

УДК 539.4  
EDN DDGOTC (<https://elibrary.ru/ddgotc>)



## ТРЕХСЛОЙНАЯ ПОЛОСА С ТОНКИМИ ВНЕШНИМИ СЛОЯМИ ИЗ СПЛАВА С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ И ВЯЗКОУПРУГИМ ВНУТРЕННИМ СЛОЕМ\*

Мовчан А.А.

*ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия*

### АННОТАЦИЯ

Исследовано механическое поведение трехслойной полосы с внешними тонкими слоями из сплава с памятью формы (СПФ) и внутренним вязкоупругим слоем. Принимаются простейшие кинематические гипотезы о равномерном распределении продольной деформации и напряжений по толщине внешних активных слоев и линейном распределении продольных деформации и напряжения по толщине внутреннего слоя. Сдвиговые, поперечные нормальные деформации, напряжения и поперечные сдвиги не учитываются. Для описания поведения вязкоупругого слоя используется модель стандартного линейного тела. Перед совмещением с внутренним слоем материал внешних слоев переводится в мартенситное состояние с растягивающей фазово-структурной деформацией  $\varepsilon_0$ . Предполагается, что при совмещении эта деформация не меняется, а напряжения в слоях после совмещения равны нулю. Рассматривается процесс нагрева одного (активного) внешнего слоя, сопровождающийся обратным термоупругим фазовым превращением в аустенитное состояние. В аналитическом виде получено решение соответствующей задачи в первом приближении без учета переменности упругих модулей СПФ при фазовом переходе, в несвязанной постановке и в предположении об отсутствии структурного превращения во внешних слоях.

Для случая равномерного по времени возрастания температуры активного слоя получены аналитические зависимости кривизны, средней деформации пакета, напряжений в активных слоях и параметров линейного распределения напряжений во внутреннем слое в виде функций от температуры активного слоя. Показано, что графики всех этих зависимостей расположены между двумя линейными асимптотиками. Первая соответствует решению в предположении об упругом поведении среднего слоя с модулем Юнга, равным мгновенному модулю вязкоупругого материала. К этой асимптотике стремится решение исходной задачи при стремлении к бесконечности скорости нагрева. Вторая соответствует решению в предположении об упругом поведении среднего слоя с модулем Юнга, равным длительному модулю вязкоупругого материала. К этой асимптотике решение исходной задачи сходится при стремлении скорости нагрева к нулю.

**Ключевые слова:** трехслойная полоса; вязкоупругий слой; модель Кельвина-Фойгхта; модуль мгновенный; модуль длительный; сплав с памятью формы; обратное превращение; актуатор

## THREE-LAYER STRIP WITH THIN OUTER LAYERS OF SHAPE MEMORY ALLOY AND VISCOELASTIC INNER LAYER

Movchan A.A.

\* Работа выполнена в рамках госбюджетной темы, государственная регистрация номер 121112200126-5 при частичной финансовой поддержке РФФИ проект №20-01-00240.

## ABSTRACT

The mechanical behavior of a three-layer strip with external thin layers of shape memory alloy (SMA) and an internal viscoelastic layer is investigated. The simplest kinematic hypotheses about the uniform distribution of longitudinal deformation stress over the thickness of the outer active layers and the linear distribution of longitudinal deformation and stress over the thickness of the inner layer are accepted. Shear, transverse normal deformations, stresses and transverse shear are not taken into account. A model of a standard linear body is used to describe the behavior of a viscoelastic layer. Before combining with the inner layer, the material of the outer layers is transferred to a martensitic state with an initial tensile phase – structural deformation. It is assumed that when combined, this deformation does not change, and the stresses in the layers after the combination are zero. The heating process of one (active) outer layer is considered, accompanied by an inverse thermoelastic phase transformation into an austenitic state. In an analytical form, a solution of the corresponding problem is obtained in the first approximation without taking into account the variability of the elastic modules of the SMA during the phase transition, in an uncoupled formulation and under the assumption that there is no structural transformation in the outer layers.

For the case of a time-uniform increase in the temperature of the active layer, the dependences of curvature, average deformation package, stresses in the active layers and the parameters of the linear distribution of stresses in the inner layer as functions of the temperature of the active layer are obtained. It is shown that the graphs of all these dependencies are located between two linear asymptotics. The first corresponds to the solution under the assumption of elastic behavior of the middle layer with Young's modulus equal to the instantaneous modulus of the viscoelastic material. The solution of the initial problem tends to this asymptotic with the tendency to infinity of the heating rate. The second corresponds to the solution under the assumption of the elastic behavior of the middle layer with a Young's modulus equal to the long-time modulus of a viscoelastic material. The solution of the initial problem converges to this asymptotic when the heating rate tends to zero.

**Keywords:** three-layer strip; viscoelastic layer; Kelvin-Voigt model; instantaneous module; long-time module; shape memory alloy; reverse transformation; actuator

## ВВЕДЕНИЕ

Поведение трехслойных композитных оболочек, пластин и балок, состоящих из упругих, вязкоупругих и упруго-пластических слоев исследовалось в работах [1-5]. Композиты, содержащие элементы (частицы, волокна, слои) из сплавов с памятью формы [6,7] и упругое связующее могут рассматриваться как интеллектуальные материалы (smart material) [8]. Поведение таких композитов исследовалось в работах [9-15]. Композитные материалы такого типа могут использоваться [16-18] для создания рабочих тел силовозбудителей или актуаторов [19,20]. Композиты с элементами из СПФ, содержащие связующее с пластическими свойствами, рассматривались в [21]. Учет вязких свойств связующего у таких композитов описан в [22], композиты с волокнами из СПФ и вязкоупругим связующим, рассматривались в [23]. Поведение трехслойной полосы с внешними слоями из СПФ и линейно-упругим средним слоем рассмотрено в [24].

Необходимо отметить, что использование в трехслойных пластинах с внешними слоями из СПФ среднего слоя с линейно-упругими свойствами

существенно уменьшает кинематические возможности соответствующего актуатора, поскольку СПФ, например, в случае никелида титана могут испытывать фазово-структурные и упругие деформации, достигающие до 10%, тогда как линейно-упругие деформации внутреннего слоя из обычных металлов ограничена сверху величиной 0.1%-0.2%. В соответствии с этим, данная работа, в отличие от [24], посвящена анализу поведения трехслойной полосы с внешними слоями из СПФ и полимерным вязкоупругим промежуточным слоем, достаточно деформативным, чтобы полностью использовать способности СПФ обратимо деформироваться по фазово-структурному механизму.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается трехслойная полоса с внешними слоями малой толщины  $h$ , выполненными из сплава с памятью формы (СПФ) типа никелида титана, и внутренним слоем из вязкоупругого материала толщины  $H$ , причем  $h \ll H \ll L$ , где  $L$  – длина полосы. Величина  $H$  сравнима с шириной полосы  $b$ . Внешние слои находятся первоначально в полностью мартенситном фазовом состоянии, имеют предварительную фазово-структурную растягивающую деформацию  $\varepsilon_0$ , и совмещаются с внутренним слоем без увеличения температуры, чтобы не допустить осуществления эффекта памяти формы в процессе совмещения. Считается, что после совмещения проскальзывание между внешними и внутренним слоем отсутствует, механических напряжений в слоях после совмещения нет. В данной работе рассматриваются процессы нагрева внешнего слоя через интервал температур обратного термоупругого фазового превращения  $A_s, A_f$ , сопровождающиеся эффектом памяти формы. Из-за малости толщины внешних слоев считается, что продольные напряжения и деформации распределены по толщине этих слоев равномерно. Предполагается, что продольные напряжения  $\sigma$  и деформации  $\varepsilon$  имеют линейное распределение по координате  $z$ , идущей по толщине внутреннего слоя

$$\sigma = \mu z + \sigma^0, \quad (1.1)$$

$$\varepsilon = \kappa z + \varepsilon^0, \quad (1.2)$$

а поперечными нормальными и касательными напряжениями в этом слое можно пренебречь. Материал внутреннего слоя описывается вязкоупругими определяющими соотношениями [25-27]. Используется модель Кельвина-Фойгхта (стандартного линейного тела) с определяющим соотношением

$$\dot{\sigma} + \lambda \sigma = E_m \left( \dot{\varepsilon} + \eta \varepsilon \right), \quad (1.3)$$

где  $E_m$  – мгновенный модуль (модуль внешней пружины соответствующей структурной модели [27]),

$$\lambda = \frac{E_1 + E_m}{\mu}, \quad \eta = \frac{E_1}{\mu}, \quad \lambda - \eta = \frac{E_m}{\mu} > 0, \quad (1.4)$$

$$E_\infty = E_m \frac{\eta}{\lambda} = \frac{1}{1/E_m + 1/E_1},$$

$E_1$  – модуль пружины внутреннего контура структурной модели, параллельной вязкому элементу,  $\mu$  – коэффициент вязкости вязкого элемента структурной

модели,  $E_\infty$  – длительный модуль вязкоупругого материала, который не зависит от параметра  $\mu$  вязкого элемента. Он в два раза меньше, чем среднее гармоническое величин модулей внешней и внутренней пружин структурной модели.

