – скорость волн изгиба, I_z – момент инерции поперечного сечения относительно главной центральной оси, $L(w)$ – линейный оператор, характеризующий влияние деформируемого основания.

Поправочный коэффициент сдвига, скорость волн сдвига и скорость волн изгиба имеют следующий вид

$$k = \sqrt{5/6}, \quad c_2 = \sqrt{\mu/\rho}, \quad c_p = \sqrt{E/\rho},$$

где μ – модуль сдвига, E – модуль Юнга.

Далее все уравнения и соотношения будем записывать в безразмерном виде. Для этого воспользуемся системой безразмерных величин, где штрихом обозначены размерные параметры

$$\eta = \frac{c_p}{c_2}, \quad l = \sqrt{\frac{I_z}{F}}, \quad x = \frac{x'}{l}, \quad \tau = \frac{c_2 t}{l}, \quad w = \frac{w'}{l}, \quad p = \frac{p' l}{\rho F c_2^2},$$

где l – характерный линейный размер, τ – безразмерное время.

Тогда в безразмерной форме записи уравнения (1.1) примут вид (здесь и далее штрихи для простоты записи опущены)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} &= k^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + p + L(w), \\ \frac{\partial^2 \chi_z}{\partial \tau^2} &= \eta^2 \frac{\partial^2 \chi_z}{\partial x^2} - k^2 \left(\chi_z - \frac{\partial w}{\partial x} \right). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Для замыкания системы (1.2) необходимы начальные условия, которые без ограничения общности примем нулевыми

$$w|_{\tau=0} = \dot{w}|_{\tau=0} = \chi_z|_{\tau=0} = \dot{\chi}_z|_{\tau=0} = 0. \tag{1.3}$$

Положим также, что на бесконечности перемещения балки являются ограниченными функциями

$$w|_{|x| \rightarrow \infty} = O(1), \quad \chi_z|_{|x| \rightarrow \infty} = O(1). \quad (1.4)$$

1.1. Виды деформируемых оснований.

Для учёта деформируемости основания в настоящее время существуют разнообразные модели, описывающие влияние основания, с которым связаны элементы различных конструкций и инженерных сооружений.

Одной из основных моделей деформируемого грунта является модель упругого основания, характеризующаяся коэффициентом постели. Первоначальные формулировки этой модели были описаны Н.И. Фуссом. Расчётная модель была разработана Е. Винклером: реактивное напряжение в каждой точке контактной области прямо пропорционально осадке основания в той же точке. Таким образом, упругое основание Винклера можно представить как набор линейных несвязанных между собой пружин, на которые опирается балка (рис.2). Жёсткость этих пружин и является коэффициентом постели.

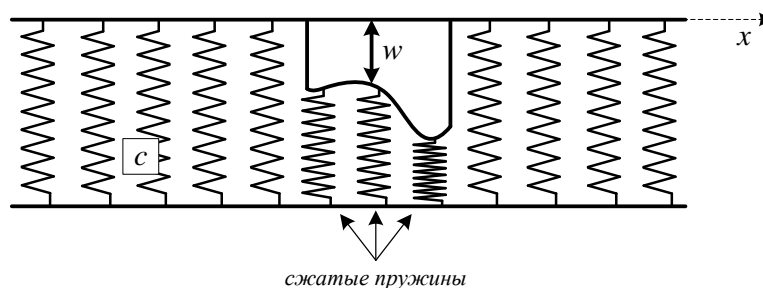


Рис.2. Механическое представление упругого основания Винклера.

Применение такой модели на практике показало ограниченность использования данного основания [2]. Основным недостатком модели Винклера является фактор того, что коэффициент постели для грунта не обладает постоянным неизменным значением. Его величина зависит от таких факторов, как интенсивность нагружения, форма и размер площади давления, действующего на грунт. Так, с ростом площади давления значение коэффициента постели уменьшается, что приводит к выбору меньшего значения коэффициента при расчёте широких балок.

Деформированному в природе грунту свойственны характерные осадочные лунки, возникающие вне зоны приложения давления. Этот факт свидетельствует о том, что характер деформаций не является исключительно местным.

Также, если полагаться на модель Винклера, можно заключить, будто в опёртой на такое основание балке при воздействии равномерной по всей длине нагрузки будет отсутствовать прогиб. Вместо этого балка словно штамп будет оседать. Из результатов наблюдений за нагруженными балками видно, что под интенсивными нагрузками в них возникают значительные деформации изгиба.

