

УДК 539.4  
EDN QDVAJR (<https://elibrary.ru/qdvajr>)



## ОПИСАНИЕ МАРТЕНСИТНОЙ НЕУПРУГОСТИ ПОСЛЕ ОРИЕНТИРОВАННОГО ПРЕВРАЩЕНИЯ С УЧЕТОМ РАЗВИТИЯ МАРТЕНСИТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В РАМКАХ ОБЪЕДИНЕННОЙ МОДЕЛИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ СПЛАВОВ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ\*

Гаганова Н.В.

*ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова»,  
г. Москва, Россия*

### АННОТАЦИЯ

Для описания мартенситной неупругости после ориентированного превращения применяется объединенная модель фазово-структурного деформирования сплавов с памятью формы с неинтегральным параметром упрочнения. Модель описывает как фазовый, так и структурный механизмы изменения неупругой деформации, а также влияние первого механизма на второй с учетом изотропного и трансляционного упрочнения.

В большинстве существующих моделей учитывается только процесс образования новых мартенситных мезо-элементов, но не учитывается процесс развития мезо-элементов, образованных ранее. Между тем эксперименты показывают, что развитие мартенситных элементов может заметно влиять на значения деформаций. Учет этого фактора необходим, чтобы модель количественно и качественно правильно описывала явление ориентированного превращения, а также процессы, в которых прямое термоупругое превращение происходит при ступенчато или плавно уменьшающихся напряжениях.

Рассмотрено распространение объединенной модели фазово-структурного деформирования сплавов с памятью формы с неинтегральным параметром упрочнения на случай учета развития мартенситных элементов. Приведено моделирование мартенситной неупругости после ориентированного превращения для пропорционального нагружения с учетом изотропного и трансляционного упрочнения. Показано, что критическое значение напряжений, при котором начинается развитие деформаций по структурному механизму после прямого превращения, в данной объединенной модели не зависит от учета развития мартенситных элементов, что согласуется с опытными данными. При этом учет развития мартенситных элементов значительно влияет на величину фазово-структурных деформаций, а также на радиус и положение центра поверхности нагружения.

**Ключевые слова:** сплавы с памятью формы; фазовые и структурные превращения; мартенситная неупругость; ориентированное превращение; изотропное упрочнение; трансляционное упрочнение

## DESCRIPTION OF MARTENSITIC INELASTICITY AFTER ORIENTED TRANSFORMATION BASED ON THE COMBINED MODEL OF SHAPE MEMORY ALLOYS DEFORMATION CONSIDERING DEVELOPMENT OF THE MARTENSITIC ELEMENTS

Gaganova N.V.

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №20-01-00240.

## ABSTRACT

The description of martensitic inelasticity after oriented transformation is based on the combined model of phase-structural deformation of shape-memory alloys with a non-integral hardening parameter. The model describes both the phase and structural mechanisms of inelastic deformation, as well as the influence of the first mechanism on the second, taking into account both isotropic and translational hardening.

The majority of the existing models consider the formation of new martensitic meso-elements, disregarding the development of meso-elements formed earlier. Meanwhile, experiments show that the development of martensitic elements can significantly affect deformations. This factor is necessary for describing the phenomenon of oriented transformation and the other processes in which thermoelastic transformation from austenite to martensite occurs at stepwise or smoothly decreasing stresses.

The article considers the extension of the combined model with a non-integral hardening parameter, considering the development of martensitic elements. The martensitic inelasticity after oriented transformation under proportional loading is modelled. The solution considers isotropic and translational hardening. In the considered model the critical stress value for martensitic inelasticity after phase transformation does not depend on the development of martensitic elements, which is consistent with experimental data. At the same time, the development of martensitic elements significantly affects the values of phase-structural deformations and the radius and position of the loading surface center.

**Keywords:** shape memory alloys; phase and structural transformations; oriented transformation; isotropic hardening; translational hardening

## ВВЕДЕНИЕ

Представительный объем сплавов с памятью формы, таких как никелид титана, может состоять из структур двух разных типов – низкосимметричной мартенситной и высокосимметричной аустенитной [1-4]. При понижении температуры происходит переход от аустенитной кристаллической решетки к мартенситной, который называют прямым фазовым переходом. Если прямой фазовый переход происходит без механических напряжений, то формирующиеся мартенситные элементы ориентированы хаотично, и общая деформация формоизменения равна нулю. В ином случае приложенные напряжения определяют преимущественную ориентацию формирующихся ячеек, и в образце кроме упругой деформации накапливается также деформация формоизменения прямого превращения, которая может достигать 8-9%. Экспериментально было установлено, что для подобного фазового механизма накопления деформаций не характерно явление упрочнения [4,5].

При определенных условиях также возможен структурный механизм деформирования сплавов с памятью формы за счет переориентации ранее сформированных мартенситных ячеек и повышение степени их ориентированности [1-4]. Для структурного механизма в отличие от фазового характерно как изотропное [1,2], так и трансляционное упрочнение [5-7]. Как показывают результаты экспериментов, деформирование по фазовому механизму также влияет на степень упрочнения: в [8,9] описано явление перекрестного упрочнения. Интенсивность фазово-структурной деформации

ограничена сверху некоторой величиной, которую можно определить экспериментально [10,11].

В [12,13] была предложена объединенная модель сплавов с памятью формы с интегральным параметром упрочнения, позволяющая учесть особенности фазового и структурного механизмов деформирования, а также влияние первого механизма на второй. Однако использование интегральных параметров упрочнения, таких как работа напряжений на неупругих деформациях или параметра Одквиста, приводит к противоречиям с экспериментальными данными – при циклическом нагружении никелида титана параметр Одквиста может достигать достаточно больших величин [7]. В [14] было предложено перейти к неинтегральному параметру изотропного упрочнения, в качестве которого используется максимальное значение интенсивности фазово-структурной деформации представительного объема за всю историю существования его мартенситной части. В [15] предполагается, что изотропное упрочнение определяется максимальным значением интенсивности фазово-структурной деформации только мартенситной части представительного объема, что приводит к новой формулировке уравнения поверхности нагружения.