Для очень быстрых процессов  $\dot{\sigma} \gg \lambda \sigma$ ,  $\dot{\varepsilon} \gg \eta \varepsilon$  (что эквивалентно  $\lambda \rightarrow 0$ ,  $\eta \rightarrow 0$ ) уравнение (1.3) переходит в  $\dot{\sigma} = E_m \dot{\varepsilon}$ , т.е. справедливы упругие определяющие соотношения с мгновенным модулем вязкоупругого материала. Аналогичный результат получается, исходя из структурной схемы модели стандартного линейного тела. В рамках этой модели упругое поведение с модулем  $E_m$  будет иметь место, если положить  $\mu \rightarrow \infty$ , где  $\mu$  – параметр определяющего соотношения для вязкого элемента  $\sigma = \mu \dot{\varepsilon}$ . Действительно, в этом случае напряжение в вязком элементе при любой скорости деформации этого элемента стремится к  $\infty$ , и поэтому деформация контура, состоящего из параллельно соединенных упругого и вязкого элемента, равна нулю. Следовательно, вся деформация системы будет равна деформации внешнего упругого элемента, имеющего модуль  $E_m$ . При этом, согласно формулам (1.4), при  $\mu \rightarrow \infty$  получается  $\lambda \rightarrow 0$ ,  $\eta \rightarrow 0$ , как ранее и предполагалось.

Для предельно-медленных процессов  $\dot{\sigma} \ll \lambda \sigma$ ,  $\dot{\varepsilon} \ll \eta \varepsilon$  (что эквивалентно  $1/\lambda \rightarrow 0$ ,  $1/\eta \rightarrow 0$ ) получается  $\lambda \sigma = E_m \eta \varepsilon$ , или  $\sigma = E_\infty \varepsilon$ , т.е. справедливо упругое определяющее соотношение с длительным модулем Юнга. Тот же результат можно получить, если в структурной модели положить  $\mu \rightarrow 0$ . Действительно, в этом случае при любой скорости деформации вязкого элемента получается, что напряжение в этом элементе стремится к нулю. При этом деформация контура из вязкого и упругого элемента будет равна деформации входящего в контур упругого элемента, а напряжение в этом контуре должно быть равно напряжению в упругом элементе контура. Таким образом, вся модель будет эквивалентна двум последовательно соединенным пружинам, модуль одной из которых равен  $E_m$ . Модуль такой системы определяется формулой  $1/E = 1/E_m + 1/E_1 = 1/E_\infty$ .

Обзор моделей фазово-структурного деформирования СПФ приведен в [28]. Считается, что материал тонких слоев подчиняется объединенной модели фазового и структурного деформирования СПФ [29-32]. В данной работе предполагается, что напряжения в слоях из СПФ недостаточно велики для осуществления структурного механизма деформирования. Реономные свойства СПФ [33-35], из которого выполнены внешние слои, не учитываются, поскольку деформирование этих слоев в режиме мартенситной неупругости или сверхупругости не предполагается. Кроме того, пренебрегается объемным эффектом фазового механизма деформирования и чисто температурными деформациями в силу малости соответствующих эффектов. В этих условиях простейший одномерный вариант модели деформирования СПФ (случай нагрева при одноосном растяжении) сводится к следующим соотношениям

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^{ph}, \quad \varepsilon^e = \frac{\sigma}{E(q)}, \quad \frac{1}{E(q)} = \frac{1}{E_A} + \left( \frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) q,$$

$$d\varepsilon^{ph} = \frac{\varepsilon^{ph}}{q} dq, \quad q = \frac{A_f - T}{A_f - A_s}, \quad dq < 0. \quad (1.5)$$

Здесь  $d\varepsilon$ ,  $d\varepsilon^e$ ,  $d\varepsilon^{ph}$  – приращения полной деформации, а также части этого приращения, связанные с упругим механизмом и процессом фазового перехода;  $\sigma$  – напряжение;  $q$  – объемная доля мартенситной фазы, для которой принимается простейшая линейная зависимость от температуры  $T$  (1.5);  $E(q)$ ,  $E_A$ ,  $E_M$  – зависящий от величины  $q$  модуль Юнга СПФ, и его значения, характерные для аустенитного и мартенситного состояния; уравнения (1.5) соответствует обратному фазовому превращению в отсутствие структурного перехода. В данной работе переменность упругих модулей при фазовом переходе не учитывается, предполагается, что модуль Юнга СПФ  $E_{SM}$  фиксирован. Вычисления будут проведены, как для  $E_{SM} = E_A$ , так и для  $E_{SM} = E_M$ .

## 2. ВЫВОД РАЗРЕШАЮЩИХ УРАВНЕНИЙ

Процессы, происходящие в трехслойной полосе определяются следующими функциями времени:  $\sigma_1$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\sigma_{10}$ ,  $\sigma_{20}$ ,  $\mu$ ,  $\sigma_0$ ,  $\kappa$ ,  $\varepsilon^0$ . Здесь  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  – напряжения, а  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  – деформации в верхнем (активном) и нижнем слоях из СПФ;  $\sigma_{10}$ ,  $\sigma_{20}$  – продольные напряжения на верхней и нижней поверхностях внутреннего слоя;  $\mu$ ,  $\sigma_0$  – параметры линейного распределения напряжений в среднем слое (1.1);  $\kappa$ ,  $\varepsilon_0$  – параметры линейного распределения продольных деформаций по внутреннему слою (1.2), которые можно рассматривать как кривизну и среднюю продольную деформацию всей трехслойной системы. Для получения разрешающей системы уравнений будут использованы: уравнения равновесия, условия совместности деформаций внешних и внутреннего слоев, а также определяющие соотношения для материала внешних и внутреннего слоев. Используемый путь решения задачи сводится к тому, чтобы исходя из перечисленных выше условий выразить все искомые функции через две из них, а именно через  $\mu$  и  $\sigma_0$ , а для этих функций получить разрешающую систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Уравнения равновесия позволяют выразить напряжения во внешних слоях через параметры  $\mu$  и  $\sigma_0$ , определяющие распределение напряжений во внутреннем слое. Интегрирование распределения напряжений (1.1) по площади сечения пакета приводит к выражению для продольной силы  $P$

$$P = [H\sigma_0 + (\sigma_1 + \sigma_2)h]b. \quad (2.1)$$

Интегрирование по площади сечения пакета выражения для напряжения  $\sigma$  (1.1), умноженного на поперечную координату  $z$ , дает выражение для изгибающего момента  $M$

$$M = \left[ \mu \frac{H^3}{12} + \frac{h(H+h)}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \right] b. \quad (2.2)$$

Считается, что в процессе нагрева активных слоев внешние силы на трехслойную балку не действуют

$$P = M = 0. \quad (2.3)$$

Отсутствует также поперечная нагрузка, что позволяет без нарушения условий равновесия принять гипотезу о равенстве нулю поперечных сдвигов во внутреннем слое. Подстановка (2.1) и (2.2) в (2.3) и решение полученной системы позволяет выразить напряжения в активных слоях через параметры распределения напряжений  $\mu$  и  $\sigma_0$  во внутреннем слое

$$\sigma_1 = -\frac{1}{2} \left( \frac{\mu H}{6\delta(1+\delta)} + \frac{\sigma_0}{\delta} \right), \quad \sigma_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\mu H}{6\delta(1+\delta)} - \frac{\sigma_0}{\delta} \right). \quad (2.4)$$

Условия совместного деформирования внешних и внутреннего слоев вместе с распределением деформации во внутреннем слое (1.2)  $0.5\kappa H + \varepsilon^0 = \varepsilon_1$ ,  $-0.5\kappa H + \varepsilon^0 = \varepsilon_2$  дают возможность получить выражения параметров распределения деформаций во внутреннем слое через деформации внешних слоев

$$\kappa = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{H}, \quad \varepsilon^0 = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}. \quad (2.5)$$

Процесс начинается с нагрева и соответствующего обратного превращения в первом (верхнем) активном слое при условии неизменной температуры и фазового состояния второго (нижнего) активного слоя. Интегрирование первого соотношения (1.5) при начальном условии  $\varepsilon^{ph}(1) = \varepsilon_0$  дает  $\varepsilon^{ph}(q) = \varepsilon_0 q$ . Во втором активном слое фазовый переход не имеет места. Начальным состоянием для рассматриваемого процесса, в котором напряжения в элементах полосы отсутствуют, является состояние с начальной деформацией  $\varepsilon_0$  во внешних слоях. Для правильного учета упругого поведения внешних слоев их деформации  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  должны отсчитываться именно от этого ненапряженного, но деформированного состояния. Поэтому для рассматриваемого процесса справедливы соотношения, выражающие деформации слоев из СПФ через напряжения в этих слоях

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_{SM}} + \varepsilon_0 q - \varepsilon_0, \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_{SM}}. \quad (2.6)$$

Подставляя (2.6) в (2.5) находим

$$\kappa = -\frac{\varepsilon_0(1-q)}{H} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{HE_{SM}}, \quad \varepsilon^0 = -\frac{\varepsilon_0(1-q)}{2} + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2E_{SM}}. \quad (2.7)$$

Подставляя (2.4) в (2.7), получаем

$$\kappa = -\frac{\varepsilon_0(1-q)}{H} - \frac{\mu}{6\delta(\delta+1)E_{SM}}, \quad \varepsilon^0 = -\frac{\varepsilon_0(1-q)}{2} - \frac{\sigma_0}{2\delta E_{SM}}. \quad (2.8)$$