Модель упругого основания с двумя коэффициентами постели позволяет учесть деформации вне зоны контакта. Данный подход был предложен и описан П.Л. Пастернаком [3]. Первый коэффициент постели – коэффициент сжатия – фактически является коэффициентом постели из модели основания Винклера. Второй коэффициент постели – коэффициент сдвига – позволяет выразить интенсивность вертикальной силы сдвига в виде произведения коэффициента на первую производную по координате функции осадки w . Основание Пастернака с двумя коэффициентами можно представить, как набор линейных

пружин, связанных друг с другом мембраной, обладающей поверхностным натяжением. Реакция основания на нагружение, в отличие от модели Винклера, состоит из двух частей: реакция пружин и вертикальная составляющая поверхностного натяжения [4] (рис.3).

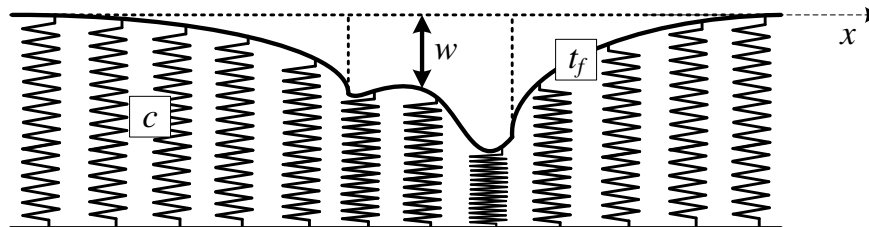


Рис.3. Механическое представление упругого основания Пастернака.

Для ещё большей физической точности при моделировании процессов деформации грунта под воздействием произвольных внешних факторов используют инерционные модели оснований. Их главное отличие от вышеописанных моделей Винклера и Пастернака – учёт инерционной составляющей среды. Реакция основания в отличие от модели Пастернака состоит уже из трёх частей: к реакции пружин и вертикальной составляющей поверхностного натяжения добавляется реакция удельной массы основания [5]. Данный фактор выражается в виде произведения коэффициента на вторую производную по времени функции осадки w .

Приведём выражения для линейных операторов, характеризующих влияние описанных выше моделей оснований.

В случае основания Винклера

$$L(w) = -cw. \quad (1.5)$$

В случае основания Пастернака (двухпараметрического основания)

$$L(w) = -cw + t_f \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (1.6)$$

В случае инерционного основания Пастернака (трёхпараметрического основания)

$$L(w) = -cw + t_f \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - m_f \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}. \quad (1.7)$$

В формулах (1.5)-(1.7) c – безразмерный коэффициент сжатия, t_f – безразмерный коэффициент сдвига, m_f – инерционный коэффициент.

2. ФУНКЦИИ ГРИНА

Для решения задач о нестационарных колебаниях балки, связанной с деформируемым основанием под воздействием произвольно распределённой нагрузки удобно использовать фундаментальные решения (функции Грина) [7-12]. Они есть решение задачи (1.2)-(1.4) с учётом какого-либо соотношения из (1.5)-(1.7) в зависимости от типа основания при мгновенном сосредоточенном воздействии

$$p(x, \tau) = \delta(x)\delta(\tau), \quad (2.1)$$

где $\delta(\bullet)$ – дельта-функция Дирака (рис.4). Для функций влияния в случае такой постановки задачи примем следующие обозначения: $G_w(x, \tau)$, $G_\chi(x, \tau)$, которые соответствуют прогибу w и углу отклонения поперечного сечения от положения нормали χ_z .

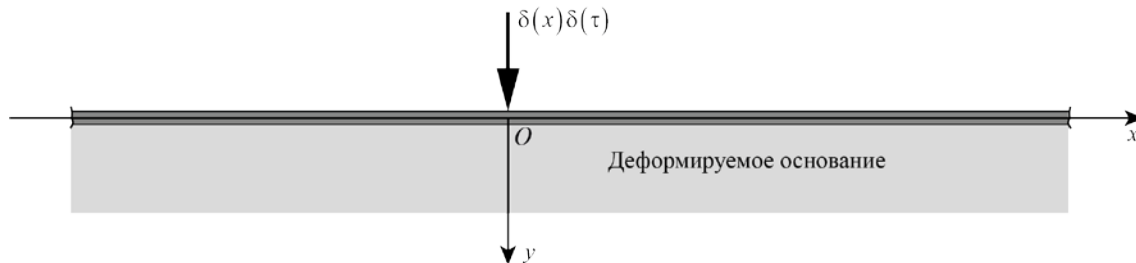


Рис.4. Задача о функциях влияния.

