



## АППРОКСИМАЦИИ НА ОСНОВЕ ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА ТРЕФФТЦА В ЗАДАЧАХ ГРАДИЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Волков-Богородский Д.Б.

*ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия*

### АННОТАЦИЯ

В работе предлагается схема конечно-элементной аппроксимации в задачах градиентной теории упругости, не предполагающая непрерывности аппроксимирующей функций (функций формы) на границах между элементами, которые в данном случае рассматриваются как независимые базисы решения. Эта схема основана на аналитическом представлении Папковича-Нейбера для перемещений, позволяющем построить полные системы аппроксимирующих функций, аналитически точно удовлетворяющие исходным уравнениям четвертого порядка, и на обобщении метода Треффтца для системы подобластей-блоков, в качестве которой выступает конечно-элементная сетка. Показано, что обобщенная схема Треффтца позволяет одновременно с минимизацией функционала энергии сшивать все необходимые величины на границах блоков: перемещения, поверхностные силы, а для градиентных уравнений четвертого порядка еще и производные перемещений, и когезионные моменты, что достигается исключительно благодаря аналитической конструкции используемых функций. Все результаты переносятся на классические уравнения теории упругости, поскольку они являются частным случаем градиентных уравнений. Аналитическое представление решения открывает возможность построения аппроксимаций на неструктурированных сетках и несогласованных функциях формы, и может рассматриваться как новая технология конечно-элементных аппроксимаций, не предполагающая согласованности конечно-элементной сетки и непрерывности функций формы между элементами.

**Ключевые слова:** представление Папковича-Нейбера; метод конечных элементов; аналитические решения; классические и градиентные уравнения теории упругости; обобщенная схема аппроксимации Треффтца

## APPROXIMATIONS BASED ON THE GENERALIZED TREFFTZ METHOD IN PROBLEMS OF THE GRADIENT THEORY OF ELASTICITY

Volkov-Bogorodsky D.B.

*Institute of Applied Mechanics Russian Academy of Science, Moscow, Russia*

### ABSTRACT

The paper proposes a finite element approximation scheme in problems of the gradient elasticity, which does not assume the continuity of the approximating functions (shape functions) on the boundaries between the elements, which are considered in this case as independent bases for solution. This scheme is based on the Papkovitch-Neuber analytical representation for displacements, which allows one to construct complete systems of functions that analytically exactly satisfy the original fourth-order equations, also on a generalization of the Trefftz method for a system of subdomains-blocks. It is shown that the generalized

Trefftz scheme allows, simultaneously with the minimization of the energy functional, to match all the necessary quantities at the boundaries of blocks: displacements, surface forces, and for fourth-order gradient equations also derivatives of displacements and cohesive moments, which is achieved exclusively due to the analytical construction of the used functions. All results is performed also for the classical elasticity equations, since they are a special case of gradient equations. The analytical representation of the solution opens up the possibility of constructing approximations on unstructured meshes and inconsistent shape functions, and can be considered as a new technology of finite element approximations that does not assume the consistency of the finite element mesh and the continuity of approximating functions.

**Keywords:** Papkovich-Neuber representation; finite element method; analytical solutions; classical and gradient equations of elasticity; generalized Trefftz approximation scheme

## ВВЕДЕНИЕ

Метод конечных элементов является мощным инструментом для решения задач математической физики [1]. Однако, он предполагает ряд условий, которым должны удовлетворять функции формы, чтобы обеспечить сходимость конечно-элементного решения. Эти условия касаются как конечно-элементной сетки, так и самих аппроксимирующих функций, которые по необходимости должны быть непрерывными во всей области, чтобы обеспечить корректную минимизацию функционала энергии и непрерывность напряжений на границах элементов. Это накладывает ограничения на вариативные возможности функций формы, которые, как правило, являются полиномами первого или второго порядка и, в частности, не могут аналитически точно удовлетворять исходным уравнениям.

С другой стороны, в уравнениях теории упругости существует аналитический аппарат, который позволяет довольно легко построить полные системы аппроксимирующих функций, аналитически точно удовлетворяющие исходным уравнениям, как для классических, так и градиентных [2,3] уравнений теории упругости. Это представление Папковича-Нейбера [4-6], выражающее перемещения через вспомогательные потенциалы, удовлетворяющие уравнениям Лапласа и Гельмгольца. В результате, функции формы и их аналитические свойства обеспечиваются гармоническими полиномами любого порядка и их аналогами для уравнений Гельмгольца, достигающими за счет полноты любой степени точности приближения к решению. Такой подход к конечно-элементному решению является, по сути, аналитическим. В нем элементы используются как подобласти-блоки, аналитически точно представляющие решение в локальной области и укладываемые в общее решение за счет минимизации функционала энергии, обеспечивающего одновременно сшивку элементов на границе с помощью метода Треффтца [7].

Рассматриваются градиентные уравнения теории упругости, соответствующие функционалу энергии следующего вида

$$E = \frac{1}{2} \int C_{ijkl} R_{i,j} R_{k,l} dG + \frac{1}{2} \int C_{ijklmn} R_{i,jk} R_{l,mn} dG - \int P_i^G R_i dG - \oint (t_i R_i + q_i R_{i,j} n_j) d(\partial G), \quad (1)$$

где  $R_i$  – вектор перемещений,  $P_i^G$  и  $t_i, q_i$  – векторы заданных сил в объеме тела и на его поверхности,  $n_i$  – нормаль к поверхности тела в рассматриваемой точке,

$C_{ijkl}$  и  $C_{ijklmn}$  тензор модулей классической упругости и тензор шестого ранга градиентных модулей соответственно.

Рассматривается изотропный случай, когда тензор модулей упругости определяется двумя параметрами Ламе  $\lambda, \mu$ :  $C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{il})$ , а градиентный тензор шестого ранга определяется одним дополнительным масштабным модулем  $C$

$$C_{ijklmn} = \frac{\mu^2}{C}\delta_{jk}\delta_{il}\delta_{mn} + \frac{\mu(\mu + \lambda)}{2C}(\delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{mn} + \delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn} + \delta_{jk}\delta_{in}\delta_{lm} + \delta_{jk}\delta_{im}\delta_{ln}) + \frac{(\mu + \lambda)^2}{4C}(\delta_{ik}\delta_{jn}\delta_{lm} + \delta_{ij}\delta_{kn}\delta_{lm} + \delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{ln} + \delta_{ij}\delta_{km}\delta_{ln}).$$

В этом случае система определяющих уравнений четвертого порядка может быть записана в виде суперпозиции оператора Ламе (оператора изотропной теории упругости в перемещениях) и обобщенного оператора Гельмгольца, построенного на основе оператора Ламе

$$L_{ij}H_{jk}(R_k) + P_i^G = 0, \quad H_{jk} = (\cdot)\delta_{jk} - C^{-1}L_{jk}(\cdot), \quad (2)$$

$$L_{ij}(\cdot) = \mu(\cdot)_{,pp}\delta_{ij} + (\mu + \lambda)(\cdot)_{,ij}$$

А ее решения – в виде суперпозиции классических перемещений  $U_i$ , удовлетворяющих уравнению Ламе, и когезионных  $u_i$ , удовлетворяющих обобщенному уравнению Гельмгольца

$$R_i = U_i - u_i, \quad L_{ij}U_j + P_i^G = 0, \quad L_{ij}u_j - Cu_i + P_i^G = 0. \quad (3)$$