Экспериментально было доказано, что формирующиеся во время прямого фазового перехода мартенситные элементы продолжают увеличиваться в размерах при дальнейшем понижении температуры, сохраняя при этом свою первоначальную ориентацию [16]. Таким образом, если в некоторый момент прямого превращения под нагрузкой снять приложенные напряжения и продолжить прямое превращение, то накопление деформаций по фазовому механизму продолжится, но с меньшей интенсивностью. Мартенситные элементы, образующиеся после снятия нагрузки, будут ориентированы хаотично, но мартенситные элементы, образованные до снятия нагрузки продолжают развиваться и вносить вклад в накопление деформаций. В большинстве существующих моделей развитие мартенситных элементов не учитывается, тем не менее, эксперименты показывают, что оно может заметно влиять на значения деформаций [17-19]. В [20] вводится специальная материальная функция, определяющая соотношение между процессами зарождения и развития мартенситных элементов в зависимости от объемной доли мартенсита, которая позже появляется в определяющих соотношениях для деформирования по фазовому механизму [3]. В данной работе рассматривается расширение модели [15] на случай учета роста мартенситных элементов. Аналогичное расширение моделей с интегральным параметром упрочнения [12,13] было описано в [21,22], где показано, что ведение специальной материальной функции необходимо для моделирования описанного выше явления ориентированного превращения, а также значительно влияет на результаты моделирования при наличии этапов разгрузки или действия убывающих напряжений.

## 1. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Определяющие соотношения модели аналогичны соотношениям, введенным в [15]. Приращение девиатора фазово-структурных деформаций  $d\varepsilon_{ij}^{phst'}$  складывается из приращения за счет фазового  $d\varepsilon_{ij}^{ph'}$  и за счет структурного  $d\varepsilon_{ij}^{st'}$  механизмов

$$d\varepsilon_{ij}^{phst'} = d\varepsilon_{ij}^{ph'} + d\varepsilon_{ij}^{st'}. \quad (1)$$

Приращение деформаций по фазовому механизму определяется зависимостями

$$d\varepsilon_{ij}^{ph'} = \frac{3}{2} \rho_1 \frac{S'_{ij}}{S_i} \varphi_1(S_i) (1 - qf(q)) dq + f(q) d\varepsilon_{ij}^{phst'} dq, \quad dq > 0, \quad (2)$$

$$d\varepsilon_{ij}^{ph'} = \frac{\varepsilon_{ij}^{phst'}}{q} dq, \quad dq < 0, \quad (3)$$

где  $q$  – объемная доля мартенсита,  $f(q)$  – материальная функция, определяющая соотношение между процессами зарождения и развития мартенситных элементов, которая удовлетворяет ограничениям  $0 \leq f(q) \leq 1/q$ ;  $\varphi_1(S_i)$  – интегральная функция распределения интенсивности микронапряжений в представительном объеме СПФ в аустенитном фазовом состоянии,  $\sigma'_{ij}$  и  $S'_{ij}$  – девиаторы напряжений и активных напряжений.

Согласно [15], предполагается, что изотропное упрочнение определяется максимальным за всю историю процесса значением интенсивности собственной фазово-структурной деформации мартенситной части представительного объема  $\varepsilon_i^M$ . Используя правило смеси, можно выразить  $\varepsilon_i^M$  через интенсивность собственной фазово-структурной деформации  $\varepsilon_i^{phst}$ :  $\varepsilon_i^{phst} : \varepsilon_i^{phst} = q\varepsilon_i^M + (1-q)\varepsilon_i^A = q\varepsilon_i^M$ . Соотношение для радиуса поверхности нагружения  $S^*$ , учитывающее влияние как фазового, так и структурного переходов, формулируется в виде

$$\rho_2 \varphi_2(S^*) = \max(\varepsilon_i^M) = \max\left(\frac{\varepsilon_i^{phst}}{q}\right), \quad (4)$$

где  $\varphi_2(x)$  – интегральная функция распределения интенсивности микронапряжений в представительном объеме СПФ в мартенситном фазовом состоянии. Предполагается, что функции  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  дифференцируемы,  $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = 0$  при  $x \leq 0$ , монотонно возрастают и асимптотически стремятся к 1 при  $x \rightarrow +\infty$ .

Изменение деформации по структурному механизму происходит лишь в случае, когда точка, соответствующая напряженному состоянию, находится на поверхности нагружения, радиус которой определяется соотношением (4). Также считается справедливым ассоциированный закон

$$d\varepsilon_{ij}^{st} = d\lambda S_{ij}, \quad \text{при } d\lambda > 0 \text{ и } S_i = S^*. \quad (5)$$

Трансляционное упрочнение учитывается с помощью уравнений

$$\sigma'_{ij} = S_{ij} + r_{ij}, \quad (6)$$

$$dr_{ij} = g d\left[\frac{\varepsilon_{ij}^{phst}}{q}\right], \quad g > 0, \quad (7)$$

где  $r_{ij}$  – координаты центра поверхности нагружения в пространстве девиатора напряжений,  $g$  – постоянная материала, определяющая трансляционное упрочнение.

Аналогично [15] априори предполагается, что изменение центра поверхности нагружения происходит только при деформировании по структурному механизму. В рамках этого предположения (7) можно заменить на

$$qdr_{ij} = gd\varepsilon_{ij}^{st}. \quad (8)$$

## 2. ЗАКОН ТЕЧЕНИЯ

Для формулировки закона течения для деформирования по структурному механизму необходимо получить выражение для множителя  $d\lambda$ . Для этого необходимо продифференцировать соотношение (4). Предполагая, что условия активного нагружения выполнены, рассмотрим два случая.

Если максимальное значение отношения  $\varepsilon_i^{phst}/q$ , стоящего в правой части (4) под знаком максимизации, достигается в текущей точке процесса, причем в этой точке  $d(\varepsilon_i^{phst}/q) > 0$ , то уравнение поверхности нагружения (4) можно переписать в виде

$$q\rho_2\varphi_2(S^*) = \varepsilon_i^{phst}. \quad (9)$$

Дифференцируя (9) и используя для приращения деформаций по фазовому механизму (2) в случае прямого фазового перехода, (3) в случае обратного фазового перехода и (5) для приращения деформаций по структурному механизму, можно получить линейное уравнение для  $d\lambda$ . При указанных условиях в случае прямого фазового перехода выражение для  $d\lambda$  имеет вид

$$d\lambda = \frac{R_1 + R_q}{R_2}, \quad (10)$$

$$R_1 = \frac{3}{2} q \rho_2 \varphi_2'(S_i) \frac{S_{ij} d\sigma'_{ij}}{S_i},$$

$$R_2 = \frac{2}{3} \frac{\varepsilon_{kl} S_{kl}}{\varepsilon_i} + S_i \rho_2 \varphi_2'(S_i) g,$$

$$R_q = (1 - qf(q)) \left( \rho_2 \varphi_2(S) - \rho_1 \frac{\varepsilon_{kl} S_{kl}}{\varepsilon_i S_i} \varphi_1(S_i) \right) dq.$$

В случае обратного фазового перехода

$$d\lambda = \frac{R_1}{R_2}. \quad (11)$$

Заметим, что при обратном фазовом переходе учет развития мартенситных элементов не влияет на уравнения модели, и выражение (11) полностью совпадает выражением, полученным в [15].