Подставляя сами формулы (1.1) и (1.2) и результаты их дифференцирования в вязкоупругое определяющее уравнение (1.3) внутреннего слоя и приравнявая свободные слагаемые правой и левой частей, а также коэффициенты при  $z$  правой и левой частей, получаем

$$\dot{\mu} + \lambda\mu = E_m \left( \dot{\kappa} + \eta\kappa \right), \quad (2.9)$$

$$\dot{\sigma}_0 + \lambda\sigma_0 = E_m \left( \dot{\varepsilon}^0 + \eta\varepsilon^0 \right). \quad (2.10)$$

Подставляя в правую часть (2.9) выражения для  $\kappa$  (2.7) и  $\dot{\kappa}$ , получаем

$$\dot{\mu} + \lambda\mu = E_m \left[ \frac{\varepsilon_0 \left( \dot{q} - \eta(1-q) \right)}{H} - \frac{\dot{\mu} + \eta\mu}{6\delta(\delta+1)E_{SM}} \right]. \quad (2.11)$$

Поставляя в правую часть (2.10) выражения  $\varepsilon^0$  (2.7) и  $\dot{\varepsilon}^0$ , получаем

$$\dot{\sigma}_0 + \lambda\sigma_0 = E_m \left[ \frac{\varepsilon_0 \left( \dot{q} - \eta(1-q) \right)}{2} - \frac{\dot{\sigma}_0 + \eta\sigma_0}{2\delta E_{SM}} \right]. \quad (2.12)$$

Соотношения (2.11), (2.12) представляют собой два независимых разрешающих уравнения, каждое для своей неизвестной функции  $\mu$  и  $\sigma^0$ . Умножая (2.11) на  $H$ , деля на  $E_m$  и переходя к безразмерной искомой функции

$$M = H\mu/E_m \quad (2.13)$$

получаем

$$\dot{M} + \lambda M = \varepsilon_0 \left( \dot{q} - \eta(1-q) \right) - e_1^m \left( \dot{M} + \eta M \right). \quad (2.14)$$

Здесь  $e_1^m = \frac{E_m}{6E_{SM}\delta(1+\delta)}$ . Умножая (2.12) на 2, деля на  $E_m$  и переходя к безразмерной искомой функции

$$S = 2\sigma_0/E_m \quad (2.15)$$

получаем

$$\dot{S} + \lambda S = \varepsilon_0 \left( \dot{q} - \eta(1-q) \right) - e_2 \left( \dot{S} + \eta S \right). \quad (2.16)$$

Здесь  $e_2^m = \frac{E_m}{2E_{SM}\delta}$ .

Рассматривается линейное возрастание температуры со временем  $T = A_s + kt$  и простейшая линейная аппроксимация диаграммы перехода (1.5). Тогда

$$q = 1 - \frac{kt}{A_f - A_s}, \quad \dot{q} = -\frac{k}{A_f - A_s}, \quad \dot{q} - \eta(1-q) = -\frac{k(1+\eta t)}{A_f - A_s}$$

и уравнения (2.14), (2.16) принимают вид

$$\frac{dM}{dt} + A_1 M = B_1 + \beta_1 t, \quad (2.17)$$

$$A_1 = \eta + \frac{\lambda - \eta}{R_1} > \eta, \quad B_1 = \frac{-k\varepsilon_0}{(A_f - A_s)R_1} < 0, \quad \beta_1 = \eta B_1 < 0,$$

$$R_1 = 1 + e_1^m > 1,$$

$$\frac{dS}{dt} + A_2 S = B_2 + \beta_2 t, \quad (2.18)$$

$$A_2 = \eta + \frac{\lambda - \eta}{R_2} > \eta, \quad B_2 = \frac{-k\varepsilon_0}{(A_f - A_s)R_2} < 0, \quad \beta_2 = \eta B_2 < 0,$$

$$R_2 = 1 + e_2^m > 1.$$

Решения уравнений (2.17), (2.18) удовлетворяющие нулевым начальным условиям при  $t = 0$  записываются единообразно

$$M = \frac{B_1}{A_1} \left[ \left( 1 - \frac{\eta}{A_1} \right) (1 - \exp(-A_1 t)) + \eta t \right], \quad (2.19)$$

$$S = \frac{B_2}{A_2} \left[ \left( 1 - \frac{\eta}{A_2} \right) (1 - \exp(-A_2 t)) + \eta t \right]. \quad (2.20)$$

Поскольку  $B_i < 0$ ,  $A_i > 0$ ,  $1 - \frac{\eta}{A} = \frac{\lambda - \eta}{\lambda - \eta + R_i} > 0$ , то обе величины  $M$  и  $S$ ,

согласно (2.19) и (2.20), с течением времени монотонно растут по модулю с затуханием от нуля в отрицательную сторону.

Остальные искомые величины выражаются через  $M$  и  $S$  следующим образом.

Безразмерная кривизна  $K$  и параметр средней деформации  $\varepsilon_0$ , согласно (2.8) определяются по формулам  $H\kappa = K = -(\varepsilon_0 r + M e_1)$ ,  $\varepsilon^0 = 0.5(\varepsilon_0 r - S e_2)$ , где  $r = 1 - q = kt / (A_f - A_s) = t / \Delta t$  – безразмерный параметр времени процесса нагрева, равный отношению времени с момента начала этого процесса  $t$  к продолжительности нагрева через полный интервал температур обратного превращения  $\Delta t$ .

Безразмерные напряжения в активных слоях согласно (2.4) равны

$$S_1 = \frac{\sigma_1}{E_{SM}} = -0.5(e_1^m M + e_2^m S), \quad S_2 = \frac{\sigma_2}{E_{SM}} = 0.5(e_1^m M - e_2^m S). \quad (2.21)$$

Полные деформации в активных слоях, а также на верхней и внутренней поверхности среднего слоя равны  $\varepsilon_1 = S_1 - \varepsilon_0 r$ ,  $\varepsilon_2 = S_2$ .

Безразмерные напряжения на верхней  $\Sigma_1$  и нижней  $\Sigma_2$  поверхности внутреннего вязкоупругого слоя согласно (1.1) при  $z = H/2$  и  $z = -H/2$  равны

$$\Sigma_1 = \frac{\sigma_{10}}{E_m} = \frac{1}{2}(S + M), \quad \Sigma_2 = \frac{\sigma_{20}}{E_m} = \frac{1}{2}(S - M). \quad (2.22)$$

Для предельно быстрых процессов  $\lambda \rightarrow 0$ ,  $\eta \rightarrow 0$  и поэтому  $A_1 = \eta + \frac{\lambda - \eta}{R_1} \rightarrow 0$ ,  $A_2 = \eta + \frac{\lambda - \eta}{R_2} \rightarrow 0$ . В результате из (2.19), (2.20) получается для предельно быстрых процессов

$$M = B_1 t = -\frac{r \varepsilon_0}{1 + e_1^m}, \quad S = B_2 t = -\frac{r \varepsilon_0}{1 + e_2^m}. \quad (2.23)$$

Для предельно медленных процессов  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $\eta \rightarrow \infty$ ,

$A_i = \eta + \frac{\lambda - \eta}{1 + e_i^m} = \frac{e_i^m \eta + \lambda}{1 + e_i^m} \rightarrow \infty$ . Пользуясь тем, что при  $A_i \rightarrow \infty$  экспоненциальные слагаемые в (2.19), (2.20) стремятся к нулю, получаем

$$M = \frac{B_1(\lambda - \eta)}{R_1(A_1)^2} + \frac{B_1}{A_1} \eta t, \quad S = \frac{B_2(\lambda - \eta)}{R_2(A_2)^2} + \frac{B_2}{A_2} \eta t. \quad (2.24)$$

Первые слагаемые правых частей (2.24) стремятся к нулю и поэтому

$$M = -\frac{r\varepsilon_0}{e_1^m + E_m/E_\infty}, \quad S = -\frac{r\varepsilon_0}{e_2^m + E_m/E_\infty}. \quad (2.25)$$

### 3. СЛУЧАЙ УПРУГОГО СРЕДНЕГО СЛОЯ

Решение задачи существенно упрощается в предположении об упругом поведении среднего слоя. В этом случае для внутреннего слоя выполняется  $\sigma = E\varepsilon$ , где  $E$  – модуль Юнга материала этого слоя. Подставляя в это равенство (1.1) и (1.2) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $z$ , получаем

$$\mu = E\kappa, \quad \sigma_0 = E\varepsilon^0. \quad (3.1)$$

Подставляя (3.1) в (2.4) получаем

$$\sigma_1 = -\frac{E}{2} \left( \frac{K}{6\delta(1+\delta)} + \frac{\varepsilon^0}{\delta} \right), \quad \sigma_2 = \frac{E}{2} \left( \frac{K}{6\delta(1+\delta)} - \frac{\varepsilon^0}{\delta} \right).$$

Тогда для деформаций внешних слоев из (2.6) следует

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_{SM}} = \frac{E}{2E_{SM}\delta} \left[ \frac{H\kappa}{6(\delta+1)} - \varepsilon^0 \right], \quad (3.2)$$

$$\varepsilon_1 = -\frac{E}{2E_{SM}\delta} \left[ \frac{K}{6(1+\delta)} + \varepsilon^0 \right] - \varepsilon_0 r. \quad (3.3)$$

Из (3.2), (3.3) получается

$$K = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = -\frac{E}{E_{SM}\delta} \frac{K}{6(\delta+1)} - \varepsilon_0 r.$$

Решая это уравнение относительно  $K$ , находим

$$K = -\frac{r\varepsilon_0}{1+e_1}, \quad |K|_{\max} = \frac{\varepsilon_0}{1+e_1}, \quad e_1 = \frac{E}{6\delta(1+\delta)E_{SM}}, \quad (3.4)$$