Для обоих рассматриваемых уравнений (3) оказывается возможным построить однотипные представления через вспомогательные потенциалы, основанные на анализе векторного поля перемещений  $\mathbf{u}$  с помощью теоремы Гельмгольца [8] о представлении произвольного векторного поля в виде суперпозиции потенциальной и вихревой составляющей, и тем самым определить общее решение градиентного уравнения четвертого порядка (2) с помощью вспомогательных потенциалов в представления Папковича-Нейбера для перемещений (см. [9])

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{f}_0 - \mathbf{f}}{\mu} + \nabla \left( \left( \frac{1}{\mu} - \frac{1}{k} \right) \frac{\phi_0 - \mathbf{r}\mathbf{f}_0}{2} - \frac{\text{div}(\mathbf{f}^* - \mathbf{f})}{C} \right), \quad k = 2\mu + \lambda, \quad (4)$$

$$\nabla^2 \mathbf{f}_0 + \mathbf{P}^G = 0, \quad \nabla^2 \phi_0 + \mathbf{r}\mathbf{P}^G = 0, \quad \nabla^2 \mathbf{f} - \frac{C}{\mu} \mathbf{f} + \mathbf{P}^G = 0, \quad (5)$$

$$\nabla^2 \mathbf{f}^* - \frac{C}{k} \mathbf{f}^* + \mathbf{P}^G = 0.$$

Здесь  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор из начала координат,  $\mathbf{f}_0$  – векторный потенциал, удовлетворяющий уравнению Пуассона с правой частью  $\mathbf{P}^G$ ,  $\phi_0$  – скалярный потенциал, удовлетворяющий уравнению Пуассона,  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{f}^*$  – гельмгольцевские потенциалы, определяющие когезионное поле перемещений в задачах градиентной теории упругости,  $\lambda, \mu$  – параметры Ламе,  $k$  – модуль одноосного растяжения/сжатия,  $C$  – дополнительный модуль, отвечающий за масштабные эффекты в градиентных моделях теории упругости. Классические уравнения

теории упругости соответствуют случаю, когда гельмгольцевские потенциалы  $f$  и  $f^*$  отсутствуют (и тем самым когезионное поле перемещений  $u$  равно нулю).

На основе этого представления могут быть построены [10-12] полные системы функций для аппроксимации потенциалов представления (4) в случае, когда отсутствуют массовые силы  $P^G$ , что соответствует однородным уравнениям (5). Эти системы функций определяются формальным рядом с двумя произвольными функциями (одна из них комплекснозначная, другая – вещественная):  $\psi_0(w)$  и  $U_0(z)$ ,  $w = x + iy$ , в пространстве декартовых координат  $P = (x, y, z)$ . Они автоматически удовлетворяют уравнению Гельмгольца (или Лапласа при  $\kappa = 0$ ), определяя перемещения, аналитически точно удовлетворяющие исходному уравнению теории упругости

$$\Phi = \sum_p \frac{(-1)^p \bar{w}^p}{4^p p!} \psi_0^{(-p)}(w) \left( \frac{d^2}{dz^2} - \kappa^2 \right)^p U_0(z), \tag{6}$$

$$\psi_0^{(-p-1)} = \int \psi_0^{(-p)} dw, \quad \psi_0^{(0)} = \psi_0, \tag{7}$$

$$\nabla^2 \Phi(P) - \kappa^2 \Phi(P) = 0.$$

При выборе определяющих функций в виде  $\psi_0 = w^m$  и  $U_0 = z^{n-m}$  ряд (6) определяет систему решений с аналитическими свойствами полиномов, которая в предельном случае  $\kappa = 0$  совпадает с системой однородных гармонических полиномов (системой шаровых функций), представленных в комплексной форме. После формального переразложения дифференциального оператора  $L_p = (d^2/dz^2 - \kappa^2)^p$  ряд (6) можно переписать в виде, в котором вспомогательные функции выражаются через модифицированные функции Бесселя  $I_m(\kappa r)$ ,  $r = \sqrt{w\bar{w}}$  (см. [13])

$$\Phi = \sum_p \phi_p(w, \bar{w}) U_0^{(2p)}(z), \tag{8}$$

$$\phi_p(w, \bar{w}) = \frac{(-1)^p \Gamma(m+p)}{(\kappa/2)^m} \frac{w^{(p+m)/2} \bar{w}^{(p-m)/2}}{(2\kappa)^p} \frac{I_{m+p}(\kappa r)}{p!}.$$

В форме ряда (8) аппроксимирующие функции имеют конечное представление для полиномиальной функции  $U_0$ . Для того, чтобы аппроксимирующие функции в форме ряда (6) имели конечное представление, функцию  $U_0(z)$  следует выбрать в таком виде, чтобы выполнялось условие  $L_m U_0 = 0$  при некотором  $m > 0$ . Оказывается, этому условию отвечает система квазиполиномов  $\{\tilde{U}_m(z)\}$ , определяемая рекуррентными соотношениями

$$\tilde{U}_{2p} = \frac{z \tilde{U}_{2p-1}}{2p}, \quad \tilde{U}_{2p+1} = \frac{z \tilde{U}_{2p-2} - (2p-1) \tilde{U}_{2p-1}}{2p\kappa^2}, \tag{9}$$

$$\tilde{U}_0 = \cosh(\kappa z), \quad \tilde{U}_1 = \frac{\sinh(\kappa z)}{\kappa}.$$

В результате аппроксимирующую систему функций для  $\psi_0 = w^m$  можно представить в виде пространственного квазиполинома

$$\Phi_n^m = \sum_p \frac{(-1)^p \bar{w}^p}{4^p p!} \psi_0^{(-p)}(w) L_p \tilde{U}_{n-m} = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-m}{2} \rfloor} \frac{(-1)^p \bar{w}^p w^{m+p}}{4^p p! (m+p)!} \tilde{U}_{n-m-2p}(z), \quad (10)$$

$$0 \leq m \leq n,$$

который по-прежнему при  $\kappa = 0$  совпадает с системой гармонических полиномов.

Определение базисных функций в виде рядов (6), (8) или (9), (10) позволяет сформулировать между этими функциями и их производными систему рекуррентных соотношений, которая эффективно используется для их вычисления, дифференцирования и интегрирования в аналитическом виде (см. [14]).

Развиваемый в данной статье подход к конечно-элементной аппроксимации в случае классических и градиентных задач теории упругости использует аналитические свойства построенных функций при минимизации энергии в рамках обобщенной схемы Треффтца, и позволяет сшивать все необходимые величины на границах элементов, рассматриваемых как независимые блоки: перемещения, поверхностные силы, производные перемещений, и когезионные моменты, не предполагая заранее непрерывности базисных функций между блоками. Это позволяет рассматривать этот подход к конечно-элементным аппроксимациям, как новую технологию, не предполагающую согласованности конечно-элементной сетки и непрерывности функций формы между элементами.