При данном режиме деформирования происходит комбинированное упрочнение: изменяется и радиус поверхности нагружения, и положение ее центра

$$dS^* = \frac{d[\varepsilon_i^{phst}/q]}{\rho_2 \varphi_2'(S^*)}, \quad (12)$$

$$dr_{ij} = \frac{gd\lambda S_{ij}}{q}. \quad (13)$$

Если максимальное значение отношения  $\varepsilon_i^{phst}/q$ , стоящего в правой части (4) под знаком максимизации, достигается в промежуточной точке процесса или в текущей точке процесса  $d[\varepsilon_i^{phst}/q] \leq 0$ , то с учетом того, что правая часть уравнения (4) не изменяется на текущем этапе процесса, дифференцируя (4), получаем  $dS^* = 0$ . В этом случае имеет место режим чисто трансляционного упрочнения, при котором изменение положения центра поверхности нагружения описывается также уравнением (13). Однако величина  $d\lambda$  в этом случае определяется по формулам, отличным от (10) и (11), которые можно получить аналогичным образом, дифференцируя (9) с учетом того, что  $dS^* = 0$ .

### 3. МАРТЕНСИТНАЯ НЕУПРУГОСТЬ ПОСЛЕ ОРИЕНТИРОВАННОГО ПРЕВРАЩЕНИЯ

Для того, чтобы показать, как учет развития мартенситных элементов может повлиять на результат моделирования, рассмотрим мартенситную неупругость после ориентированного превращения в случае пропорционального нагружения. В начале нагружения материал находится полностью в аустенитном состоянии. происходит прямое фазовое превращение – возрастание  $q$  от 0 до некоторого промежуточного значения  $q_1 \leq 1$  при постоянном значении напряжения. На втором этапе нагрузка снимается и продолжается охлаждение образца до завершения мартенситного перехода. После этого на третьем этапе нагружения образец в мартенситном состоянии нагружается монотонно возрастающими напряжениями при постоянной температуре. В рассматриваемой модельной задаче предполагается независимое задание изменения параметров  $\sigma$  и  $q$ , которого можно добиться подбором соответствующей программы изменения температуры.

Будем считать, что выполнены условия пропорционального нагружения

$$\sigma'_{ij} = \sigma \cdot \sigma_{ij}^0, \quad \sigma_{ij}^0 = const; \quad \frac{3}{2} \sigma_{ij}^0 \sigma_{ij}^0 = 1, \quad |\sigma| = \sigma_i.$$

Пусть для определенности для первого нагружения девиатор  $\sigma_{ij}^0$  выбран так, что  $\sigma > 0$ . Девиатор фазово-структурной деформации также будет изменяться пропорционально

$$\varepsilon_{ij}^{phst'} = \varepsilon \cdot \varepsilon_{ij}^0; \quad \varepsilon_{ij}^0 = const; \quad \frac{2}{3} \varepsilon_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^0 = 1, \quad |\varepsilon| = \varepsilon_i, \quad \varepsilon_{ij}^0 = \frac{3}{2} \sigma_{ij}^0,$$

$$d\varepsilon_{ij}^{st'} = \varepsilon_{ij}^0 d\varepsilon^{st}; \quad d\varepsilon_{ij}^{ph'} = \varepsilon_{ij}^0 d\varepsilon^{ph}.$$

Уравнения модели (1-8) в этом случае можно упростить

$$d\varepsilon = d\varepsilon^{ph} + d\varepsilon^{st},$$

$$d\varepsilon^{ph} = \text{sign}(S) \rho_1 \rho_1 (|S|) (1 - qf(q)) dq + f(q) \varepsilon^{phst} dq, \quad q > 0, \quad (14)$$

$$d\varepsilon^{ph} = \frac{\varepsilon^{phst'}}{q} dq, \quad dq < 0,$$

$$d\varepsilon^{st} = \frac{2}{3} S d\lambda, \quad S_{ij} = S \sigma_{ij}^0, \quad S = \sigma - r, \quad S_i = |S|, \quad (15)$$

$$r_{ij} = r \sigma_{ij}^0, \quad qdr = \frac{3}{2} g d \varepsilon^{st}. \quad (16)$$

Выражение (10) для  $d\lambda$  для прямого фазового перехода в случае комбинированного упрочнения примет вид

$$d\lambda = \frac{R_1 + R_q}{R_2}, \quad (17)$$

$$R_1 = \text{sign}(S) \rho_2 \varphi_2'(|S|) q d\sigma,$$

$$R_2 = \rho_2 g \varphi_2'(|S|) |S| + \frac{2}{3} \text{sign}(\varepsilon) S,$$

$$R_q = R_3 (1 - qf(q)) dq,$$

$$R_3 = \frac{3}{2} g \rho_2 \varphi_2'(|S|) \left( \text{sign}(S) \frac{\varepsilon}{q} - \rho_1 \varphi_1(|S|) \right) - \text{sign}(S) \text{sign}(\varepsilon) \rho_1 \varphi_1(|S|) + \rho_2 \varphi_2(|S|).$$

На первом этапе происходит прямое фазовое превращение под действием напряжений с постоянной интенсивностью  $\sigma = \sigma_1 = \text{const}$ , которому соответствует возрастание параметра фазового состава  $q$  от 0 до некоторого промежуточного значения  $q_1 \leq 1$ . В [21] показано, что при прямом превращении под действием постоянного напряжения с интенсивностью  $\sigma_1$  уравнение (14) при нулевых начальных условиях для любых возможных функций  $f(q)$  приводит к решению

$$\varepsilon_{e1}(q) = \rho_1 \varphi_1(\sigma_1) q. \quad (18)$$

На этом этапе процесса отношение  $\varepsilon_i^{phst}/q = \rho_1 \varphi_1(\sigma_1)$  сохраняет постоянное значение, следовательно, для любого  $q$  будет выполняться условие

$$\max(\varepsilon_i^{phst}/q) = \rho_1 \varphi_1(\sigma_1). \quad (19)$$

Подстановка (18) в правую часть (4) позволяет определить постоянный в течение первого этапа нагружения радиус поверхности нагружения

$$S_{e1}^* = \varphi_2^{-1}(\rho_1 \varphi_1(\sigma_1) / \rho_2). \quad (20)$$

Поскольку для любых значений аргумента выполнено неравенство  $\rho_1 \varphi_1 > \rho_2 \varphi_2$  и  $\varphi_2(x) \leq 1$ , то  $S_{e1}^* < \sigma_1$ , следовательно, деформации на первом этапе нагружения развиваются только по фазовому механизму. Заметим, что на первом этапе учет развития мартенситных элементов не влияет на решение.