Решение задачи о функциях влияния строим с использованием интегрального преобразования Лапласа по времени τ и Фурье по координате x

$$f^{FL}(q, s) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(x, \tau) e^{iqx + s\tau} dx d\tau,$$

где верхний индекс L у функции означает её трансформанту по Лапласу, F – трансформанту по Фурье, s – параметр преобразования по Лапласу, q – параметр преобразования по Фурье.

В пространстве преобразований с учётом свойств дельта-функции [1,6] задача о функциях влияния имеет вид

$$\begin{aligned} s^2 G_w^{FL} &= k^2 (-q^2 G_w^{FL} + iq G_\chi^{FL}) + 1 + L^F(G_w^{FL}), \\ s^2 G_\chi^{FL} &= -\eta^2 q^2 G_\chi^{FL} - k^2 (G_\chi^{FL} + iq G_w^{FL}), \end{aligned} \quad (2.2)$$

В случае основания Винклера

$$L^F(G_w^{FL}) = L_v G_w^{FL}, \quad L_v = -c. \quad (2.3)$$

В случае основания Пастернака

$$L^F(G_w^{FL}) = L_p G_w^{FL}, \quad L_p = -(c + q^2 t_f). \quad (2.4)$$

В случае инерционного основания Пастернака

$$L^F(G_w^{FL}) = L_m G_w^{FL}, \quad L_m = -(c + q^2 t_f + s^2 m_f). \quad (2.5)$$

В дальнейшем сосредоточим внимание на определении прогибов балки и соответствующей функции влияния $G_w(x, \tau)$. Определяя G_w^{FL} как решения (2.2), находим

$$G_w^{FL} = \frac{s^2 + \eta^2 q^2 + k^2}{(s^2 + k^2 q^2)(s^2 + \eta^2 q^2) + s^2 k^2 - L_\alpha (s^2 + \eta^2 q^2 + k^2)}, \quad \alpha = v, p, m. \quad (2.6)$$

Далее рассмотрим наиболее общую из трёх моделей оснований – инерционное основание Пастернака ($L_\alpha = L_m$). Результаты для двухпараметрической модели Пастернака можно получить из общего результата, положив $m_f = 0$. Если дополнительно положить $t_f = 0$, то получим модель Винклера. Отметим, что равенство нулю всех трёх параметров c , m_f и t_f ($L_\alpha = 0$) соответствует случаю отсутствия основания.

Отметим, что построение оригинала изображения (2.6) последовательным обращением интегральных преобразований не представляется возможным даже в случае балки, не связанной с деформируемым основанием. Помимо этого, нельзя воспользоваться и методом совместного обращения интегральных преобразований [6], поскольку как числитель, так и знаменатель выражения (2.6) не являются однородными функциями.

Предлагается использовать следующий подход для построения оригинала (2.6) аналитическими методами. Он основывается на связи интеграла Фурье с рядом Фурье на переменном интервале. Поскольку исходные уравнения имеют гиперболический тип, то максимальная скорость распространения возмущений в балке является конечной и, как правило, её значение определяется непосредственно из коэффициентов исходных уравнений. Из уравнений (1.2) видно, что максимальная скорость распространения волн вдоль балки равна $c_m = \max(k, \eta)$. Следовательно, известно, при $|x| > c_m \tau$ балка свободна от нормальных перемещений.

Рассмотрим разложение функции $G_w(x, \tau)$ в ряд Фурье на интервале $|x| < X$, где X – полуширина интервала разложения, с учетом предположения $X > c_m \tau$

$$G_w(x, \tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} G_{wm}(\tau) e^{-i \frac{\pi m x}{X}}, \quad G_{wm}(\tau) = \frac{1}{2X} \int_{-X}^X G_w(x, \tau) e^{i \frac{\pi m x}{X}} dx. \quad (2.7)$$

Функция $G_w(x, \tau)$ имеет ограниченный носитель $|x| < l(\tau) \leq L$, поэтому

$$\int_{-X}^X G_w(x, \tau) e^{i \frac{\pi m x}{X}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} G_w(x, \tau) e^{i \frac{\pi m x}{X}} dx = G_w^F\left(\frac{\pi m}{X}, \tau\right). \quad (2.8)$$

Из (2.7) и (2.8) получаем

$$G_w(x, \tau) = \frac{1}{2X} \sum_{m=-\infty}^{\infty} G_w^{FL^{-1}}\left(\frac{\pi m}{X}, s\right) e^{-i \frac{\pi m x}{X}}. \quad (2.9)$$