## 1. ОБОБЩЕННАЯ СХЕМА ТРЕФФТЦА НА БЛОЧНОЙ СТРУКТУРЕ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Рассмотрим билинейную форму функционала энергии (1), соответствующую изотропному случаю при  $\mathbf{P}^G = 0$ , и выделим из нее с помощью интегрирования по частям поверхностные интегралы, соответствующие естественным краевым условиям второго рода на границе области

$$\begin{aligned} W(\mathbf{R}, \mathbf{R}') &= \int \left( 2\mu \varepsilon_{ij} \varepsilon'_{ij} + \lambda \theta \theta' + C^{-1} (L_{ij} R_j) (L_{ij} R'_j) \right) dG = \\ &= \int R_i p_i(\mathbf{R}') d(\partial G) - \int U_i (L_{ij} R'_j) dG = \\ &= \int (R_i p_i(\mathbf{R}') - U_i p_i(\mathbf{R}')) d(\partial G) + \int (2\mu \varepsilon_{ij}(\mathbf{U}) \varepsilon'_{ij} + \lambda \theta(\mathbf{U}) \theta') dG = \\ &= \int (R_i p_i(\mathbf{R}') - U_i p_i(\mathbf{R}') + p_i(\mathbf{U}) R'_i) d(\partial G) - \int (L_{ij} U_j) R'_i dG = \\ &= \int (p_i(\mathbf{U}) R'_i - u_i p_i(\mathbf{R}')) d(\partial G), \end{aligned}$$

где  $U_i = R_i - C^{-1} (L_{ij} R_j)$  и  $u_i = -C^{-1} (L_{ij} R_j)$  соответственно классическое и когезионное поле из уравнений (3),  $L_{ij} U_j = 0$ .

Преобразуем поверхностный интеграл далее, и выделим из него с помощью дополнительного интегрирования вдоль граничной поверхности функцию  $\mathbf{R}'$  и ее нормальную производную  $\dot{\mathbf{R}}'$  как независимые степени свободы. При этом будем предполагать, что поверхность является замкнутой и достаточно гладким многообразием

$$W(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = \int (p_i(\mathbf{U})R'_i - u_i p_i(\mathbf{R}')) d(\partial G) = \int \left( p_i(\mathbf{U})R'_i + m_{ij}(\mathbf{u}) \frac{\partial R'_i}{\partial x_j} \right) d(\partial G) = \\ = \int (p_i(\mathbf{U}) - \hat{p}_i(\mathbf{u}))R'_i d(\partial G) + \int m_{i(n)}(\mathbf{u}) \frac{\partial R'_i}{\partial n} d(\partial G).$$

Здесь  $\|m_{ij}(\mathbf{u})\|$  – моментный тензор и  $\|m_{i(n)}(\mathbf{u})\|$  – моментный вектор, определяемые когезионным полем перемещений  $u_i$  и компонентами вектора нормалей  $n_i$  на поверхности тела

$$m_{ij}(\mathbf{u}) = -\mu(u_i n_j + u_j n_i) - \lambda(u_k n_k) \delta_{ij}, \\ m_{i(n)}(\mathbf{u}) = m_{ij}(\mathbf{u}) n_j = -\mu u_i - (\mu + \lambda)(u_k n_k) n_i.$$

Когезионные силы  $\|\hat{p}_i(\mathbf{u})\|$  определяются после интегрирования моментного тензора на поверхности тела дифференциальными инвариантами следующего вида

$$\hat{p}_i(\mathbf{u}) = \frac{\partial m_{i(s)}}{\partial s} + \frac{\partial m_{i(\tau)}}{\partial \tau},$$

где  $s$  и  $\tau$  – любые два ортогональных касательных направления на поверхности тела,  $m_{i(s)}(\mathbf{u}) = m_{ij}(\mathbf{u}) s_j$ ,  $m_{i(\tau)}(\mathbf{u}) = m_{ij}(\mathbf{u}) \tau_j$ . На плоской, цилиндрической или сферической поверхности можно получить явное выражение для когезионных сил в виде

$$\hat{p}_i(\mathbf{u}) = \frac{\partial m_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial m_{i(n)}}{\partial n} - \beta \frac{m_{i(n)}}{r},$$

где  $\beta = 0$  для плоской поверхности,  $\beta = 1$  для цилиндрической и  $\beta = 2$  для сферической поверхности.

Таким образом, доказано следующее утверждение, устанавливающее интегральную формулу Грина для градиентной теории упругости.

**Т е о р е м а (интегральная формула Грина для градиентной теории упругости).** Пусть область ограничена гладкой замкнутой поверхностью и вектор перемещений  $\mathbf{R}$  удовлетворяет уравнению (2) при  $P_i^G = 0$ , а вектор-функция  $\mathbf{R}'$  непрерывно дифференцируема вплоть до границы. Тогда билинейная форма функционала энергии

$$W(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = \int (2\mu \varepsilon_{ij} \varepsilon'_{ij} + \lambda \theta \theta' + C^{-1} (L_{ij} R_j)(L_{ij} R'_j)) dG \quad (11)$$

выражается через поверхностные моменты  $m_{i(n)}(\mathbf{u})$  и силы  $p_i(\mathbf{U}) - \hat{p}_i(\mathbf{u})$  в виде

$$W(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = \int (p_i(\mathbf{U}) - \hat{p}_i(\mathbf{u}))R'_i d(\partial G) + \int m_{i(n)}(\mathbf{u}) \frac{\partial R'_i}{\partial n} d(\partial G). \quad (12)$$

Таким образом, граничные условия второго рода для градиентной теории упругости имеют следующий вид

$$p_i(\mathbf{U}) - \hat{p}_i(\mathbf{u}) = t_i \quad m_{i(n)}(\mathbf{u}) = q_i. \quad (13)$$

В методе Треффтца билинейная форма (11) рассматривается как скалярное произведение, соответствующее энергетической норме  $\|\mathbf{R}\|_E = W(\mathbf{R}, \mathbf{R})^{1/2}$ . Аппроксимация точного решения  $\mathbf{R}_0$  осуществляется в этой норме  $\|\mathbf{R} - \mathbf{R}_0\|_E \rightarrow 0$

на системе функций  $\mathbf{R}_k$ , полученной из представления Папковича-Нейбера (4), (5) с помощью базисных функций (6)-(10).

Используем проекционный метод, который формулируется с помощью билинейной формы (12) следующим образом

$$W(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0, \mathbf{R}_k) = 0, \quad \mathbf{R} = \sum_k a_k \mathbf{R}_k. \quad (14)$$

Причем граничная поверхность в интеграле (12) разделяется на две части  $S_1 \cup S_2$ , на одной из которых граничные условия второго рода ассоциируются с функцией  $\mathbf{R}$ , а на другой – с функцией  $\mathbf{R}'$

$$\begin{aligned} W(\mathbf{R}, \mathbf{R}') &= \int_{S_1} (p_i(\mathbf{U}) - \hat{p}_i(\mathbf{u})) R'_i d(\partial G) + \int_{S_1} m_{i(n)}(\mathbf{u}) \dot{R}'_i d(\partial G) + \\ &= \int_{S_2} R_i (p_i(\mathbf{U}') - \hat{p}_i(\mathbf{u}')) d(\partial G) + \int_{S_2} \dot{R}'_i m_{i(n)}(\mathbf{u}') d(\partial G). \end{aligned} \quad (15)$$

Такая формулировка позволяет аппроксимировать на одной части границы условия второго рода (13), а другой части границы аппроксимировать функцию и ее нормальную производную (т.е. граничные условия первого рода). При этом билинейная форма (12) по-прежнему соответствует энергетической норме  $\|\mathbf{R}\|_E = W(\mathbf{R}, \mathbf{R})^{1/2}$ .