Когда параметр фазового состава достигает некоторого промежуточного значения  $0 < q_1 < 1$ , нагрузка снимается. На втором этапе процесса продолжается мартенситный переход после снятия напряжений: интенсивность напряжений  $\sigma$  равна 0, параметр фазового состава  $q$  в течение второго этапа возрастает от промежуточного значения  $q_1$  до 1. В этих условиях деформирования по структурному механизму не происходит, поскольку не выполняются условия активного нагружения (5). В [21] было рассмотрено аналогичное моделирование опыта на ориентированное превращение и найдена зависимость интенсивности деформаций от параметра фазового состава в случае  $f(q) = a$  в этих условиях

$$\varepsilon_{e2}(q) = \rho_1 \varphi_1(\sigma_1) q_1 e^{a(q - q_1)}, \quad (21)$$

где  $q \in [q_1, 1]$ .

Заметим, что в начале второго этапа нагружения  $\varepsilon_{e2}(q)/q = \rho_1 \varphi_1(\sigma_1)$ , при этом, поскольку  $a < 1$  и  $q < 1$ ,

$$\left( \frac{\varepsilon_{e2}(q)}{q} \right)' = \rho_1 \varphi_1(\sigma_1) q_1 \frac{e^{a(q-q_1)}(aq-1)}{q^2} < 0.$$

Таким образом,  $\max(\varepsilon_i^{phst}/q)$  сохраняет свое прежнее значение на протяжении второго этапа нагружения. Следовательно, радиус поверхности нагружения не изменяется, и, как видно из выражения (20), материальная функция  $f(q)$  не влияет на его значение.

На третьем этапе нагружения материал полностью в мартенситном состоянии нагружается монотонно возрастающими напряжениями. Поскольку материал уже находится полностью в мартенситном состоянии, на третьем этапе деформирование может осуществляться только по структурному механизму и только при выполнении условий активного деформирования.

Из (17) видно, что при данных условиях нагружения  $d\lambda > 0$  ( $d\sigma > 0$ ,  $q = 1$ ,  $R_q = 0$  т.к.  $dq = 0$ ). Но до тех пор, пока текущее значение  $S$  не соответствует радиусу поверхности нагружения (20), условия активного нагружения не будут выполнены и значения деформаций изменяться не будут. В отсутствие деформирования по структурному механизму центр поверхности нагружения не сдвигается и остается в начале координат ( $r = 0$ ). До появления структурных деформаций значение радиуса поверхности нагружения совпадает с интенсивностью напряжений  $\sigma$  в соответствии с (15).

Как только значение  $S$  достигнет текущего радиуса поверхности нагружения, условия активного нагружения окажутся выполнены и деформации начнут изменяться по структурному механизму. Пока текущее значение величины  $\varepsilon_i^{phst}/q$  в (4), совпадающее с текущим значение деформаций (т.к.  $q = 1$ ), не превысит значения в правой части (19), будет присутствовать только трансляционное упрочнение (изменяется положение центра поверхности нагружения  $r$ , радиус поверхности нагружения  $S^*$  остается неизменным). С учетом (15) и (20) можно сформулировать дифференциальное уравнение для центра поверхности нагружения и начальные условия

$$\begin{aligned} dr &= d\sigma, \\ r(\sigma^*) &= 0, \end{aligned} \tag{22}$$

где  $\sigma^* = S_{e1}^* = \varphi_2^{-1}(\rho_1 \varphi_1(\sigma_1)/\rho_2)$  – значение напряжения, при достижении которого начнется приращение деформаций по структурному механизму. Решая (22), получаем, что

$$r = \sigma - \sigma^*. \tag{23}$$

Подставляя (23) в (16) и используя (21) при  $q = 1$  в качестве начальных условий, можно получить зависимость интенсивности деформаций от интенсивности напряжений

$$d\varepsilon = d\varepsilon^{st} = \frac{2}{3} \frac{dr}{g}, \tag{24}$$



$$\varepsilon(\sigma^*) = \rho_1 \varphi_1(\sigma_1) q_1 e^{a(1-q_1)}.$$

Решая (24), получаем, что в режиме трансляционного упрочнения

$$\varepsilon_{e3t} = \rho_1 \varphi_1(\sigma_1) q_1 e^{a(1-q_1)} + \frac{2(\sigma - \sigma^*)}{3g}. \quad (25)$$

Режим трансляционного упрочнения сменится режимом комбинированного упрочнения, как только деформации достигнут значения в правой части (19)

$$\varepsilon^{**} = \rho_1 \varphi_1(\sigma_1).$$

Из (25) можно найти соответствующее критическое значение интенсивности напряжений, при достижении которого начнется режим комбинированного упрочнения

$$\sigma^{**} = \frac{3}{2} g \rho_1 \varphi_1(\sigma_1) (1 - q_1 e^{a(1-q_1)}) + \varphi_2^{-1}(\rho_1 \varphi_1(\sigma_1) / \rho_2),$$

а из (23) соответствующее ему значение  $r$

$$r^{**} = \frac{3}{2} g \rho_1 \varphi_1(\sigma_1) (1 - q_1 e^{a(1-q_1)}). \quad (26)$$

Используя (15-17) можно сформулировать дифференциальное уравнение для центра поверхности нагружения  $r$  в режиме комбинированного упрочнения и использовать (26) в качестве начального условия

$$dr = \frac{\frac{3}{2} g \rho_2 \varphi_2'(\sigma - r)}{\frac{3}{2} g \rho_2 \varphi_2'(\sigma - r) + 1} d\sigma, \quad (27)$$

$$r(\sigma^{**}) = r^{**}.$$

Для комбинированного упрочнения в режиме мартенситной неупругости из (4) следует

$$\varepsilon_i^{phst} = \rho_2 \varphi_2(S^*). \quad (28)$$

Подставляя в (28) решение (27)  $r_{e3k}$ , определим зависимость деформаций от интенсивности напряжений при комбинированном упрочнении на третьем этапе нагружения

$$\varepsilon_{e3k} = \rho_2 \varphi_2(\sigma - r_{e3k}).$$

При возрастании интенсивности напряжений, график интенсивности деформаций выходит на горизонтальную асимптоту – значение интенсивности деформаций мартенситной неупругости ограничено сверху величиной  $\rho_2$ , что согласуется с экспериментальными данными.