Соотношение (2.9) применяется для обращения интегрального преобразования Фурье-Лапласа. После выполнения прямого и обратного преобразования Лапласа над выражением (2.9) приходим к формуле

$$G_w(x, \tau) = \frac{1}{2X} \sum_{m=-\infty}^{\infty} G_w^F\left(\frac{\pi m}{X}, \tau\right) e^{-i \frac{\pi m x}{X}}. \quad (2.10)$$

Величина интервала разложения $2X$ может быть выбрана произвольно, учитывая ограничение $c_m \tau \leq X$. Однако, для улучшения сходимости в (2.10) следует положить $X = c_m \tau$, что приводит к ряду с переменным интервалом разложения

$$G_w(x, \tau) = \frac{1}{2c_m \tau} \sum_{m=-\infty}^{\infty} G_w^{FL^{-1}}\left(\frac{\pi m}{c_m \tau}, s\right) e^{-i \frac{\pi m x}{c_m \tau}} H(c_m \tau - |x|), \quad (2.11)$$

где $H(\cdot)$ – функция Хевисайда.

Оригинал по Лапласу функции $G_w^{FL^{-1}}\left(\frac{\pi m}{c_m \tau}, s\right)$ находится аналитически с помощью вычетов [6].

Для верификации предложенного способа обращения интегрального преобразования Фурье и Лапласа рассмотрим ещё один подход к построению оригиналов. Однако этот способ удаётся применить только для балки

в отсутствии упругого основания (на балку действует только нестационарная нагрузка при отсутствии реакции основания). В этом случае имеем изображение вида

$$G_w^{FL} = \frac{s^2 + \eta^2 q^2 + k^2}{(s^2 + k^2 q^2)(s^2 + \eta^2 q^2) + s^2 k^2}. \quad (2.12)$$

Предлагаемый способ состоит в разложении (2.12) в ряд по степеням рациональных функций. Для этого преобразуем формулу (2.12) следующим образом

$$G_w^{FL} = \frac{s^2 + \eta^2 q^2 + k^2}{(s^2 + k^2 q^2)(s^2 + \eta^2 q^2) \left[1 + s^2 k^2 / ((s^2 + k^2 q^2)(s^2 + \eta^2 q^2)) \right]}.$$

Путём введения рациональной функции

$$\varphi(q, s) = \frac{k^2 s^2}{(s^2 + \eta^2 q^2)(s^2 + q^2 k^2)}, \quad |\varphi(q, s)| < 1$$

изображение (2.12) приводится к виду

$$G_w^{FL} = \frac{s^2 + \eta^2 q^2 + k^2}{(s^2 + \eta^2 q^2)(s^2 + q^2 k^2)} \frac{1}{1 + \varphi(q, s)}.$$

Отметим, что неравенство $|\varphi(q, s)| < 1$ выполняется, поскольку интегрирование в формуле обращения преобразования Лапласа проводится вдоль любой прямой, параллельной мнимой оси и находящийся справа от неё на расстоянии $\sigma > \sigma_0$, где σ_0 – показатель роста функции-оригинала. Таким образом, значение σ всегда можно выбрать достаточно большим, а именно таким, чтобы выполнялось условие $|\varphi(q, s)| < 1$.

Таким образом, последний множитель в правой части предыдущей формулы является суммой ряда геометрической прогрессии со знаменателем $-\varphi(q, s)$

$$\frac{1}{1 + \varphi(q, s)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varphi(q, s)^n.$$

Таким образом, изображение (2.12) представляют собой сумму ряда по степеням рациональных функций

$$G_w^{FL} = \sum_{n=0}^{\infty} g_n^{FL}, \quad (2.13)$$

$$g_n^{FL}(q, s) = (-1)^n k^{2n} s^{2n} \frac{s^2 + \eta^2 q^2 + k^2}{(s^2 + \eta^2 q^2)^{n+1} (s^2 + q^2 k^2)^{n+1}}.$$

Ввиду простоты определения нулей знаменателя, оригинал $g_n(x, \tau)$ общего члена $g_n^{FL}(q, s)$ ряда (2.13) находится аналитически последовательным обращением интегральных преобразований.

3. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Сначала рассмотрим случай отсутствия основания ($c = t_f = m_f = 0$) и приведём сравнение результатов решения, полученных с помощью двух

различных подходов к построению оригиналов, описанных в предыдущем разделе. Характерную длину примем равной $l = 1$ м, а безразмерный параметр $\eta = 1.61$, что соответствует выбору в качестве материала балки стали с размерными характеристиками: плотность $\rho = 7850$ кг/м³, модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$. На рис.5 представлены распределения функции Грина $G_w(x, \tau)$ по координате x в различные моменты времени. Сплошные кривые соответствуют результату, построенному по формуле (2.11) с учётом 80 членов советующего ряда, а штриховые – по формуле (2.13) с учётом первых 30 членов советующего ряда.