В обобщенном методе Треффтца исходная область разбивается конечно-элементной сеткой на множество подобластей-блоков, пересекающихся только по своей границе:  $\bar{G} = \cup \bar{G}_k$ ,  $G_k \cap G_l = \emptyset$ ,  $k \neq l$ , и задача решается на блочной структуре элементов, рассматриваемых как независимые подобласти исходной области. На каждом блоке  $G_k$  рассматривается аппроксимация (14) на своей локальной системе функций  $\mathbf{R}_k$ . В качестве граничных значений на поверхностях  $S_1$  и  $S_2$  рассматриваются значения функций из соседних блоков, что приводит к одновременной сшивке функций, их нормальных производных, когезионных моментов и поверхностных сил. В формулировке билинейной формы (15) на общей части границы из соседних блоков, разбиение граничной поверхности на части  $S_1$  и  $S_2$  осуществляется таким образом, чтобы в соседних блоках на одной и той же границе ставились условия разного рода, в одном блоке первого рода (т.е. сшивка функций и нормальных производных), а в соседнем блоке второго рода (т.е. сшивка когезионных моментов и поверхностных сил).

Реализация схемы Треффтца (14), (15) на блочной структуре приводит к блочной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $\mathbf{X}_k$  в разложениях по базисной системе функций

$$T_k \mathbf{X}_k + \sum_l T_{kl} \mathbf{X}_l = \mathbf{H}_k, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (16)$$

где  $N$  – общее число подобластей в блочной структуре. Эта система имеет разреженную структуру и плотно заполненные матрицы-блоки  $T_k$  и  $T_{kl}$ . Здесь  $T_k$  – матрицы Треффтца аппроксимирующей системы функций, составленные из скалярных произведения (15) функций по границам блоков,  $T_{kl}$  – матрицы, составленные из скалярных произведений аппроксимирующих функций смежных блоков,  $\mathbf{H}_k$  – вектор, соответствующий граничным условиям задачи.

Основная трудность в этом методе заключается в необходимости решения системы линейных алгебраических уравнений, структура которой соответствует структуре блочного разбиения исходной области [15,16]. Но поскольку система линейных уравнений имеет блочно-разреженную структуру, то естественным образом возникают два уровня вычислений: интенсивные вычисления с плотными подматрицами-блоками на уровне общей памяти и относительно независимые вычисления между блоками на уровне распределенной памяти. Такая организация вычислений позволяет эффективно использовать неоднородную структуру памяти в современных кластерных системах. Интенсивные вычисления с плотными подматрицами распараллеливаются на основе потоков вычислений с использованием общей памяти, а относительно независимые вычисления с блочно-разреженной структурой распараллеливаются с помощью MPI (см. [16]).

## 2. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Схема блочной аппроксимации Треффтца (14)-(16) нашла свое эффективное применение в методе асимптотического усреднения [17-19] уравнений классической и градиентной теории упругости с быстро осциллирующими коэффициентами. В этом методе задача определения жесткостных и прочностных характеристик композитных материалов сводится к решению задачи на ячейке периодичности при стандартном наборе граничных условий [20], соответствующих заданному в среднем деформированному состоянию композитного материала. Поскольку эта задача точно описывает локальное распределение полей деформаций и напряжений в окрестности включений, то актуальной является разработка методов ее эффективного и точного решения. Аналогичная задача возникает и в методе Эшелби-Кристенсена оценки эффективных характеристик композиционных материалов [21,22], которая также эффективно решается с помощью обобщенной схемы Треффтца.

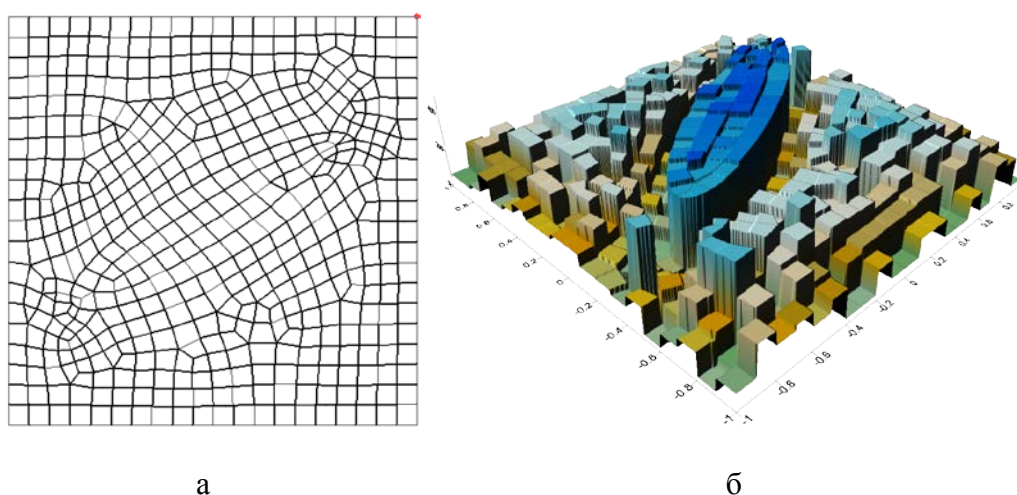


Рис.1. Разбиение ячейки с эллиптическим включением на блоки: а) конечно-элементная сетка; б) гистограмма блочной структуры.

В качестве примера схема блочной аппроксимации Треффтца была применена к задаче на ячейке в классической теории упругости для композиционного материала с включением эллиптической формы. Область была разбита на  $N = 496$  плоских четырехугольных и треугольных элементов



с учетом криволинейности межфазной границы, образующих блочную структуру, как это изображено на рис.1а; на рис.1б представлена пространственная гистограмма блочной структуры, в котором каждый блок изображен со значением своего номера. Параметры включения: полуоси эллипса  $a = 0.4$ ,  $b = 0.1$ , угол поворота относительно горизонтальной оси  $\varphi = 30^\circ$ , модуль Юнга  $E = 78$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ ; параметры матрицы: модуль Юнга  $E = 5.066$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0.49$ .

На рис.2 представлен расчет задачи на ячейке на системе гармонических полиномов  $w^m$  с максимальной степенью  $M = 2$ , представляющих перемещения и напряжения с помощью представления Папковича-Нейбера (4) (здесь для рассматриваемой задачи потенциалы  $\phi_0$ ,  $f$  и  $f^*$  равны нулю). На рис.3 представлен тот же расчет при степени аппроксимации  $M = 11$ . Как видим, обобщенный метод Треффтца обладает способностью сшивать независимые, не обладающие непрерывностью на границе представления в блоках, обеспечивая удовлетворительную точность уже при  $M = 2$ , и практически аналитическую точность при  $M = 11$ , причем степень аппроксимации можно повышать и далее.