Если использовать вместо (4) уравнение поверхности нагружения [14]

$$q \rho_2 \varphi_2(S^*) = \max(\varepsilon_i^{phst}), \quad (29)$$

то в конце этапа разгрузки значение  $\max(\varepsilon_i^{phst})$  согласно (21) будет зависеть от значения  $q_1$ , при котором была снята нагрузка, а также от материального параметра  $a$ , следовательно, от этих же параметров будет зависеть и критическое значение напряжения  $\sigma^*$ , при достижении которого начнется приращение деформаций по структурному механизму. Однако результаты экспериментов показывают, что подобной зависимости не наблюдается, следовательно,

в качестве уравнения поверхности нагружения предпочтительно использовать уравнение (4), а не (29).

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Приведем результаты численного моделирования рассмотренного процесса для никелида титана со следующими характеристиками:  $\rho_1 = 0.0805$ ;  $\rho_2 = 0.0779$ ;  $\sigma_{01} = 144.7$  МПа,  $\sigma_{02} = 295.2$  МПа,  $g = 0.75\sigma_{02}/\rho_2$ . В [20] было показано, что в качестве материальной функции  $f(q)$  для никелида титана можно использовать  $f(q) = a$ , где  $a = 0.35$  или  $a = 0.7$ .

В качестве функций распределения интенсивности микронапряжений  $\varphi_1(\sigma)$  и  $\varphi_2(\sigma)$  аналогично [15] использовались интегральные функции экспоненциального распределения и распределения Вейбулла

$$\varphi_1(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x}{\sigma_{01}}\right), \quad \varphi_2(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{\sigma_{02}}\right)^\alpha\right].$$

Для моделирования использовалось значение  $\alpha = 2.4$ .

На рис.1 приведены зависимости интенсивности фазово-структурных деформаций от параметра фазового состава  $q$  во время прямого превращения во время первого  $\varepsilon_{e1}$  и второго этапов нагружения  $\varepsilon_{e2}$  для  $q_1 = 0.5$ ,  $\sigma_1 = 2\sigma_{01}$ . Графики соответствуют случаям  $a = 0$ ,  $a = 0.35$  и  $a = 0.7$ . На первом этапе интенсивность деформаций описывается уравнением (18), графики для всех материальных функций  $f(q)$  совпадают. Они отображены на рис.1 пунктирной линией.

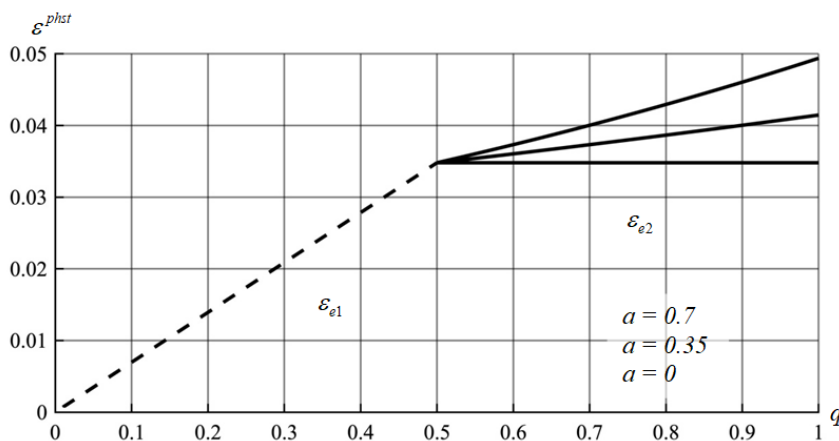


Рис.1. Зависимость интенсивности фазово-структурных деформаций от параметра фазового состава во время прямого превращения на первом и втором этапах нагружения.

На втором этапе, после снятия нагрузки, интенсивность деформаций описывается уравнением (21). Графики на втором этапе нагружения отображены сплошными линиями и соответствуют значениям  $a = 0.7$ ,  $a = 0.35$  и  $a = 0$ . В случае отсутствия учета развития мартенситных элементов, приращение

интенсивности деформации отсутствует. Для  $a = 0.35$  и  $a = 0.7$  наблюдается значительное приращение интенсивности деформаций после снятия нагрузки. На первых двух этапах смещение центра поверхности нагружения отсутствует. Радиус поверхности нагружения на первых двух этапах нагружения определяется формулой (20) и равен 413 МПа для всех значений материальной константы  $a$  и значений  $q_1$ .

Как было показано в [20], величины деформаций в конце прямого превращения немонотонно зависят от значения объемной доли мартенсита  $q_1$ , при котором была снята нагрузка. На рис.2 представлены графики зависимости деформаций ориентированного превращения в конце прямого превращения от значения  $q_1$ :  $\varepsilon^{orient}(q_1) = \varepsilon_{e2}(1) - \varepsilon_{e1}(q_1) = \rho_1 \varphi_1(\sigma_1) q_1 (e^{a(1-q_1)} - 1)$ . Графики построены для материальных констант  $a = 0.7$  и  $a = 0.35$ .

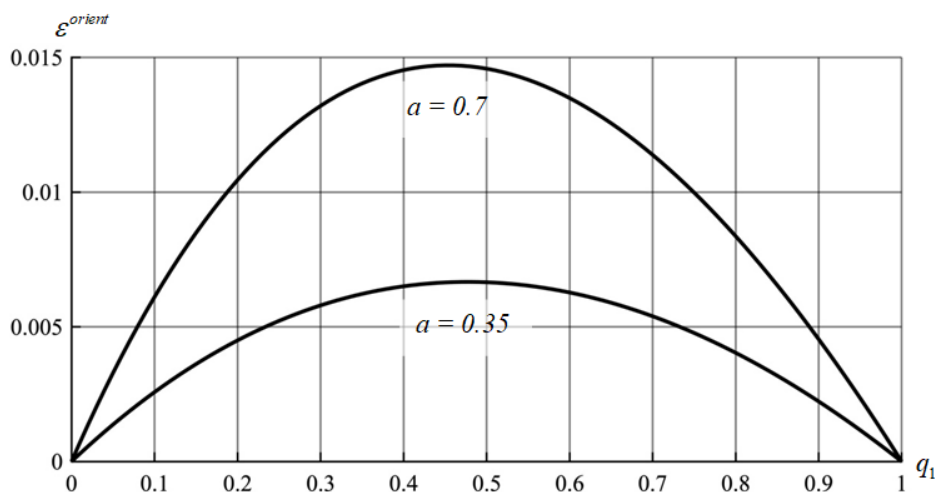


Рис.2. Зависимость деформаций ориентированного превращения в конце прямого превращения от значения объемной доли мартенсита  $q_1$ , при достижении которой была снята нагрузка.