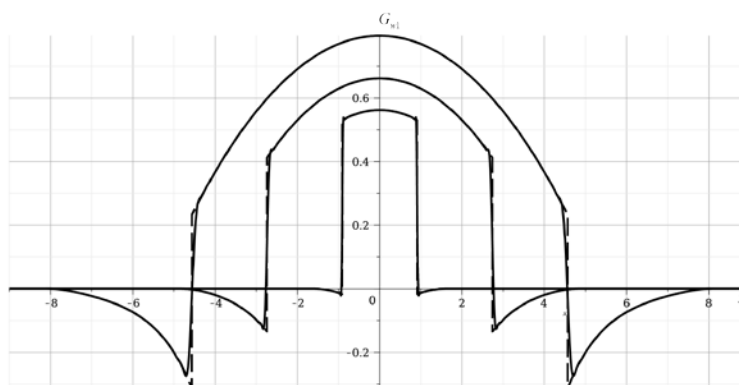


Рис.5. Функции Грина для балки при отсутствии основания.

Относительное расхождение $\Delta(\tau)$ между этими результатами оценено по норме в пространстве L_2

$$\Delta(\tau) = \frac{\|G_{w1}(x, \tau) - G_{w2}(x, \tau)\|}{\|G_{w1}(x, \tau)\|} 100\%, \quad \|G_{wk}(x, \tau)\| = \left[\int_{-c_m\tau}^{c_m\tau} G_{wk}^2(x, \tau) dx \right]^{1/2},$$

$$k = 1, 2, \quad \Delta(1) = 5.79\%, \quad \Delta(2) = 5.45\%, \quad \Delta(3) = 4.98\%,$$

где $G_{w1}(x, \tau)$ – функция Грина, построенная по формуле (2.11), $G_{w2}(x, \tau)$ – функция Грина, построенная по формуле (2.13).

На рис.6 показаны распределения функции Грина, построенной по формуле (2.11), по координате x в момент времени $\tau = 5$. Сплошная кривая соответствует учёту 30 членов ряда в (2.11), штриховая – 50 членов, штрихпунктирная – 80 членов.

Относительное расхождение $\Delta_N^M(\tau)$ между этими результатами оценено по норме в пространстве L_2

$$\Delta_N^M(\tau) = \frac{\|G_w^{(N)}(x, \tau) - G_w^{(M)}(x, \tau)\|}{\|G_w^{(N)}(x, \tau)\|} 100\%, \quad \|G_w^{(N)}(x, \tau)\| = \left\{ \int_{-c_m\tau}^{c_m\tau} [G_w^{(N)}(x, \tau)]^2 dx \right\}^{1/2},$$

$$\Delta_{30}^{50}(5) = 3.05\%, \quad \Delta_{50}^{80}(5) = 2.2\%,$$

где $G_w^{(N)}(x, \tau)$ – функция Грина, построенная по формуле (2.11) с учётом первых N членов соответствующего ряда.

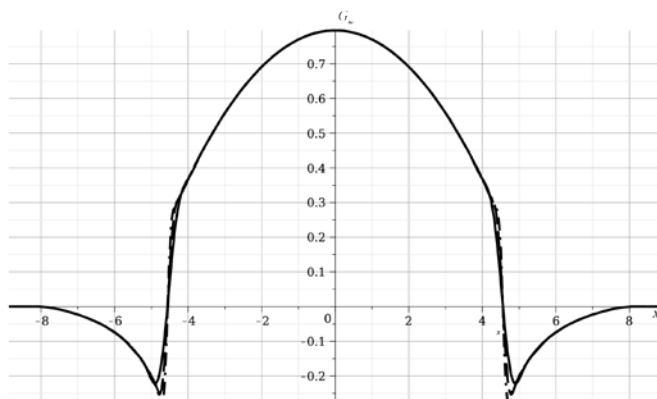


Рис.6. Функция Грина при учёте различного числа членов ряда.

Проведём анализ влияния коэффициентов деформируемого основания на нестационарные нормальные перемещения балки. Далее в расчётах будем использовать формулу (2.11) с учётом 80-ти членов соответствующего ряда.

На рис.7 представлены распределения функции Грина в случае модели Винклера ($t_f = m_f = 0, c \neq 0$) по координате x в момент времени $\tau = 5$. Сплошная кривая соответствует $c = 0.1$, штриховая – $c = 0.3$, штрихпунктирная – $c = 0.5$. Точечная линия соответствует модели балки в отсутствии основания. Видно, что коэффициент c оказывает значительное влияния на перемещения. Его рост приводит к заметному снижению прогибов балки.