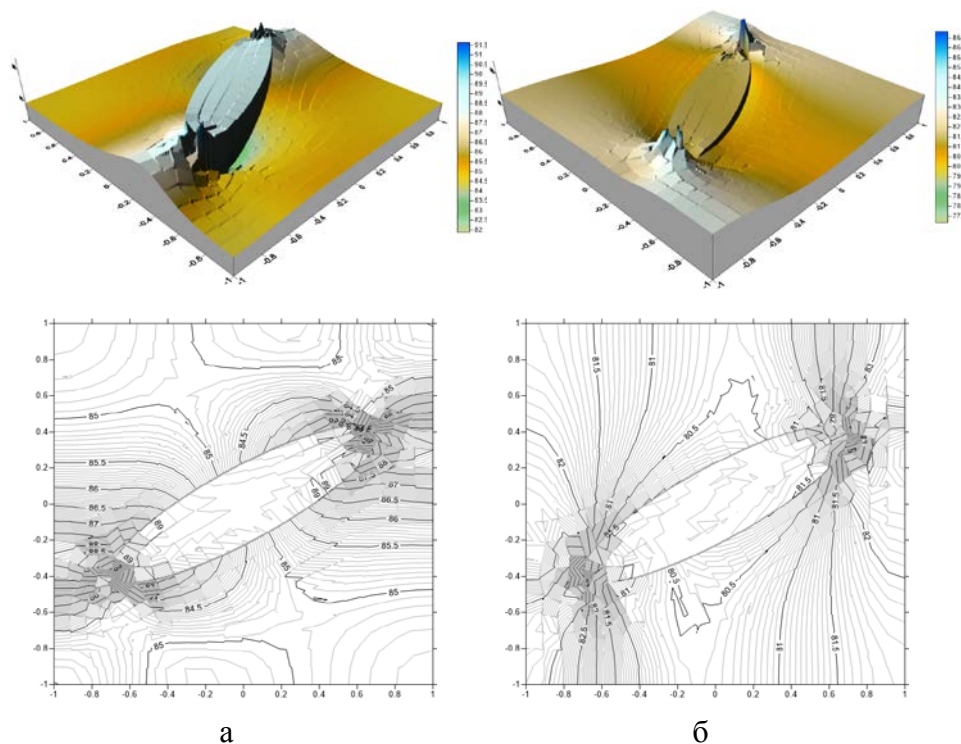


Рис.2. Линии уровня и поверхность распределения тензора напряжений в задаче на ячейке для дисперсного композита с эллиптическим включением при единичной средней деформации  $\langle \varepsilon_{11} \rangle$  и степени аппроксимации  $M = 2$ : а) распределение компоненты напряжений  $\sigma_{11}$ ; б) распределение компоненты напряжений  $\sigma_{22}$ .

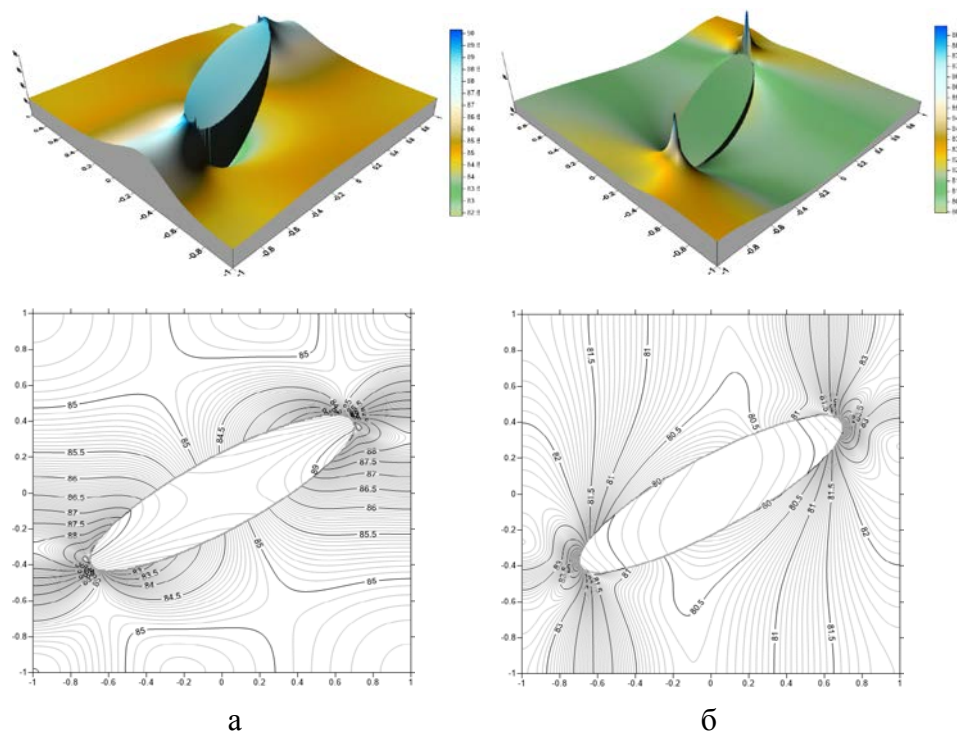


Рис.3. Линии уровня и поверхность распределения тензора напряжений в задаче на ячейке для дисперсного композита с эллиптическим включением при единичной средней деформации  $\langle \varepsilon_{11} \rangle$  и степени аппроксимации  $M = 11$ : а) распределение компоненты напряжений  $\sigma_{11}$ ; б) распределение компоненты напряжений  $\sigma_{22}$ .

На рис.4 представлен пример решения задачи на ячейке для уравнений градиентной теории упругости, когда от решения требуется гладкость вместе с первыми производными, что невозможно обеспечить обычными функциями формы в методе конечных элементов. Однако, рассматриваемый подход демонстрирует сшивку и перемещений, и их производных без требования гладкости на границе элементов аппроксимирующих функций (6), (7). Этот результат достигается исключительно за счет точного удовлетворения уравнению (2), (3) путем представления перемещений с помощью обобщенного представления Папковича-Нейбера (4), (5). Параметры круглого включения:  $r = 0.3$  модуль Юнга  $E = 70$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ ; параметры матрицы: модуль Юнга  $E = 38.5$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0.2$ ; степень аппроксимации  $M = 7$ : масштабный параметр  $l = \sqrt{\mu/C} = 0.1$ . На левом рис.4а представлено перемещение  $R_x - 0.5x$  (функция быстрых переменных в методе асимптотического усреднения), на правом рис.4б представлено распределение гладкой деформации  $\varepsilon_{11}$  в ячейке периодичности.