Максимальное значение деформаций ориентированного превращения  $\varepsilon_{\max}^{orient} = 0.0067$  достигается при значении  $q_1 = 0.48$  для  $f(q) = 0.35$  и, соответственно,  $\varepsilon_{\max}^{orient} = 0.0147$  достигается при значении  $q_1 = 0.45$  для  $f(q) = 0.7$ . В случае  $f(q) = 0$  после снятия нагрузки приращения деформаций не происходит, т.е.  $\varepsilon^{orient}(q_1) = 0$ .

Графики зависимости интенсивности фазово-структурных деформаций от интенсивности напряжений для материальных констант  $a = 0.7$ ,  $a = 0.35$  и  $a = 0$  на третьем этапе нагружения (в режиме мартенситной неупругости) представлены на рис.3. После завершения прямого перехода на предыдущем этапе нагружения, при монотонном увеличении интенсивности напряжений деформации начинают увеличиваться по структурному механизму при достижении критической величины интенсивности напряжений  $\sigma^* = 413$  МПа, которая не зависит от величины  $q_1$  и учета развития мартенситных элементов. Прямые участки графиков соответствуют режиму трансляционного упрочнения, который в точках излома сменяется режимом комбинированного упрочнения при

достижении критической величины  $\sigma^{**}$ . В случае учета развития мартенситных элементов критическое значение  $\sigma^{**}$  оказывается значительно ниже:  $\sigma_0^{**} = 561$  МПа,  $\sigma_{0.35}^{**} = 533$  МПа,  $\sigma_{0.7}^{**} = 499$  МПа, где нижние индексы соответствуют значениям параметра  $a$ . Значения интенсивности фазово-структурных деформаций оказываются значительно выше при учете развития мартенситных элементов. При возрастании интенсивности напряжений все графики выходят на горизонтальную асимптоту  $\varepsilon^{plstr} = \rho_2$ .

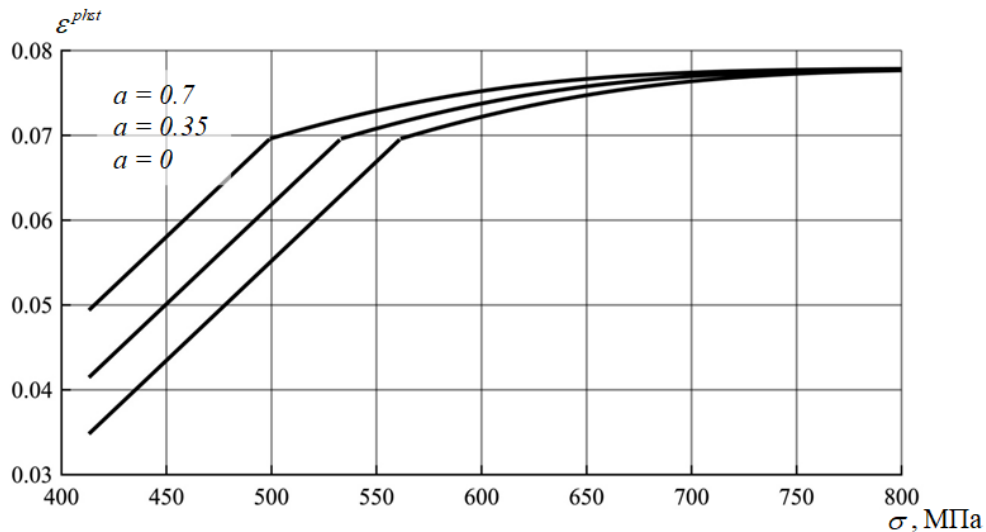


Рис.3. Зависимость фазово-структурных деформаций от интенсивности напряжения при  $a = 0.7$ ,  $a = 0.35$  и  $a = 0$  (сверху вниз).

На рис.4 и рис.5 показано, как изменяются положение центра и радиус поверхности нагружения на третьем этапе нагружения. Точки излома на графиках также соответствуют переходу от режима трансляционного упрочнения к комбинированному.

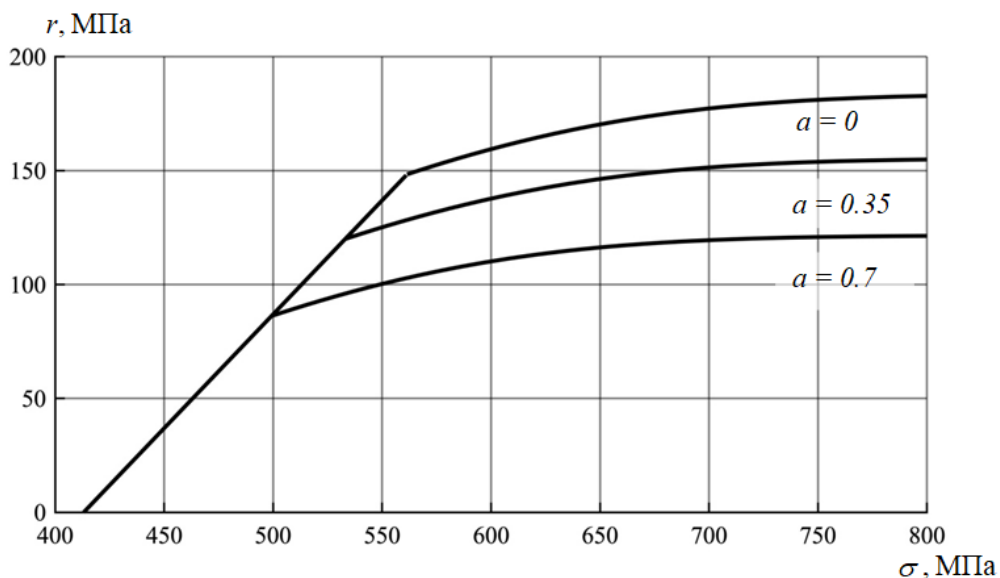


Рис.4. Зависимость положения центра поверхности нагружения от интенсивности напряжения при  $a = 0$ ,  $a = 0.35$  и  $a = 0.7$  (сверху вниз).

В начале третьего этапа в режиме трансляционного упрочнения графики для всех значений параметра  $a$  совпадают, но после перехода к комбинированному упрочнению начинают различаться. Видно, что учет развития мартенситных элементов значительно влияет на характеристики поверхности нагружения  $S$  и  $r$ .