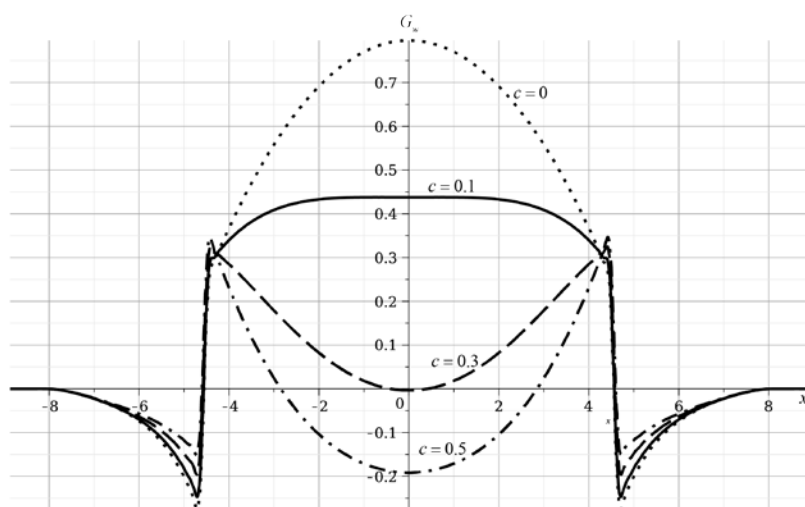


Рис.7. Функция Грина для балки на основании Винклера.

На рис.8 представлены распределения функции Грина в случае двухпараметрической модели Пастернака ($m_f = 0, c \neq 0, t_f \neq 0$) по координате x в момент времени $\tau = 5$. Сплошная кривая соответствует $t_f = 0.1$, штриховая – $t_f = 0.3$, штрихпунктирная – $t_f = 0.5$. Коэффициент c в этих случаях принят равным $c = 0.1$. Точечная линия соответствует модели балки в отсутствии основания. Видно, что рост значения коэффициента t_f влияет на скорость распространения волны изгиба. При этом на значения прогибов он не оказывает такого значительного влияния, как коэффициент c .

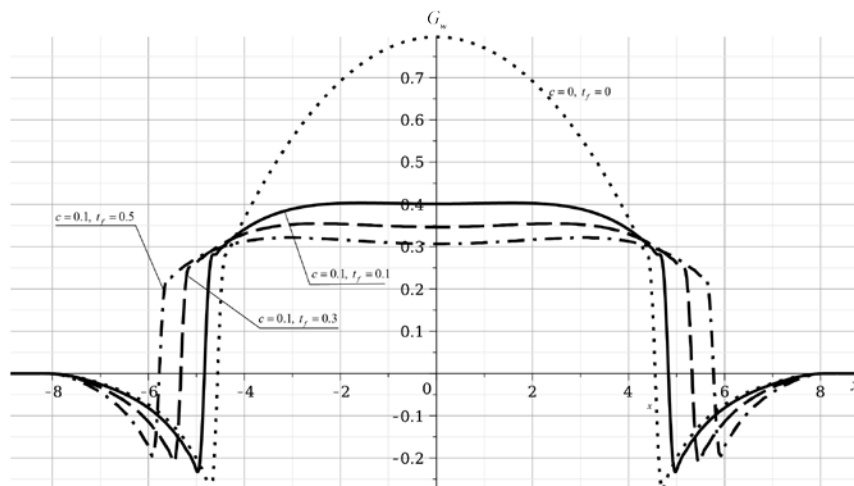


Рис.8. Функция Грина для балки на двухпараметрическом основании Пастернака.

На рис.9 представлены распределения функции Грина в случае инерционного основания Пастернака ($m_f \neq 0, c \neq 0, t_f \neq 0$) по координате x в момент времени $\tau = 5$. Сплошная кривая соответствует $m_f = 0.1$, штриховая – $m_f = 0.3$, штрихпунктирная – $m_f = 0.5$. Коэффициенты c и t_f в этих случаях приняты равными $c = t_f = 0.1$. Точечная линия соответствует модели балки в отсутствии основания. Видно, что рост значения коэффициента m_f оказывает влияние как на прогибы, так и на скорость распространения волны изгиба. Однако его влияние значительно меньше влияния коэффициента постели c .