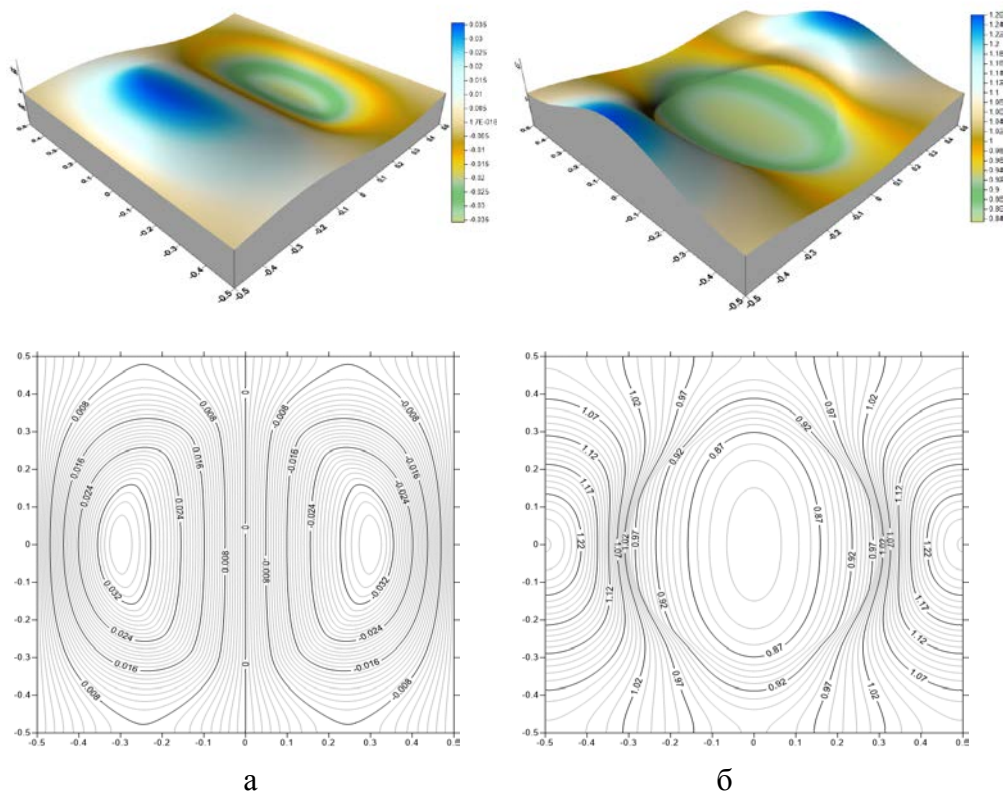


Рис.4. Линии уровня и поверхность распределения перемещений и деформаций в задаче на ячейке для градиентной теории упругости с круглым включением: а) распределение компоненты перемещений  $R_x - 0.5x$ ; б) распределение компоненты тензора деформаций  $\varepsilon_{11}$ .

### 3. ФУНКЦИИ ФОРМЫ СО СТРУКТУРОЙ

Набор аппроксимирующих функций в обобщенной схеме Треффтца можно значительно расширить, если использовать в этом качестве решения для уединенного многослойного включения сферической формы с полиномиальной асимптотикой на бесконечности и с точным удовлетворением контактных условий на межфазной границе (см. [22]). Будем называть эту задачу (по аналогии с задачей трех сферических тел [21]) обобщенной задачей Эшелби. Задача решается аналитически точно с помощью метода радиальных множителей на основе представления Папковича-Нейбера (4), (5). Полноту аппроксимирующей системы функций обеспечивает полиномиальная асимптотика  $U_n^{(0)}$  на бесконечности

$$\mathbf{R}(P) \rightarrow U_n^{(0)}, \quad U_n^{(0)}(P) = \frac{f_n^{(0)}}{\mu_M} - \frac{\nabla(\mathbf{r}f_n^{(0)})}{4\mu_M(1-\nu_M)}, \quad P = \{x, y, z\} \rightarrow \infty, \quad (17)$$

где  $f_n^{(0)}$  – гармонический векторный полином степени  $n$ ,  $\mu_M$  и  $\nu_M$  – характеристики материала матрицы.

Контактные условия на межфазных границах между слоями включают четыре векторных уравнения, следующие из интегральной формулы (11), (12),

которые можно представить через классические и когезионные составляющие общего поля перемещений в виде

$$[\mathbf{R}] = \left[ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial n} \right] = 0, \quad [\mathbf{m}_{(n)}(\mathbf{u})] = [\mathbf{p}(\mathbf{U}) - \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{u})] = 0, \quad (18)$$

где  $\mathbf{p}(\mathbf{U}) = \{\sigma_{ij}(\mathbf{U})n_j\}$  – классические напряжения на границе контакта, определяемые по классическим формулам через соответствующие деформации,  $p_i(\mathbf{U}) = 2\mu\varepsilon_{ij}n_j + \lambda\theta n_i$ ,  $n_j$  – компоненты вектора внешней нормали  $\mathbf{n}$ ,  $[\cdot]$  обозначает скачок заданной величины на границе контакта,  $\mathbf{m}_{(n)}(\mathbf{u})$ ,  $\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{u})$  – слагаемые, определяемые моментными напряжениями

$$\hat{p}_i(\mathbf{u}) = \frac{\partial m_{i(s)}}{\partial s} + \frac{\partial m_{i(\tau)}}{\partial \tau} = \frac{\partial m_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial m_{i(n)}}{\partial n} - \frac{2m_{i(n)}}{r}, \quad (19)$$

$$m_{ij} = -\mu(u_i n_j + u_j n_i) - \lambda \delta_{ij} (u_k n_k).$$

Здесь  $m_{ij}(\mathbf{u})$  – когезионная матрица,  $m_{i(n)} = m_{ij}n_j$ ,  $m_{i(s)} = m_{ij}s_j$ ,  $m_{i(\tau)} = m_{ij}\tau_j$  – проекции когезионной матрицы на три ортогональных направления, одно из которых является нормалью  $\mathbf{n}$  в заданной точке межфазной границы, а два остальных – ортогональные касательные направления  $\mathbf{s}$  и  $\boldsymbol{\tau}$  в этой же точке.

Анализируя уравнения контакта (18), представим входящие в них величины на сферической поверхности радиуса  $r$  в следующем виде через потенциалы представления (4)

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial n} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial r} + \frac{1}{4\mu(1-\nu)} \frac{\partial \nabla(\phi - r\mathbf{f}_0)}{\partial r}, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial r} + \frac{1}{C} \frac{\partial \nabla \operatorname{div}(\mathbf{f}^* - \mathbf{f})}{\partial r},$$

$$\mathbf{m}_{(n)} = -\mathbf{f} - \frac{\mu}{C} \nabla \operatorname{div}(\mathbf{f}^* - \mathbf{f}) - \frac{\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{f})}{1-2\nu} - \frac{\mu + \lambda}{C} \mathbf{n} \left( \frac{\partial \operatorname{div}(\mathbf{f}^* - \mathbf{f})}{\partial r} \right), \quad (21)$$

$$\mathbf{p}(\mathbf{U}) = \frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial r} + \frac{\nabla(r\mathbf{f}_0) - \mathbf{f}_0}{r} + \frac{\nu}{1-\nu} \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{f}_0 + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial \nabla(\phi - r\mathbf{f}_0)}{\partial r}, \quad (22)$$

где  $\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{f})$  – нормальная составляющая векторного потенциала  $\mathbf{f}$ .

Рассмотрим отдельно моментные напряжения  $\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{u})$ . Представим компоненты вектора нормали  $n_i$  на поверхности сферы в виде  $x_i/r$  и воспользуемся формулой (19). Производя дифференцирование нормалей и учитывая производные радиуса  $r_i = x_i/r$ , получаем выражение для моментных напряжений на поверхности сферы через компоненты когезионного поля

$$\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{u}) = \mu \left( \frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial n} - \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{u} \right) + \lambda \left( \frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial n} - \frac{\nabla(\mathbf{r}\mathbf{u})}{r} \right) - \frac{(2\mu - \lambda)\mathbf{u} + (\mu + \lambda)\mathbf{u}_s}{r}, \quad (23)$$

где  $\mathbf{u}_n = \mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{u})$  – нормальная составляющая когезионного поля,  $\mathbf{u}_s = \mathbf{u} - \mathbf{u}_n$  – касательная составляющая когезионного поля.