т.е. модуль кривизны растет пропорционально времени до максимального значения при  $r=1$ . Для средней деформации пакета из (3.2), (3.3) получаем уравнение

$$\varepsilon^0 = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} = -\frac{E_m}{2E_{SM}\delta} \varepsilon^0 - \frac{1}{2} \varepsilon_0 r,$$

решая которое находим

$$\varepsilon^0 = -\frac{0.5r\varepsilon_0}{1+e_2}, \quad |\varepsilon^0|_{\max} = \frac{0.5\varepsilon_0}{1+e_2}, \quad e_2 = \frac{E}{2\delta E_{SM}}. \quad (3.5)$$

Согласно (3.4), (3.5) максимальные значения модуля кривизны и средней деформации растут пропорционально  $\varepsilon_0$  и увеличиваются нелинейно с ростом  $\delta = h/H$  и  $E_{SM}/E$ . Если  $h \rightarrow 0$  при  $H = const$ , то эти величины стремятся к нулю. С ростом  $E_{SM}$  при прочих равных условиях (в том числе, при переходе от мартенситного значения модуля СПФ к аустенитному) величины  $|H\kappa|_{\max}$  и  $|\varepsilon^0|_{\max}$  растут. Для безразмерных параметров распределения напряжений во внутреннем слое получается

$$M = \frac{H\mu}{E} = K = -\frac{r\varepsilon_0}{1+e_1}, \quad S = \frac{2\sigma^0}{E} = 2\varepsilon^0 = -\frac{r\varepsilon_0}{1+e_2}. \quad (3.6)$$

Формулы (3.6) идентичны выражениям (2.23), полученным для тех же величин при решении задачи с вязкоупругим средним слоем при предельно быстром процессе нагрева. Остальные искомые величины для решения в предположении упругого поведения среднего слоя выражаются через  $M$  и  $S$  по тем же формулам, которые ранее были выведены для случая вязкоупругого поведения среднего слоя. Отсюда следует, что решения задачи в форме зависимостей от температуры активного слоя для всех искомых величин в предположении упругого поведения среднего слоя являются линейными асимптотиками, к которым стремятся решения соответствующих задач, предполагающих вязкоупругое поведение среднего слоя при скорости его нагрева, стремящейся к бесконечности.

Несколько сложнее решается вопрос о предельной асимптотике решений для вязкоупругого среднего слоя, соответствующей предельно малым скоростям нагрева. Согласно результатам, полученным при изучении однонаправленных композитов с волокнами из СПФ и вязкоупругим связующим [23], соответствующие асимптотики можно получить, взяв решение задачи для упругого связующего с модулем Юнга, равным длительному модулю вязкоупругого связующего  $E = E_\infty$ . Однако легко видеть, что для безразмерных величин  $M$  и  $S$  это правило не выполняется. Действительно, если в упругие решения (3.6) подставить  $E = E_\infty$ , то получатся следующие выражения

$$M = -\frac{r\varepsilon_0}{1 + \frac{E_\infty}{6\delta(1+\delta)E_{SM}}}, \quad S = -\frac{r\varepsilon_0}{1 + \frac{E_\infty}{2\delta E_{SM}}}, \quad (3.7)$$

В то же время, если взять для тех же величин выражения, получаемые из решения вязкоупругой для внутреннего слоя задачи при стремлении скорости нагрева к нулю, то получается, согласно (2.25)

$$M = -\frac{r\varepsilon_0}{\frac{E_m}{6\delta(1+\delta)E_{SM}} + \frac{E_m}{E_\infty}}, \quad S = -\frac{r\varepsilon_0}{\frac{E_m}{2\delta E_{SM}} + \frac{E_m}{E_\infty}}. \quad (3.8)$$

т.е. величины, отличные от (3.7). Отличие состоит в том, что в решениях для предельно медленного процесса при вязкоупругом поведении связующего (3.8), наряду с длительным модулем  $E_\infty$  фигурирует величина мгновенного модуля  $E_m$ , которой нет в формулах упругого решения (3.7).

Связано это несоответствие с тем обстоятельством, что безразмерные величины  $M$  и  $S$  из размерных величин  $\mu$  и  $\sigma_0$  получаются по формулам (2.13), (2.15), содержащим операцию деления на  $E_m$ . Для размерных величин  $\mu$  и  $\sigma_0$ , как по формулам упругого решения (3.7), в которых после умножения на  $E_m$  проводится замена  $E_m$  на  $E_\infty$ , так и по формулам решения для вязкоупругого среднего слоя при предельно медленном нагреве (3.8), в которых после умножения на  $E_m$  никаких замен проводить не следует, получаются одинаковые выражения

$$\mu = \frac{E_m}{H} M = -\frac{r\varepsilon_0}{H} \frac{E_\infty}{1+e_1^\infty}, \quad \sigma_0 = \frac{E_m}{2} S = -\frac{1}{2} \frac{r\varepsilon_0 E_\infty}{1+e_1^\infty},$$

$$e_1^\infty = \frac{E_\infty}{6\delta(1+\delta)E_{SM}}, \quad e_2^\infty = \frac{E_\infty}{2\delta E_{SM}}$$

т.е. справедливо решение упругой задачи, но с длительным модулем  $E_\infty$  вместо мгновенного  $E_m$ . Аналогичный вывод получается для остальных размерных параметров, определяемых при решении задачи. В результате получается общий вывод: зависимости всех размерных искомых величин от температуры в случае вязкоупругого среднего слоя при стремлении скорости нагрева к нулю имеют линейную по температуре асимптотику, соответствующую решению задачи в предположении упругого поведения среднего слоя с модулем Юнга, соответствующим длительному модулю вязкоупругого материала  $E_\infty$ .

Для безразмерных величин напряжений в верхнем и нижнем активных слоях, в случае упругого поведения среднего слоя справедливы формулы (2.21). Для размерных величин этих напряжений получаем

$$\sigma_1 = \frac{E_{SM}\varepsilon_0 r}{2} \left( \frac{e_1}{1+e_1} + \frac{e_2}{1+e_2} \right), \quad \sigma_2 = \frac{E_{SM}\varepsilon_0 r}{2} \left( \frac{e_2}{1+e_2} - \frac{e_1}{1+e_1} \right).$$

Поскольку  $e_1 > 0$ ,  $e_2 > 0$ ,  $e_2 > e_1$  и функция  $e/(1+e)$  возрастает с ростом  $e$ , то всегда выполняется  $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$ , причем с ростом  $\delta$  величины  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  возрастают. Максимальных значений оба напряжения достигают в точке конца обратного превращения  $r=1$ , и для  $\sigma_1$  это максимальное значение выражается в виде формулы

$$\sigma_1^{\max} = \frac{\varepsilon_0}{2} \left( \frac{[6\delta(1+\delta)]^{-1}}{E^{-1} + [6E_{SM}\delta(1+\delta)]^{-1}} + \frac{(2\delta)^{-1}}{E^{-1} + (2E_{SM}\delta)^{-1}} \right). \quad (3.9)$$

Согласно (3.9) с ростом  $E_{SM}$  (в том числе, с переходом от мартенситного значения модуля к аустенитному) величина  $\sigma_1^{\max}$  растет. Рост  $E$  (в частности, переход от предельно медленных процессов к предельно быстрым) также приводит к возрастанию  $\sigma_1^{\max}$ . Таким образом, при оценке работоспособности внешних слоев с величиной дислокационного предела текучести СПФ необходимо сравнивать величину  $\sigma_1^{\max}$ , определенную для аустенитного значения модуля СПФ и мгновенного модуля материала среднего слоя.

Важной характеристикой трехслойной балки являются напряжения  $\sigma_{10}$  и  $\sigma_{20}$  на верхней и нижней поверхностях внутреннего слоя. Согласно соотношениям (2.22) получается

$$\sigma_{10} = -0.5E\varepsilon_0 r \left( \frac{1}{1+e_1} + \frac{1}{1+e_2} \right), \quad \sigma_{20} = 0.5E\varepsilon_0 r \left( \frac{1}{1+e_1} - \frac{1}{1+e_2} \right). \quad (3.10)$$

Согласно (3.10) поскольку  $0 < e_1 < e_2$ , то  $\sigma_{10} < 0$ ,  $\sigma_{20} > 0$ , т.е. напряжение на верхней границе внутреннего слоя является сжимающим, а на нижней границе – растягивающим. При этом  $|\sigma_{10}| > |\sigma_{20}|$ . Наибольшие по модулю значения обоих напряжений достигаются в последней точке процесса обратного превращения и определяются соотношениями

$$|\sigma_{10}|^{\max} = -0.5\varepsilon_0 \left( \frac{1}{(E)^{-1} + [6E_{SM}\delta(1+\delta)]^{-1}} + \frac{1}{(E)^{-1} + (2E_{SM}\delta)^{-1}} \right), \quad (3.11)$$

$$|\sigma_{20}|^{\max} = 0.5\varepsilon_0 \frac{3\delta + 2}{6\delta(1+\delta) \left( E_{SM}/E + (2\delta)^{-1} \right) \left( E_{SM}/E + [6\delta(1+\delta)]^{-1} \right)}. \quad (3.12)$$

Согласно (3.11), (3.12)  $|\sigma_{10}|^{\max} > |\sigma_{20}|^{\max}$  и величина  $|\sigma_{10}|^{\max}$  монотонно возрастает с ростом величины  $\delta = h/H$ . С ростом  $E$  или  $E_{SM}$  при прочих равных условиях (в частности, при переходе от длительного модуля вязкоупругого слоя к мгновенному, т.е. при росте скорости нагрева, или с переходом от мартенситного значения модуля СПФ к аустенитному) величина  $|\sigma_{10}|^{\max}$  возрастает. В то же время величина  $\sigma_{20}^{\max}$  с ростом  $E$  возрастает, а с ростом  $E_{SM}$  убывает.