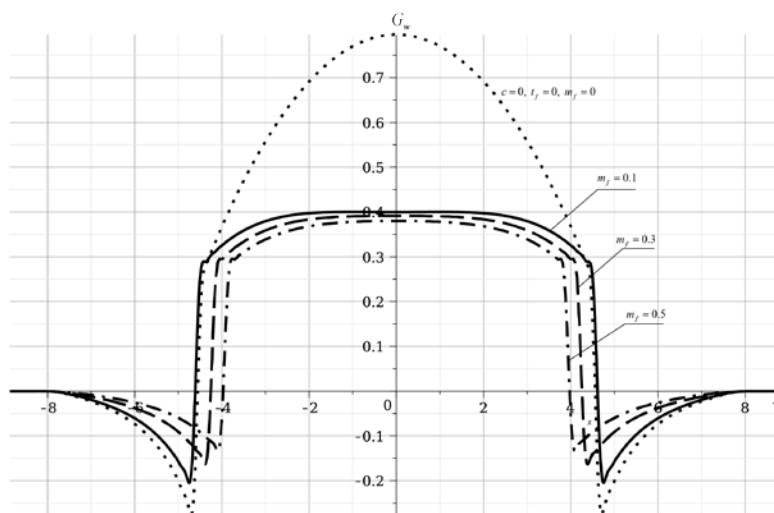


Рис.9. Функция Грина для балки на инерционном основании Пастернака.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена постановка и разработан метод решения нестационарной задачи о функциях Грина для балки Тимошенко, связанной с деформируемыми основаниями различных типов. В качестве моделей оснований рассмотрены модель Винклера, двухпараметрическая модель Пастернака и модель инерционного основания Пастернака. Для решения задачи использованы

интегральные преобразования Лапласа и Фурье. Для построения оригиналов использован оригинальный метод аналитического обращения, основанный на разложении ряда Фурье на переменном интервале и теории вычетов. Исследована сходимость полученных результатов. Проведено сравнение оригиналов, полученных с помощью предложенного метода, с результатами, построенными с помощью другого аналитического метода, основанного на разложении в ряд по степеням рациональных функций. Проведён параметрический анализ результатов, который показал, что наибольшее влияние на величину нестационарного прогиба оказывает коэффициент основания Винклера. Сдвиговой коэффициент модели Пастернака в основном влияет на скорость распространения волн изгиба, а инерционный коэффициент оказывает влияние, как на скорость волн изгиба, так и на величину прогибов, однако в меньшей степени по сравнению с коэффициентом модели Винклера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Гарлаковский Д.В. *Волны в сплошных средах*. – М.: Физматлит, 2004. – 472 с.
2. Леонтьев Н.Н., Леонтьев А.Н., Соболев Д.Н., Анохин Н.Н. *Основы теории балок и плит на деформируемом основании*. – М.: МИСИ, 1982. – 119 с.
3. Пастернак П.Л. *Основы нового метода расчёта фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели*. – М.: Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре, 1954. – 56 с.
4. Курбацкий Е.Н., Минь М.Д. *Расчёт фундаментов зданий и сооружений с двумя упругими характеристиками основания с использованием свойств изображений Фурье финитных функций* // Вестник МГСУ. – 2014. – №1. – С.41-51.
5. Леоненко Д.В. *Свободные колебания трехслойных цилиндрических оболочек в упругой среде Пастернака* // Механика машин, механизмов и материалов. – 2013. – №4(25). – С.57-59.
6. Слепьян Л.И., Яковлев Ю.С. *Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики*. – Л.: Судостроение, 1980. – 344 с.
7. Киреенков А.А., Федотенков Г.В. *Модель силового контакта композитной сферической оболочки с твёрдой поверхностью с учётом комбинированного анизотропного сухого трения* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2021. – Т.27. – №4. – С.558-569.
8. Киреенков А.А., Федотенков Г.В. *Движение композитной сферической оболочки по твёрдой поверхности с учётом комбинированного сухого трения* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2020. – Т.26. – №3. – С.327-340.
9. Сердюк А.О., Сердюк Д.О., Федотенков Г.В. *Нестационарная функция прогиба для неограниченной анизотропной пластины* // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». – 2021. – Vol.25. – No.1. – Pp.111-126.
10. Okonechnikov A.S., Fedotenkov G.V., Vahtreroва Y.A. *Unsteady motion of a rigid stamp along the boundary of an elastic half-space* // J. of the Balkan Tribological Association. – 2021. – Vol.27. – No.3. – Pp.343-358.

11. Serdyuk A.O., Serdyuk D.O., Fedotenkov G.V., Hein T.Z. *Green's function for an unbounded anisotropic kirchhoff-love plate* // J. of the Balkan Tribological Association. – 2021. – Vol.27. – No.5. – Pp.747-761.
12. Kireenkov A.A. *Further development of the theory of multicomponent dry friction* / Proc. of the 6th Intern. Conf. on Coupled Problems in Science and Engineering. COUPLED PROBLEMS'2015. – 2015. – Pp.203-209.