Отсюда получаем выражение отдельных составляющих моментных напряжений  $\hat{p}(u)$  на поверхности сферы через потенциалы представления Папковича-Нейбера

$$u_s = \frac{f_s}{\mu} + \frac{1}{C} \left[ \nabla \operatorname{div}(f^* - f) - n \left( \frac{\partial \operatorname{div}(f^* - f)}{\partial r} \right) \right],$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial n} - n \operatorname{div} u = n \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial(nf)}{\partial r} + \frac{1}{C} \frac{\partial^2 \operatorname{div}(f^* - f)}{\partial r^2} - \frac{\operatorname{div} f^*}{k} \right),$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial n} - \frac{\nabla(ru)}{r} = \frac{1}{\mu} \left( n \frac{\partial(nf)}{\partial r} - \frac{\nabla(rf)}{r} \right) +$$

$$+ \frac{1}{C} \left[ n \left( \frac{\partial^2 \operatorname{div}(f^* - f)}{\partial r^2} \right) - \frac{1}{r} \nabla \left( \frac{\partial \operatorname{div}(f^* - f)}{\partial r} \right) \right]$$

Структура потенциалов  $\phi$ ,  $f_0$ ,  $f$ ,  $f^*$  в задаче Эшелби, обеспечивающая разрешение контактных уравнений для величин (18) в алгебраической форме, устанавливается с помощью представления фундаментальных решений уравнения Лапласа и Гельмгольца в виде произведений радиальных множителей  $h_n(r)$  и однородных гармонических полиномов степени  $n$  (см. [11,12]).

В развиваемом методе необходимые потенциалы определяются в подобластях  $G_l$ ,  $G_j$ ,  $G_m$ , где  $G_l$  – включение,  $G_m$  – матрица,  $G_j$  – произвольное число промежуточных слоев сферической формы, с помощью радиальных множителей на основе базового гармонического полинома  $f_n^{(0)}$ , входящего в уравнение (6) и определяющего асимптотику решения на бесконечности. При подстановке такой формы потенциалов в соотношения (18) произведение радиального множителя и функции преобразуется в сумму двух слагаемых, одно из которых содержит некоторый дифференциальный оператор над полиномом. В результате получаем дифференциальные соотношения, которые используются при выводе контактных уравнений на межфазных границах

$$\operatorname{div}(hf) = h \operatorname{div} f + \frac{h'}{r}(rf), \quad \nabla(hrf) = h \nabla(rf) + \frac{h'}{r} r(rf),$$

$$\nabla \operatorname{div}(hf) = h \nabla \operatorname{div} f + \frac{h'}{r} [\nabla(rf) + r \operatorname{div} f] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{h'}{r} \right) r(rf).$$

Отсюда следует, что любое из соотношений (20)-(23) представляется в виде линейных комбинаций базового полинома и радиальных множителей, принимающих постоянное значение на межфазных границах сферической формы. Справедлива следующая теорема (см. [22]).

**Т е о р е м а (о представлении контактных условий на межфазной границе сферической формы).** Пусть потенциалы из представления Папковича-Нейбера (1), (2) имеют вид произведений  $hf_n^{(0)}$  базового гармонического полинома  $f_n^{(0)}$  и функции  $h(r)$  (радиального множителя), зависящего только

от радиуса. Тогда все величины (3), (20)-(23):  $U$ ,  $u$ ,  $\partial U/\partial n$ ,  $du/\partial n$ ,  $M_{(n)}$ ,  $p(U)$ ,  $\hat{p}(u)$  (которые мы обозначим  $F$ ), входящие в контактные уравнения (18), представляются на межфазной границе сферической формы в виде линейной комбинации некоторых радиальных множителей  $h_0, h_1, h_2, h_3, h_4$  и пяти канонических операторов над функцией  $f_n^{(0)}$  следующего вида

$$F = h_0 r^2 \nabla \operatorname{div} f_n^{(0)} + h_1 f_n^{(0)} + h_2 \nabla (\mathbf{r} f_n^{(0)}) + h_3 \mathbf{r} \operatorname{div} f_n^{(0)} + h_4 r^{-2} \mathbf{r} (\mathbf{r} f_n^{(0)}). \quad (26)$$

Структура вспомогательных потенциалов, обеспечивающая разрешение контактных уравнений (18) в задаче Эшелби в алгебраической форме, устанавливается на основе разложения Гаусса [23] для произвольных однородных полиномов  $\phi_n(P)$  в ряд по однородным гармоническим полиномам  $\psi_n(P)$

$$\phi_n(P) = \sum_{k=0}^{[n/2]} r^{2k} \psi_{n-2k}(P), \quad \Delta \psi_{n-2k}(P) = 0, \quad r = |P| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \quad (27)$$

В развиваемом методе необходимые потенциалы должны удовлетворять уравнениям Гельмгольца и Лапласа и определяются в подобластях  $G_I, G_j, G_M$  с помощью двух систем радиальных множителей на основе однородного гармонического полинома степени  $n$ . Эти системы (одна регулярная, другая сингулярная) строятся путем дифференцирования фундаментального решения соответствующего уравнения (см. [12]). Справедливо следующее утверждение.

**Т е о р е м а (о радиальных множителях для уравнения Гельмгольца).**

Системы функций  $\{h_n(r)\psi_n(P)\}$  и  $\{\hat{h}_n(r)\psi_n(P)\}$ , где  $\psi_n$  – однородные гармонические полиномы степени  $n$ , а  $h_n$  и  $\hat{h}_n$  – системы функций, соответствующие регулярному и сингулярному фундаментальному решению уравнения Гельмгольца

$$h_0 = \frac{\sinh(\kappa r)}{\kappa r}, \quad h_n = \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^n h_0, \quad \hat{h}_0 = \frac{1}{4\pi} \frac{\cosh(\kappa r)}{r}, \quad \hat{h}_n = \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^n \hat{h}_0 \quad (28)$$

удовлетворяют уравнению Гельмгольца (7).

Анализируя с помощью формулы (27), соотношения (26), в которые входят однородные полиномы  $\nabla \operatorname{div} f_n^{(0)}$ ,  $f_n^{(0)}$ ,  $\nabla (\mathbf{r} f_n^{(0)})$ ,  $\mathbf{r} \operatorname{div} f_n^{(0)}$  и  $\mathbf{r} (\mathbf{r} f_n^{(0)})$ , находим, что при вычислении контактных уравнений, возникают пять базисных гармонических полиномов (см. [22])

$$\psi_0 = \nabla \operatorname{div} f_n^{(0)}, \quad \psi_1 = f_n^{(0)}, \quad \psi_2 = \nabla (\mathbf{r} f_n^{(0)}) - \frac{r^2}{2n-1} \nabla \operatorname{div} f_n^{(0)},$$

$$\psi_3 = -\frac{r^{2n+1}}{2n-1} \nabla (r^{-2n+1} \operatorname{div} f_n^{(0)}), \quad \psi_4 = \frac{r^{2n+5} \nabla \operatorname{div} (r^{-2n-1} f_n^{(0)})}{(2n+1)(2n+3)}.$$

Таким образом, общая форма потенциалов  $f_0, f$  и  $f^*$  в представлении (4), (5), разрешающая контактные условия (18) в алгебраическом виде, имеет в соответствии с выражением полиномов  $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$  через  $f_n^{(0)}$