#### 4. НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О НАГРЕВЕ ОДНОГО АКТИВНОГО СЛОЯ В ТРЕХСЛОЙНОЙ ПОЛОСЕ

Все изложенные ниже результаты получены для следующих значений параметров:  $E_m = 2500$  МПа,  $H = 0.04$  м,  $h = 0.005$  м,  $\eta = 0.32$  мин<sup>-1</sup>,  $\lambda = 2$  мин<sup>-1</sup>,  $\varepsilon = 6\%$ . Величина модуля Юнга слоев из СПФ принималась равной, либо  $E_{SM} = E_A = 84000$  МПа, либо  $E_{SM} = E_M = 28000$  МПа. На рис.1,2 приведены графики зависимости от температуры кривизны  $\kappa$  трехслойной балки и ее средней деформации  $\varepsilon_0$  при обратном превращении в верхнем слое для значений длительности процесса нагрева через интервал температур обратного превращения, увеличивающихся для линий, идущих сверху вниз. Решение получено для  $E_{SM} = 28000$  МПа. Рассмотрены случаи очень медленного нагрева  $\Delta t = 200000$  мин. и очень быстрого нагрева  $\Delta t = 0.0002$  мин., а также промежуточные случаи  $\Delta t = 2, 0.5$  мин. Самые нижние линии, соответствующие  $\Delta t = 200000$  мин., с точностью до трех знаков после запятой, совпадают с упругими решениями задачи (прямолинейные асимптотики) для случая использования в качестве модуля вязкоупругого слоя длительного модуля  $E_\infty$ . Самые верхние линии, соответствующие  $\Delta t = 0.0002$ , с точностью до трех знаков после запятой, совпадают с решениями упругой задачи (прямолинейная асимптотика) при использовании в качестве модуля вязкоупругого слоя мгновенного модуля этого материала  $E_m$ . Как видно, с увеличением скорости нагрева значение кривизны и средней деформации для каждого значения температуры уменьшаются. При этом относительное изменение кривизны при переходе от предельно большой скорости нагрева к предельно малой в 3 раза меньше, чем относительное изменение средней деформации.

Согласно рис.1,2, все множество соответствующих графиков заключено между двумя прямолинейными асимптотиками, соответствующими предельно быстрым (сверху) и предельно медленным (снизу) процессам нагрева. При этом линии, соответствующие промежуточным значениям  $\Delta t$  для начала процесса нагрева, касаются асимптотики, соответствующей предельно быстрым процессам,

или, что то же, упругому решению для промежуточного слоя с мгновенным значением модуля Юнга. Для достаточно больших времен и температур, близких к  $A_f$ , особенно для достаточно больших значений  $\Delta t$ , графики выходят на другую линейную асимптоту, параллельную прямой линии, соответствующую предельно медленным процессам, или, что то же, упругому решению, в котором значение модуля Юнга принимается равным длительному модулю вязкоупругого среднего слоя.

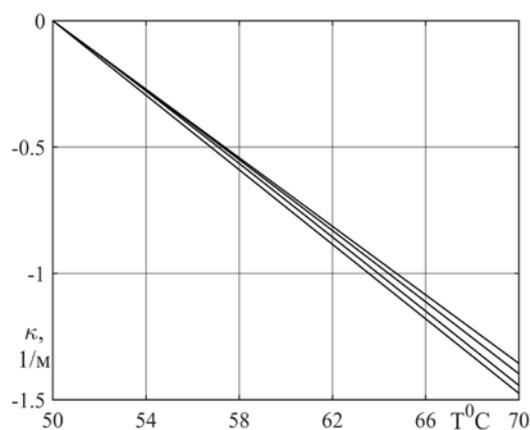


Рис.1.

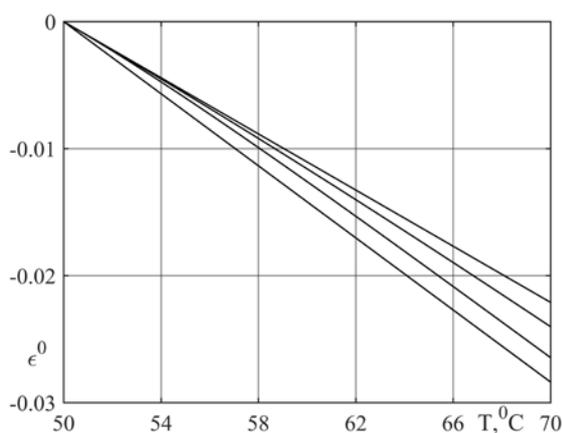


Рис.2.

В описанных выше решениях не учитывается переменность упругого модуля СПФ при фазовом переходе (решения получены для мартенситного значения модуля СПФ). Чтобы оценить ошибку, связанную с этим предположением, та же задача, но только для весьма малых ( $\Delta t = 200000$  мин., тонкие линии) и для весьма больших ( $\Delta t = 0.0002$  мин., толстые линии) значений скорости нагрева решалась, как для мартенситного (сплошные линии) так и для аустенитного (штриховые линии) значения модуля Юнга, см. рис.3,4. Как видно, с ростом значения модуля СПФ (переход от сплошных линий к штриховым) кривизна и средняя деформация по модулю возрастают, причем для высоких скоростей нагрева (толстые линии) разница при изменении модуля существенно больше, чем для низких (тонкие линии). В то же время, разница между высокой и низкой скоростью нагрева (толстые и тонкие линии) больше для низкого значения модуля (сплошные линии), чем для высокого (штриховые линии).

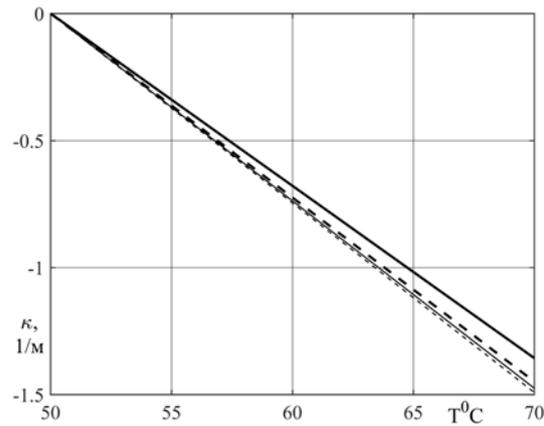


Рис.3.

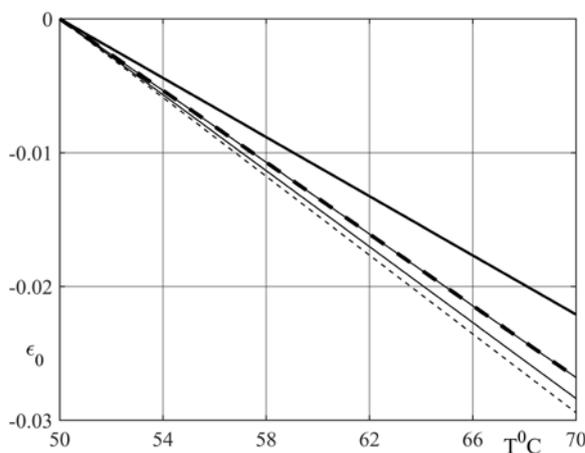


Рис.4.

В [15,23] приведены решения задачи о поведении однонаправленного композита с волокнами из СПФ и упругим или вязкоупругим связующим. Установлено, что решения, учитывающие переменность модуля Юнга СПФ в процессе обратного превращения, переходят от значений, соответствующих решениям, полученным для постоянного мартенситного значения модуля в начальной точке превращения, к решениям, соответствующим постоянному аустенитному значению модуля в конечной точке обратного перехода. Таким образом, переход от мартенситного значения модуля СПФ к аустенитному влияет на значения кинематических характеристик пластины (кривизну и среднюю деформацию), увеличивая значения этих характеристик, особенно для весьма быстрых процессов нагрева. Следовательно, кинематические параметры процесса (кривизна, средняя деформация) возрастают с уменьшением скорости нагрева и увеличением модуля Юнга СПФ, т.е. с переходом от мартенситного значения модуля к аустенитному.

На рис.5 приведены графики зависимости от температуры напряжения  $\sigma_1$  в верхнем слое из СПФ при его нагревании через интервал температур обратного фазового превращения при различных значениях скорости нагрева. Сплошные линии (номера без штрихов) соответствуют  $E_{SM} = 28000$  МПа, штриховые –  $E_{SM} = 84000$  МПа. Как видно, здесь влияние скорости существенно выше, чем для кривизны или средней деформации. Имеются две прямолинейные асимптотики – для чрезвычайно медленных процессов (соответствует линии 5,

построенной для  $\Delta t = 20000$  мин.) и для очень быстрых процессов (линии 1) построенные для  $\Delta t = 0.0002$ ). Кривые, соответствующие промежуточным скоростям нагрева (линия 2 для  $\Delta t = 0.2$ , линия 3 для  $\Delta t = 2$  и линия 4 для  $\Delta t = 20$ ) касаются кривой мгновенного нагрева в точке  $T = A_s$ , однако с ростом температуры отклоняются вниз от этой прямой. Для небольших скоростей нагрева графики с ростом температуры выходят на асимптоты с наклоном, соответствующим графику предельно медленного нагружения (линии 4 и 5). Как видно, переход к аустенитному значению модуля СПФ приводит к росту напряжения, тем большему, чем больше скорость нагрева. Для медленных процессов (кривые 4 и 5) графики для  $E_{SM} = 28000$  МПа и  $E_{SM} = 84000$  МПа неразличимы.