REFERENCES

1. Gorshkov A.G., Medvedsky A.L., Rabinsky L.N., Tarlakovsky D.V. *Volny v sploshnykh sredakh [Waves in continuous media]*. Moskva, Fizmatlit, 2004, 472 p.
2. Leontiev N.N., Leontiev A.N., Sobolev D.N., Anokhin N.N. *Osnovy teorii balok i plit na deformiruemom osnovanii [Fundamentals of the theory of beams and slabs on a deformable foundation]*. Moskva, MISI, 1982, 119 p.
3. Pasternak P.L. *Osnovy novogo metoda raschyota fundamentov na uprugom osnovanii pri pomoshhi dvukh koehffitsientov posteli [Fundamentals of a new method for calculating foundations on an elastic foundation using two bed coefficients]*. Moskva, Gosudarstvennoe izdatel'stvo literatury po stroitel'stvu i arkhitekture, 1954, 56 p.
4. Kurbatsky E.N., Min M.D. *Raschyot fundamentov zdaniy i sooruzhenij s dvumya uprugimi kharakteristikami osnovaniya s ispol'zovaniem svojstv izobrazhenij Fur'e finitnykh funktsij [Calculation of foundations of buildings and structures with two elastic characteristics of the foundation using the properties of Fourier images of finite functions]*. Vestnik MGSU, 2014, No.1, Pp.41-51.
5. Leonenko D.V. *Svobodnye kolebaniya trekhslonnykh tsilindricheskikh obolochek v uprugoj srede Pasternaka [Free Vibrations of Three-Layer Cylindrical Shells in an Elastic Pasternak Strade]*. Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov, 2013, No.4(25), Pp.57-59.
6. Slepyan L.I., Yakovlev Yu.S. *Integral'nye preobrazovaniya v nestatsionarnykh zadachakh mekhaniki [Integral transformations in non-stationary problems of mechanics]*. Leningrad, Sudostroenie, 1980, 344 p.
7. Kireenkov A.A., Fedotenkov G.V. *Model' silovogo kontakta kompozitnoj sfericheskoy obolochki s tvyordoj poverkhnost'yu s uchyotom kombinirovannogo anizotropnogo sukhogo treniya [Model of Force Contact of a Composite Spherical Shell with a Solid Surface Taking into Account Combined Anisotropic Dry Friction]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2021, Vol.27, No.4, Pp.558-569.
8. Kireenkov A.A., Fedotenkov G.V. *Dvizhenie kompozitnoj sfericheskoy obolochki po tvyordoj poverkhnosti s uchyotom kombinirovannogo sukhogo treniya [Motion of a Composite Spherical Shell on a Solid Surface Taking into Account Combined Dry Friction]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2020, Vol.26, No.3, Pp.327-340.
9. Serdyuk A.O., Serdyuk D.O., Fedotenkov G.V. *Nestatsionarnaya funktsiya progiba dlya neogranichennoj anizotropnoj plastiny [Unsteady bending function for an unlimited anisotropic plate]*. Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya "Fiziko-matematicheskie nauki", 2021, Vol.25, No.1, Pp.111-126.

10. Okonechnikov A.S., Fedotenkov G.V., Vahtrerova Y.A. *Unsteady motion of a rigid stamp along the boundary of an elastic half-space*. J. of the Balkan Tribological Association, 2021, Vol.27, No.3, Pp.343-358.
11. Serdyuk A.O., Serdyuk D.O., Fedotenkov G.V., Hein T.Z. *Green's function for an unbounded anisotropic kirchhoff-love plate*. J. of the Balkan Tribological Association, 2021, Vol.27, No.5, Pp.747-761.
12. Kireenkov A.A. *Further development of the theory of multicomponent dry friction*. Proceedings of the 6th International Conference on Coupled Problems in Science and Engineering. COUPLED PROBLEMS'2015, 2015, Pp.203-209.

Поступила в редакцию 30 сентября 2022 года.

Сведения об авторах:

Грицков Андрей Валерьевич – асп., ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия; e-mail: amonandrew@yandex.ru

Киреев Алексей Альбертович – с.н.с., ФГБУН Институт проблем механики РАН им. А.Ю. Ишлинского, г. Москва, Россия; e-mail: kireenk@ipmnet.ru, kireenk@mail.ru

Федотенков Григорий Валерьевич – проф., ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия; e-mail: greghome@mail.ru