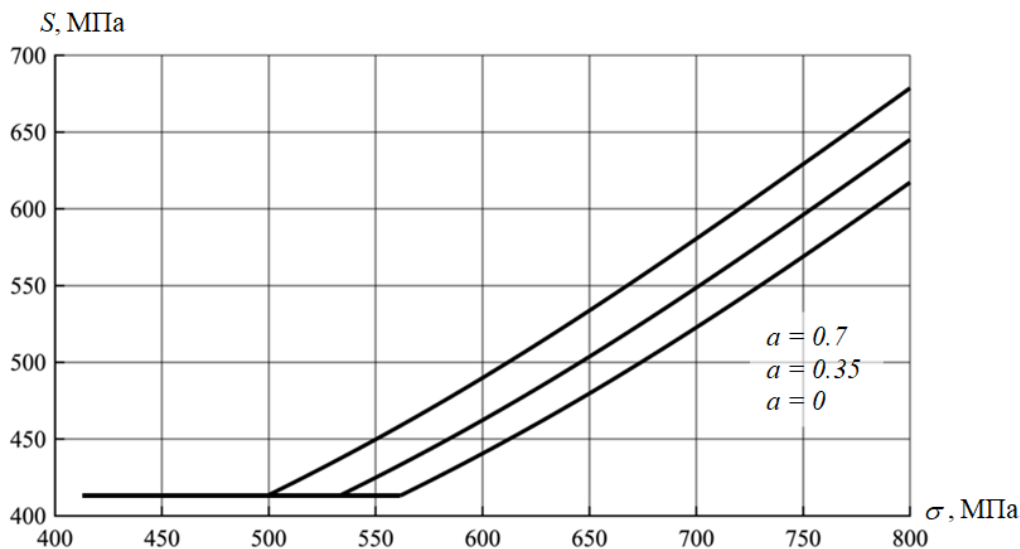


Рис.5. Зависимость радиуса поверхности нагружения от интенсивности напряжения при  $a = 0.7$ ,  $a = 0.35$  и  $a = 0$  (сверху вниз).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрено распространение объединенной модели фазово-структурного деформирования сплавов с памятью формы с неинтегральным параметром упрочнения на случай учета развития мартенситных элементов. Приведено моделирование мартенситной неупругости после ориентированного превращения для пропорционального нагружения с учетом изотропного и трансляционного упрочнения. Критическое значение напряжений, при котором начинается развитие деформаций по структурному механизму после прямого превращения, в данной объединенной модели не зависит от учета развития мартенситных элементов, что согласуется с опытными данными. При этом учет развития мартенситных элементов значительно влияет на значения фазово-структурных деформаций, а также на радиус и положение центра поверхности нагружения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Thamburaja P. *Constitutive equations for martensitic reorientation and detwinning in shape-memory alloys* // J. of the Mechanics and Physics of Solids. – 2005. – Vol.53. – Pp.825-856.
2. Liu Y., Xie Z. *Detwinning in shape memory alloy* // Progress in Smart Materials and Structures. – 2007. – Chapter 3. – Pp.29-65.
3. Otsuka K., Ren X. *Physical metallurgy of Ti-Ni-based shape memory alloys* // Progress in Materials Science. – 2005. – Vol.50. – No.5. – Pp.511-678.
4. Мовчан А.А., Казарина С.А. *Материалы с памятью формы как объект механики деформируемого твердого тела: экспериментальные исследования*,

- определяющие соотношения, решение краевых задач // Физическая мезомеханика. – 2012. – Т.15. – №1. – С.105-116.*
5. Каменцева З.П., Кузьмин С.Л., Лихачев В.А. *Исследование деформационного упрочнения никелида титана // Проблемы прочности. – 1980. – №9. – С.87-91.*
  6. Melton K.N, Mercier O. *Fatigue of TiNi thermoelastic martensites // Acta Metallurgica. – 1979. – Vol.27. – No.1. – Pp.137-144.*
  7. Liu Y., Xie Z., Van Humbeeck J., Delaey L. *Asymetry of stress-strains curves under tension and compression for NiTi shape-memory alloys // Acta Materialia. – 1998. – Vol.46. – No.12. – Pp.4325-4338.*
  8. Мовчан А.А., Сильченко А.Л., Казарина С.А. *Экспериментальное исследование и теоретическое моделирование эффекта перекрестного упрочнения сплавов с памятью формы // Деформация и разрушение материалов. – 2017. – №3. – С.20-27.*
  9. Мовчан А.А., Казарина С.А., Сильченко А.Л. *Эффект перекрестного упрочнения при сжатии // Деформация и разрушение материалов. – 2019. – №4. – С.2-9.*
  10. Лихачев В.А., Кузьмин С.Л., Каменцева З.П. *Эффект памяти формы. – Л.: Из-во ЛГУ, 1987. – 216 с.*
  11. Лихачев В.А., Малинин В.Г. *Структурно-аналитическая теория прочности. – Спб.: Наука, 1993. – 471 с.*
  12. Мовчан А.А. *Модель влияния фазового механизма деформирования на структурный в сплавах с памятью формы // Деформация и разрушение материалов. – 2019. – №7. – С.14-23.*
  13. Мовчан А.А. *Феноменологическая модель изменения фазово-структурных деформаций в сплавах с памятью формы // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2020. – №4. – С.140-151.*
  14. Мишустин И.В., Мовчан А.А. *Аналог теории пластического течения для описания деформации мартенситной неупругости в сплавах с памятью формы // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2015. – №2. – С.78-95.*
  15. Мовчан А.А. *Модель неупругого деформирования сплавов с памятью формы // Деформация и разрушение материалов. – 2021. – №3. – С.8-17.*
  16. Waitz T., Kazykhanov V., Karnthaler H.P. *Martensitic phase transformations in nanocrystalline NiTi studied by TEM // Acta Materialia. – 2004. – No.52. – Pp.137-147.*
  17. Лихачев В.А., Малинин В.Г., Малинина Н.А. *Деформация ориентированного превращения в условиях сложного напряженно-деформированного состояния / XXIX Межреспубликанский семинар «Актуальные проблемы прочности». Функционально-механические свойства материалов и их компьютерное конструирование. Материалы семинара. – Псков, 1993. – С.235-238.*
  18. Беляев С.П., Ермолаев В.П., Кузьмин С.Л., Лескина М.Л., Лихачев В.А., Пульнев С.А. *Деформационные свойства металлов с различной кинетикой мартенситных превращений / XXV Всесоюзный семинар «Актуальные проблемы прочности». Прогнозирование механического поведения материалов. Сборник трудов. – 1991. – Т.1. – С.51-56.*
  19. Беляев С.П., Ермолаев В.П., Кузьмин С.Л., Лескина М.Л., Лихачев В.А., Пульнев С.А. *Деформационные свойства металлов с различной кинетикой мартенситных превращений / XXV Всесоюзный семинар «Актуальные проблемы прочности». Прогнозирование механического поведения материалов. Сборник трудов. – 1991. – Т.2. – С.121-126.*

20. Мовчан А.А. *Выбор аппроксимации диаграммы перехода и модели исчезновения кристаллов мартенсита для сплавов с памятью формы* // Прикладная механика и техническая физика. – 1995. – Т.36. – №2. – С.173-181.
21. Гаганова Н.В. *Распространение модели деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях на случай учета развития мартенситных элементов* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2019. – Т.25. – №4. – С.543-562.
22. Гаганова Н.В. *Учет развития мартенситных элементов в объединенной модели деформирования сплавов с памятью формы в случае трансляционного упрочнения* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2021. – Т.27. – №2. – С.295-308.