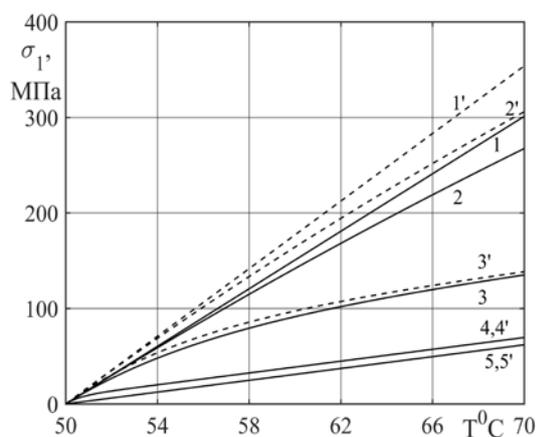


Рис.5.

Полученные решения позволяют оценить работоспособность верхнего активного слоя из СПФ. При этом следует ориентироваться на штриховую линию номер 1', поскольку процесс нагрева слоя соответствует переходу в полностью аустенитное состояние, а нагревать тонкий слой из СПФ можно достаточно быстро, например, путем пропускания электрического тока. Согласно рис.5 максимальное напряжение в таком процессе составляет около 350 МПа, что вполне приемлемо для никелида титана, прошедшего соответствующую предварительную термомеханическую обработку [36-38]. С использованием экспериментально полученных зависимостей  $\sigma$  от  $\varepsilon$  при одноосном растяжении образцов из никелида титана в режиме мартенситной неупругости [39] и соотношений объединенной модели фазово-структурного деформирования СПФ [31,32], учитывающей эффект перекрестного упрочнения СПФ [40], можно установить, что использованное при анализе предположение об отсутствии структурного перехода в материале верхнего активного слоя в данном случае выполняется «на пределе», поскольку для  $\varepsilon_0 = 6\%$  в никелиде титана напряжение начала структурного перехода составляет как раз  $\sigma^{st} = 350$  МПа.

Аналогичные графики для напряжения во втором активном слое приведены на рис.6, нумерация и вид кривых такие же, как и на рис.5. Для предельно-медленного процесса (кривая №5) линии, соответствующие аустенитному и мартенситному значениям модуля, совпали. Сравнение рис.5 и 6 свидетельствуют о том, что напряжения в обоих слоях являются растягивающими, причем напряжение  $\sigma_1$  в активном слое существенно (более

чем в два раза для рассматриваемого случая) превосходят напряжение  $\sigma_2$  в пассивном слое.

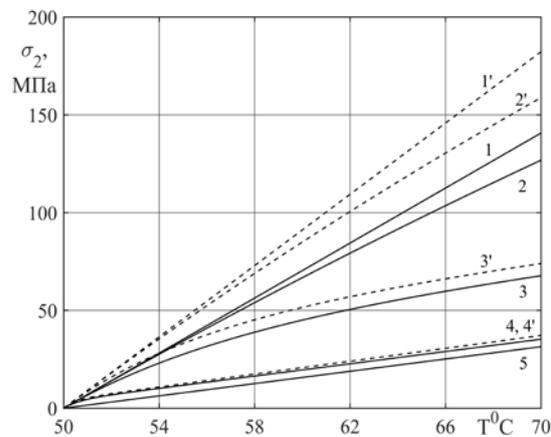


Рис.6.

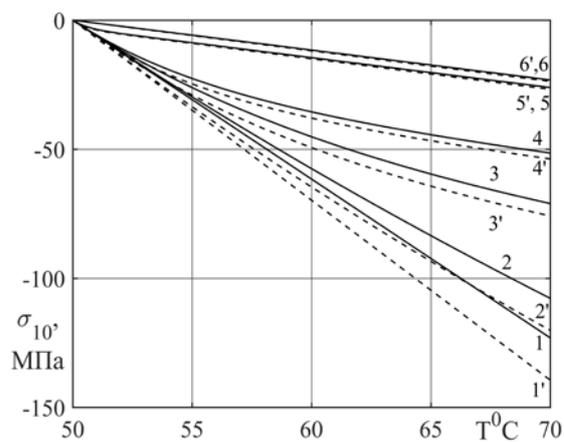


Рис.7.

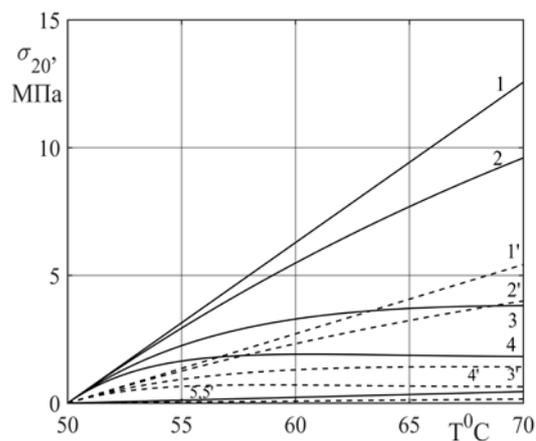


Рис.8.

На рис.7 и 8 приведены графики зависимости от температуры напряжений  $\sigma_{10}$  и  $\sigma_{20}$  на верхней и нижней границах внутреннего слоя, соответственно. Обозначения линий на этих рисунках аналогичны обозначениям на рис.5 и 6, за исключением того, что на рис.7 и 8 под номерами 4 идут кривые, соответствующие  $\Delta t = 2$ , кривая 5 на рис.7 соответствует  $\Delta t = 20$ , а кривые 6 –

$\Delta t = 20000$ . Согласно рис.7 напряжения на верхней границе слоя  $\sigma_{10}$  являются сжимающими и достаточно велики по модулю, причем при увеличении модуля Юнга СПФ (в частности, при переходе от мартенситного значения модуля к аустенитному)  $|\sigma_{10}|$  возрастает. В то же время напряжение  $\sigma_2$  на нижней границе внутреннего слоя является растягивающим, на порядок меньше по величине, чем  $|\sigma_1|$  и с ростом модуля Юнга СПФ убывает.

Полученные результаты позволяют оценить работоспособность материала внутреннего слоя. Для рассматриваемых здесь параметров материал этого слоя должен выдерживать без разрушения сжимающие напряжения, меньшие 140 МПа (быстрый нагрев, аустенитное значение модуля СПФ) и растягивающие напряжения величиной 12.5 МПа (быстрый нагрев, мартенситное значение модулей СПФ). Результаты, приведенные на рис.7 и 8, позволяют сделать вывод о том, что при использовании, например для изготовления среднего слоя, материала дефлон, процесс деформирования которого определяется принятыми выше значениями констант  $E_m, \lambda, \eta$  [41], нельзя допускать скорость нагрева активного слоя выше 10°C/мин. (линия 3 на рис.7), поскольку предел прочности дефлона при сжатии и комнатной температуре составляет 80 МПа [42].

## ВЫВОДЫ

Установлено, что в процессе обратного фазового перехода в верхнем слое трехслойной балки с внешними слоями из СПФ и вязкоупругим внутренним слоем модули всех деформационных и силовых характеристик пакета монотонно возрастают. С ростом скорости нагрева модули напряжений возрастают, модули деформационных характеристик падают. Решения в виде графиков зависимости для всех размерных величин от температуры при стремлении скорости нагрева к бесконечности асимптотически стремятся к решениям задач для упругого поведения среднего слоя с модулем Юнга, равным мгновенному модулю вязкоупругого материала. При стремлении скорости нагрева к нулю наблюдается асимптотическое стремление к соответствующим решениям задач для упругого поведения среднего слоя с модулем, равным длительному модулю вязкоупругого материала. Решения для промежуточных скоростей нагрева в случае вязкоупругого слоя для всех рассмотренных величин лежат между двумя этими асимптотиками. Модули всех исследованных величин, кроме напряжений на нижней поверхности среднего слоя, увеличиваются при переходе от мартенситного значения модуля Юнга СПФ к аустенитному. Для напряжения на нижней поверхности внутреннего слоя наблюдается обратная картина.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э.И., Чулков П.П. *Устойчивость и колебания трехслойных оболочек*. – М.: Машиностроение, 1973. – 180 с.
2. Кобелев В.Н., Коварский Л.М., Тимофеев С.И. *Расчет трехслойных конструкций*. – М.: Машиностроение, 1984. – 304 с.
3. Паймушин В.Н. *Нелинейная теория трехслойных оболочек с трансверсально-мягким наполнителем, имеющих участки расслоений и контурную подкрепляющую диафрагму* // Прикладная математика и механика. – 2018. – Т.82. – №1. – С.44-57.

4. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. *Термоупругопластическое деформирование трехслойного стержня со сжимаемым наполнителем* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2017. – Т.23. – №3. – С.419-434.
5. Старовойтов Э.И., Захарчук Ю.В. *Изгиб упругопластической круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2020. – Т.26. – №1. – С.58-73.
6. Lagoudas D.C. (Editor). *Shape Memory Alloys. Modeling and Engineering Applications*. – Department of Aerospace Engineering Texas A&M University College Station TX, USA, 2008. – 446 p. DOI: 10.1007/978-0-387-47685-8.
7. Lexcellent C. *Shape-memory alloys handbook* // London: ISTE Ltd and John Wiley & Sons Inc., 2013. – 379 p.
8. Michaud V. *Can shape memory alloy composites be smart?* // Scripta materialia. – 2004. – Vol.50. – Pp.249-253.
9. Jia J., Rogers C.A. *Formulation of the mechanical model for composites with embedded SMA actuator* // Trans. ASME. J. of the Mechanical Design. – 1992. – Vol.114. – No.4. – Pp.670-676.
10. Kabir M.-Z. and Tehrani B.T. *Closed-form Solution for Thermal, Mechanical and Thermo-mechanical Buckling and Post-buckling of SMA Composite Beams* // Composite Structures. – 2017. – Vol.168. – Pp.535-548.
11. Ren Y., Sun S. *An analytical model for shape memory alloy fiber-reinforced composite thin-walled beam undergoing large deflection* // Advances in Mechanical Engineering. – 2015. – Vol.7. – No.3. – Pp.1-14.
12. Lagoudas Dimitris C., Tadjbar Iradj G. *Active flexible rods with embedded SMA fibers* // Smart Mater. and Struct. – 1992. – Vol.1. – No.2. – Pp.162-167.
13. Zhang Y., Zhao Y.-P. *A study of composite beam with shape memory alloy arbitrarily embedded under thermal and mechanical loadings* // Materials & Design. – 2007. – Vol.28. – No.4. – Pp.1096-1115.
14. Rogers C.A., Liang G., Jia J. *Behavior of shape memory alloy reinforced composite plates* / In: Proc. of the 30-th Structural, Structural Dynamics and Materials (SDM) conference. – 1989. – Part 4. – Pp.2011-2017.
15. Movchan A.A., Chernov M.I. *Closed two-way shape memory effect in unidirectional composite with shape memory alloy fibers and elastic matrix* // Composites: Mechanics, Computations, Applications. – 2019. – Vol.10. – No.2. – Pp.135-156.
16. Smith C., Villanueva A., Joshi K., Tadesse Y., Priya S. *Working principle of bio-inspired shape memory alloy composite actuators* // Smart Materials and Structures. – 2011. – Vol.20. – No.1. – 012001.
17. Ghomshei M.M. *Finite Element Modeling of Shape Memory Alloy Composite Actuators: Theory and Experiment* // J. of Intelligent Material Systems and Structures. – 2001. – Vol.12. – No.11. – Pp.761-773.
18. Gordaninejad F., Wu W. *A two dimensional shape memory alloy/elastomer actuator* // Intern. J. of Solids and Structures. – 2001. – Vol.38. – Pp.3393-3409.
19. Duerig T.W., Stockel D., Keeley A. *Actuator and work production devices* / In: Engineering aspects of shape memory alloys. – Butterworth - Heinemann Ltd. 1990. – Pp.181-194.
20. Kheirikhah M., Rabiee S., Edalat M. *A review of shape memory alloy actuators in robotics* / Proc. of RoboCup 2010. – Berlin, 2011. – Pp. 206-217.

21. Armstrong W.D., Lorentzen T. *The self – thermal – plastic response of TiNi shape memory alloy fiber actuated metal matrix composites* // Intern. J. of Solids and Structures. – 2001. – Vol.38. – Pp.7029-7044.
22. Cherkaoui M., Sun Q.P., Song G.Q. *Micromechanics modeling of composite with ductile matrix and shape memory alloy reinforcement* // Intern. J. of Solids and Structures. – 2000. – Vol.37. – Pp.1577-1594.
23. Мовчан А.А., Чернов М.И. *Влияние вязкоупругих свойств связующего на поведение однонаправленного композита с волокнами из сплава с памятью формы* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2020. – Т.26. – №3. – С.287-312.
24. Мовчан А.А., Казарина С.А. *Механика активных композитов, содержащих волокна или слои из сплавов с памятью формы* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1996. – Т.2. – №2. – С.29-48.
25. Кристенсен Р. *Введение в теорию вязкоупругости*. – М.: Мир, 1974. – 338 с.
26. Бленд Д.Р. *Теория линейной вязкоупругости*. – М.: Мир, 1965. – 200 с.
27. Работнов Ю.Н. *Элементы наследственной механики твердых тел*. – М.: Наука, 1977. – 384 с.
28. Cisse C., Zaki W., Zineb T.B. *A review of constitutive models and modeling techniques for shape memory alloys* // Intern. J. of Plasticity. – 2016. – Vol.76. – Pp.244-284.
29. Мовчан А.А. *Модель влияния фазового механизма деформирования на структурный в сплавах с памятью формы* // Деформация и разрушение материалов. – 2019. – №7. – С.14-23.
30. Мовчан А.А. *Феноменологическая модель изменения фазово-структурных деформаций в сплавах с памятью формы* // Известия российской академии наук. Механика твердого тела. – 2020. – №4. – С.140-151.
31. Мовчан А.А. *Объединенная модель фазово-структурного деформирования сплавов с памятью формы* // Деформация и разрушение материалов. – 2020. – №11. – С.2-10.
32. Мовчан А.А. *Модель неупругого деформирования сплавов с памятью формы* // Деформация и разрушение материалов. – 2021. – №3. – С.8-17.
33. Xinghua Zhang, PingFeng, Yongjun He, Tongxi Yu, Qingping Sun. *Experimental study on rate dependence of macroscopic domain and stress hysteresis in NiTi shape memory alloy strips* // Intern. J. of Mechanical Sciences. – 2010. – Vol.52. – Pp.1660-1670.
34. Songye Zhu, Yunfeng Zhang. *A thermomechanical constitutive model for superelastic SMA wire with strain-rate dependence* // Smart Material and Structure. – 2007. – Vol.16. – Pp.1696-1707.
35. Мовчан А.А., Казарина С.А., Тант З.А. *Реономные свойства сплавов с памятью формы, проявляемые в опытах на мартенситную неупругость и сверхупругость* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2010. – Т.16. – №3. – С.305-312.
36. Андронов И.Н., Вербаховская Р.А., Данилов А.Н., Корепанова В.С., Пластинина Е.В. *Переходные деформационные процессы и эффект ТМО в сплаве ТН-1, инициированные термоциклированием при переменных напряжениях* // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2010. – Т.76. – №10. – С.28-31.
37. Андронов И.Н., Вербаховская Р.А., Корепанова В.С., Коновалов М.Н., Пластинина Е.В. *Влияние характера предварительного деформирования*

- на псевдоупругие свойства никелида титана // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2011. – Т.77. – №10. – С.50-55.
38. Андронов И.Н., Вербаховская Р.А., Данилов А.Н., Корепанова В.С., Пластинина Е.В. *Влияние повторной термомеханической деформации на ЭПФ сплава ТН-1* // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2011. – Т.77. – №4. – С.54-57.
  39. Мовчан А.А., Казарина С.А., Сильченко А.Л. *Экспериментальная идентификация модели нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях* // Деформация и разрушение материалов. – 2018. – №12. – С.2-11.
  40. Мовчан А.А., Сильченко А.Л., Казарина С.А. *Экспериментальное исследование и теоретическое моделирование эффекта перекрестного упрочнения сплавов с памятью формы* // Деформация и разрушение материалов. – 2017. – №3. – С.20-27.
  41. Люкшин Б.А., Панин С.В., Корниенко Л.А., Люкшин П.А., Бочкарева С.А., Матольгина Н.Ю., Гришаева Н.Ю., Реутов Ю.Я., Шилько С.В., Машков Ю.К., Плескачевский Ю.М., Кропотин О.В., Черноус Д.А. *Дисперсно-наполненные полимерные композиты технического и медицинского назначения*. – М.: Изд-во СО РАН, 2017. – 311 с.
  42. Кацнельсон М.Ю., Балаев Г.А. *Полимерные материалы. Свойства и применение*. – Л.: Химия, 1982. – 317 с.

## REFERENCES

1. Grigolyuk E.I., Chulkov P.P. *Ustojchivost' i kolebaniya trekhslojnykh obolochek [Stability and vibrations of three-layer shells]*. Moskva, Mashinostroenie, 1973, 180 p.
2. Kobelev V.N., Kovarskij L.M., Timofeev S.I. *Raschet trekhslojnykh konstruksij [Analysis of three-layer structures]*. Moskva, Mashinostroenie, 1984, 304 p.
3. Paimushin V.N. *Nonlinear theory of sandwich shells with a transversely soft core containing delamination zones and edge support diaphragm*. Mechanics of Solids, 2018, Vol.53, No.1, Pp.76-87.
4. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. *Termouprugoplasticheskoe deformirovanie trekhslojnogo sterzhnya so szhimaemym zapolnitelem [Thermoelastoplastic deformation of a three-layer bar with a compressible filler]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2017, Vol.23, No.3, Pp. 419-434.
5. Starovoitov E.I., Zakharchuk Yu.V. *Izgib uprugoplasticheskoy krugovoj trekhslojnoj plastiny so szhimaemym zapolnitelem [Bending of an elastoplastic circular three-layer plate with a compressible filler]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2020, Vol.26, No.1, Pp.58-73.
6. Lagoudas D.C. (Editor). *Shape Memory Alloys. Modeling and Engineering Applications*. Department of Aerospace Engineering Texas A&M University College Station TX, USA, 2008, 446 p. DOI: 10.1007/978-0-387-47685-8.
7. Lexcellent C. *Shape-memory alloys handbook*. London, ISTE Ltd and John Wiley & Sons Inc., 2013, 379 p.
8. Michaud V. *Can shape memory alloy composites be smart?* Scripta materialia, 2004, Vol.50, Pp.249-253.