## REFERENCES

1. Thamburaja P. *Constitutive equations for martensitic reorientation and detwinning in shape-memory alloys*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2005, Vol.53, Pp.825-856.
2. Liu Y., Xie Z. *Detwinning in shape memory alloy*. Progress in Smart Materials and Structures, 2007, Chapter 3, Pp.29-65.
3. Otsuka K., Ren X. *Physical metallurgy of Ti-Ni-based shape memory alloys*. Progress in Materials Science, 2005, Vol.50, No.5, Pp.511-678.
4. Movchan A.A., Kazarina S.A. *Shape memory materials as an object of solid state mechanics: experimental study, constitutive relations, solution of boundary value problems*. Physical mesomechanics, 2012, Vol.15, No.3-4, Pp.214-223.
5. Kamenceva Z.P., Kuz'min C.J., Likhachev V.A. *Issledovanie deformatsionnogo uprochneniya nikelida titana [Investigation of strain hardening in titanium nickelide]*. Problemy prochnosti, 1980, No.9, Pp.87-91.
6. Melton K.N, Mercier O. *Fatigue of TiNi thermoelastic martensites*. Acta Metallurgica, 1979, Vol.27, No.1, Pp.137-144.
7. Liu Y., Xie Z., Van Humbeeck J., Delaey L. *Assymetry of stress-strains curves under tension and compression for NiTi shape-memory alloys*. Acta Materialia, 1998, Vol.46, No.12, Pp.4325-4338.
8. Movchan A.A., Sil'chenko A.L., Kazarina S.A. *Experimental study and theoretical simulation of the cross-hardening effect in shape memory alloys*. Russian Metallurgy (Metally), 2017, No.10, Pp.779-784.
9. Movchan A.A., Kazarina S.A., Silchenko A.L. *Ehffekt perekrestnogo uprochneniya pri szhatii [Effect of cross-hardening in shape memory alloy under compression]*. Deformatsiya i razrushenie materialov, 2019, No.4, Pp.2-9.
10. Likhachev V.A., Кузьмин С.Л., Kamenceva Z.P. *Ehffekt pamyati formy [Shape memory effect]*. Leningrad, Izdatel'stvo LGU, 1987, 216 p.
11. Likhachev V.A., Malinin V.G. *Strukturno-analiticheskaya teoriya prochnosti [Structural and analytical theory of strength]*. Sankt-Peterburg, Nauka, 1993, 471 p.
12. Movchan A.A. *Model for the Effect of the Phase Mechanism of Deformation on the Structural Mechanism in Shape Memory Alloys*. Russian Metallurgy (Metally), 2020, No.4, Pp.282-290.
13. Movchan A.A. *Phenomenological Model of Changes in Phase-Structural Deformations in Shape Memory*. Mechanics of Solids, 2020, No.4, Pp.573-583.

14. Mishustin I.V., Movchan A.A. *Analog of the plastic flow theory for describing martensitic inelastic strains in shape memory alloys*. Mechanics of solids, 2015, Vol.50, No.2, Pp.176-190.
15. Movchan A.A. *Shape memory alloys inelastic straining model*. Russian Metallurgy (Metally), 2021, Vol.2021, No.10, Pp.1203-1212.
16. Waitz T., Kazykhanov V., Karnthaler H.P. *Martensitic phase transformations in nanocrystalline NiTi studied by TEM*. Acta Materialia, 2004, Vol.52, Pp.137-147.
17. Likhachev V.A., Malinin V.G., Malinina N.A. *Deformatsiya orientirovannogo prevrashheniya v usloviyakh slozhnogo napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya [Oriented transformation deformation under conditions of a complex stress-strain state]*. XXIX Mezhrеспубликанский семинар “Aktual’nye problemy prochnosti”. Funktsional’no-mekhanicheskie svoystva materialov i ikh komp’yuternoe konstruirovaniye. Materialy seminar. Pskov, 1993, Pp.235-238.
18. Belyaev S.P., Ermolaev V.P., Kuz’min S.L., Leskina M.L., Likhachev V.A., Pul’nev S.A. *Deformatsionnye svoystva metallov s razlichnoj kinetikoj martensitnykh prevrashhenij [Deformation properties of metals with different kinetics of martensitic transformations]*. XXV Vsesoyuznyj seminar “Aktual’nye problemy prochnosti”. Prognozirovaniye mekhanicheskogo povedeniya materialov. Sbornik trudov, 1991, Vol.1, Pp.51-56.
19. Belyaev S.P., Ermolaev V.P., Kuz’min S.L., Leskina M.L., Likhachev V.A., Pul’nev S.A. *Deformatsionnye svoystva metallov s razlichnoj kinetikoj martensitnykh prevrashhenij [Deformation properties of metals with different kinetics of martensitic transformations]*. XXV Vsesoyuznyj seminar “Aktual’nye problemy prochnosti”. Prognozirovaniye mekhanicheskogo povedeniya materialov. Sbornik trudov, 1991, Vol.2, Pp.121-126.
20. Movchan A.A. *The Selection of the Phase Transition Diagram Approximation and Model of Dissappearing of Martensite Crystals for Shape Memory Alloys*. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 1995, Vol.36, No.2, Pp.302-307.
21. Gaganova N.V. *Rasprostraneniye modeli deformirovaniya splavov s pamyat’yu formy pri fazovykh i strukturnykh prevrashheniyakh na sluchaj ucheta razvitiya martensitnykh ehlementov [Shape memory alloys constitutive model extention for considering development of the martensitic elements during phase and structural transformation]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2019, Vol.25, No.4, Pp.543-562.
22. Gaganova N.V. *Uchet razvitiya martensitnykh ehlementov v ob’edinennoj modeli deformirovaniya splavov s pamyat’yu formy v sluchae translyatsionnogo uprochneniya [Consideration of martensitic elements development in the combined model of shape memory alloys in the case of translational hardening]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2021, Vol.27, No.2, Pp.295-308.

*Поступила в редакцию 07 сентября 2022 года.*

---

Сведения об авторе:

Гаганова Наталья Валерьевна – соискатель, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова», г. Москва, Россия; e-mail: [gaganova-nv@yandex.ru](mailto:gaganova-nv@yandex.ru)