9. Jia J., Rogers C.A. *Formulation of the mechanical model for composites with embedded SMA actuators*. Trans. ASME. J. of the Mechanical Design, 1992, Vol.114, No.4, Pp.670-676.
10. Kabir M.-Z. and Tehrani B.T. *Closed-form Solution for Thermal, Mechanical and Thermo-mechanical Buckling and Post-buckling of SMA Composite Beams*. Composite Structures, 2017, Vol.168, Pp.535-548.
11. Ren Y., Sun S. *An analytical model for shape memory alloy fiber-reinforced composite thin-walled beam undergoing large deflection*. Advances in Mechanical Engineering, 2015, Vol.7, No.3, Pp.1-14.
12. Lagoudas Dimitris C., Tadjbar Iradj G. *Active flexible rods with embedded SMA fibers*. Smart Mater. And Struct., 1992, Vol.1, No.2, Pp.162-167.
13. Zhang Y., Zhao Y.-P. *A study of composite beam with shape memory alloy arbitrarily embedded under thermal and mechanical loadings*. Materials & Design, 2007, Vol.28, No.4, Pp.1096-1115.
14. Rogers C.A., Liang G., Jia J. *Behavior of shape memory alloy reinforced composite plates*. In: Proceeding of the 30-th Structural, Structural Dynamics and Materials (SDM) conference, 1989, Part 4, Pp.2011-2017.
15. Movchan A.A., Chernov M.I. *Closed two-way shape memory effect in unidirectional composite with shape memory alloy fibers and elastic matrix*. Composites: Mechanics, Computations, Applications, 2019, Vol.10, No.2, Pp.135-156.
16. Smith C., Villanueva A., Joshi K., Tadesse Y., Priya S. *Working principle of bio-inspired shape memory alloy composite actuators*. Smart Materials and Structures, 2011, Vol.20, No.1, 012001.
17. Ghomshei M.M. *Finite Element Modeling of Shape Memory Alloy Composite Actuators: Theory and Experiment*. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 2001, Vol.12, No.11, Pp.761-773.
18. Gordaninejad F., Wu W. *A two dimensional shape memory alloy/elastomer actuator*. International Journal of Solids and Structures, 2001, Vol.38, Pp.3393-3409.
19. Duerig T.W., Stockel D., Keeley A. *Actuator and work production devices*. In: Engineering aspects of shape memory alloys. Butterworth - Heinemann Ltd., 1990, Pp.181-194.
20. Kheirikhah M., Rabiee S., Edalat M. *A review of shape memory alloy actuators in robotics*. Proc. of RoboCup 2010, Berlin, 2011, Pp. 206-217.
21. Armstrong W.D., Lorentzen T. *The self – thermal – plastic response of TiNi shape memory alloy fiber actuated metal matrix composites*. International Journal of Solids and Structures, 2001, Vol.38, Pp.7029-7044.
22. Cherkaoui M., Sun Q.P., Song G.Q. *Micromechanics modeling of composite with ductile matrix and shape memory alloy reinforcement*. International Journal of Solids and Structures, 2000, Vol.37, Pp.1577-1594.
23. Movchan A.A., Chernov M.I. *Vliyaniye vyazkoprugikh svoystv svyazuyushhego na povedeniye odnonapravlennoy kompozita s voloknami iz splava s pamyat'yu formy [Influence of the viscoelastic properties of the binder on the behavior of a unidirectional composite with shape memory alloy fibers]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2020, Vol.26, No.3, Pp.287-312.
24. Movchan A.A., Kazarina S.A. *Mekhanika aktivnykh kompozitov, soderzhashchikh volokna ili sloi iz splavov s pamyat'yu formy [Mechanics of active composites, fibers or layers of alloys with shape memory]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2020, Vol.26, No.3, Pp.313-324.

- containing fibres or layers from shape memory alloys]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 1996, Vol.2, No.2, Pp.29-48.
25. Christensen R.M. *Theory of viscoelasticity. An Introduction*. New York and London, Academic Press, 1971, 384 p.
  26. Bland D.R. *The theory of Linear Viscoelasticity*. Oxford, 1960, 125 p.
  27. Rabotnov Y.N. *Elementy nasledstvennoj mekhaniki tverdyh tel [Elements of hereditary mechanics of solids]*. Moskva, Nauka, 1977, 384 p.
  28. Cisse C., Zaki W., Zineb T.B. *A review of constitutive models and modeling techniques for shape memory alloys*. *International Journal of Plasticity*, 2016, Vol.76, Pp.244-284.
  29. Movchan A.A. *Model for the Effect of the Phase Mechanism of Deformation on the Structural Mechanism in Shape Memory Alloys*. *Russian Metallurgy (Metally)*, 2020, No.4, Pp.282-290.
  30. Movchan A.A. *Phenomenological Model of Changes in Phase-Structural Deformations in Shape Memory Alloys*. *Mechanics of Solids*, 2020, Vol.55, No.4, Pp.573-583.
  31. Movchan A.A. *Joint Model for the Phase-Structural Deformation of Shape Memory Alloys*. *Russian Metallurgy (Metally)*, 2021, No.4, Pp.333-340.
  32. Movchan A.A. *Shape memory alloys inelastic straining model*. *Russian Metallurgy (Metally)*, 2021, No.10, Pp.1203-1212.
  33. Xinghua Zhang, PingFeng, Yongjun He, Tongxi Yu, Qingping Sun. *Experimental study on rate dependence of macroscopic domain and stress hysteresis in NiTi shape memory alloy strips*. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2010, Vol.52, Pp.1660-1670.
  34. Songye Zhu, Yunfeng Zhang. *A thermomechanical constitutive model for superelastic SMA wire with strain-rate dependence*. *Smart Material and Structure*, 2007, Vol.16, Pp.1696-1707.
  35. Movchan A.A., Kazarina S.A., Tant Z.A. *Reonomnye svojstva splavov s pamyat'yu formy, proyavlyaemye v opytakh na martensitnyuyu neuprugost' i sverkhuprugost' [Rheonomic properties of shape memory alloys shown in experiments on martensitic inelasticity and superelasticity]*. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2010, Vol.16, No.3, Pp.305-312.
  36. Andronov I.N., Verbahovskaya R.A., Danilov A.N., Korepanova V.S., Plastinina E.V. *Perekhodnye deformatsionnye protsessy i ehffekt TMO v splave TN-1, initsirovannyye termotsiklirivaniem pri peremennykh napryazheniyakh [Transient deformation processes and TMP effect in TN-1 alloy initiated by thermal cycling at variable stresses]*. *Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov*, 2010, Vol.76, No.10, Pp.28-31.
  37. Andronov I.N., Verbahovskaya R.A., Korepanova V.S., Konovalov M.N., Plastinina E.V. *Vliyanie kharaktera predvaritel'nogo deformirovaniya na psevdouprugie svojstva nikelida titana [Influence of the nature of preliminary deformation on the pseudoelastic properties of titanium nickelide]*. *Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov*, 2011, Vol.77, No.10, Pp.50-55.
  38. Andronov I.N., Verbahovskaya R.A., Danilov A.N., Korepanova V.S., Plastinina E.V. *Vliyanie povtornoj termomekhanicheskoy deformatsii na EHPF splava TN-1 [The effect of repeated thermomechanical deformation on the SME of the TN-1 alloy]*. *Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov*, 2011, Vol.77, No.4, Pp.54-57.

39. Movchan A.A., Kazarina S.A., Sil'chenko A.L. *Experimental Identification of a Nonlinear Deformation Model for a Shape Memory Alloy during Phase and Structural Transformations*. Russian Metallurgy (Metally), 2019, No.4, Pp.301-308.
40. Movchan A.A., Sil'chenko A.L., Kazarina S.A. *Experimental Study and Theoretical Simulation of the Cross Hardening Effect in Shape Memory Alloys*. Russian Metallurgy (Metally), 2017, No.10, Pp.779-784.
41. Lyukshin B.A., Panin S.V., Kornienko L.A., Lyukshin P.A., Bochkareva S.A., Matolygina N.Yu., Grishaeva N.Yu., Reutov Yu.Ya., Shil'ko S.V., Mashkov Yu.K., Pleskachevskij Yu.M., Kropotin O.V., Chernous D.A. *Dispersno-napolnennye polimernye kompozity tekhnicheskogo i meditsinskogo naznacheniya [Dispersed-filled polymer composites for technical and medical purposes]*. Moskva, Izdatel'stvo SO RAN, 2017, 311 p.
42. Katsnelson M.Yu., Balaev G.A. *Polimernye materialy. Svoystva i primeneniye [Polymeric materials. Properties and applications]*. Leningrad, Khimiya, 1982, 317 p.

Поступила в редакцию 19 октября 2022 года.

---

Сведения об авторе:

Мовчан Андрей Александрович – д.ф.-м.н., проф., гл.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: [movchan47@mail.ru](mailto:movchan47@mail.ru)