следующий общий вид с неопределенными коэффициентами в каждой фазе материала

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_0 &= (A_j + \hat{A}_j r^{-2n-1}) \mathbf{f}_n^{(0)} + (B_j r^{2n+1} + \hat{B}_j) \nabla (r^{-2n+1} \operatorname{div} \mathbf{f}_n^{(0)}) + \\
&+ (C_j r^{2n+1} + \hat{C}_j) \left[ \nabla (r^{-2n-1} (\mathbf{r} \mathbf{f}_n^{(0)})) - \mathbf{r} \operatorname{div} (r^{-2n-1} \mathbf{f}_n^{(0)}) \right] + \\
&+ (D_j r^{2n+5} + \hat{D}_j) \nabla \operatorname{div} (r^{-2n-1} \mathbf{f}_n^{(0)}) + (E_j + \hat{E}_j r^{-2n+3}) \nabla \operatorname{div} \mathbf{f}_n^{(0)}, \\
\mathbf{f} &= (A_j h_n(r) + \hat{A}_j \hat{h}_n(r)) \mathbf{f}_n^{(0)} + (B_j h_n(r) + \hat{B}_j \hat{h}_n(r)) r^{2n+1} \nabla (r^{-2n+1} \operatorname{div} \mathbf{f}_n^{(0)}) + \\
&+ (C_j h_n(r) + \hat{C}_j \hat{h}_n(r)) r^{2n+1} \left[ \nabla (r^{-2n-1} (\mathbf{r} \mathbf{f}_n^{(0)})) - \mathbf{r} \operatorname{div} (r^{-2n-1} \mathbf{f}_n^{(0)}) \right] + \\
&+ (D_j h_{n+2}(r) + \hat{D}_j \hat{h}_{n+2}(r)) r^{2n+5} \nabla \operatorname{div} (r^{-2n-1} \mathbf{f}_n^{(0)}) + \\
&+ (E_j h_{n-2}(r) + \hat{E}_j \hat{h}_{n-2}(r)) \nabla \operatorname{div} \mathbf{f}_n^{(0)}, \\
\mathbf{f}^* &= (A_j h_n^*(r) + \hat{A}_j \hat{h}_n^*(r)) \mathbf{f}_n^{(0)} + (B_j h_n^*(r) + \hat{B}_j \hat{h}_n^*(r)) r^{2n+1} \nabla (r^{-2n+1} \operatorname{div} \mathbf{f}_n^{(0)}) + \\
&+ (C_j h_n^*(r) + \hat{C}_j \hat{h}_n^*(r)) r^{2n+1} \left[ \nabla (r^{-2n-1} (\mathbf{r} \mathbf{f}_n^{(0)})) - \mathbf{r} \operatorname{div} (r^{-2n-1} \mathbf{f}_n^{(0)}) \right] + \\
&+ (D_j h_{n+2}^*(r) + \hat{D}_j \hat{h}_{n+2}^*(r)) r^{2n+5} \nabla \operatorname{div} (r^{-2n-1} \mathbf{f}_n^{(0)}) + \\
&+ (E_j h_{n-2}^*(r) + \hat{E}_j \hat{h}_{n-2}^*(r)) \nabla \operatorname{div} \mathbf{f}_n^{(0)}.
\end{aligned}$$

Подставляя эти соотношения в представление Папковича-Нейбера (4), (5) и учитывая (20)-(23), приводим контактные уравнения на межфазных границах к виду (26). Затем, приравнивая между собой радиальные функции в (26) нулю, получаем невырожденную систему линейных алгебраических уравнений для определения всех неизвестных коэффициентов в приведенных выше выражениях для потенциалов  $\mathbf{f}_0$ ,  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{f}^*$  в представлении (4), (5).

Собирая все решения обобщенной задачи Эшелби с условием (17) при произвольном  $n$ , мы получим полную систему функций для аппроксимации периодических решений в задаче на ячейке с многослойными включениями сферической формы. Эта система функций, которые можно назвать функциями формы со структурой, поскольку они точно учитывают контактные условия на межфазных границах, позволяет с высокой степенью точности аппроксимировать локальные поля напряжений в окрестности включений и вычислить эффективные характеристики композитных материалов с масштабными эффектами в рамках классической и градиентной теории упругости.

На рис.5 представлен численный расчет в рамках классической теории упругости (см. [24]) полей напряжений в ячейке с включением и функционально-градиентным межфазным слоем, состоящем из 99 подслоев с кусочно-постоянными характеристиками, изменяющимися по заранее заданному закону. Представлены две картины распределения локальных полей напряжений, полученные для дисперсного композита со сферическими включениями и характеристиками  $E_I = 800$  GPa,  $\nu_I = 0.3$ , на основе эпоксидной смолы с характеристиками  $E_M = 3$  GPa,  $\nu_M = 0.32$  (левый рисунок) и почти несжимаемого эластомера с характеристиками  $E_M = 0.135$  GPa,  $\nu_M = 0.4999$



(правый рисунок) при объемном наполнении включений 0.2%. Модули Юнга подслоев  $E_i$  и их радиусы  $r_i$  изменяются по следующему закону

$$E_i = E_l - i \frac{E_l - E_M}{N}, \quad r_i = q^i r_1, \quad q = 1.015, \quad N = 100;$$

коэффициент Пуассона подслоев считается постоянным и равным  $\nu_i = 0.2$ .

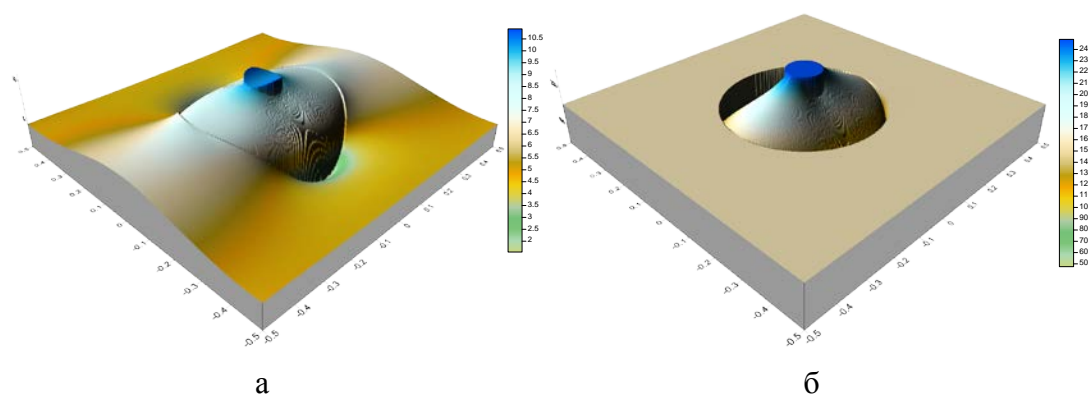


Рис.5. Задача на ячейке периодичности для дисперсного композита с функционально-градиентным межфазным слоем при деформации 1% вдоль оси  $x$ : а) распределение компоненты напряжений  $\sigma_{11}$  в эпоксидной матрице; б) распределение компоненты напряжений  $\sigma_{11}$  в почти несжимаемой эластомерной матрице.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработана обобщенная схема Треффтца для задач градиентной теории упругости, содержащих как частный случай классические задачи теории упругости. Эта схема основывается на аналитическом представлении перемещений с помощью вспомогательных потенциалов, удовлетворяющих уравнению Гельмгольца и Лапласа, и использует конечно-элементную сетку для представления решения в отдельных элементах через полные системы функций, являющиеся фундаментальными решениями уравнений Гельмгольца и Лапласа. За счет аналитического представления, точно удовлетворяющего исходному уравнению, задача минимизации функционала энергии сводится к блочной системе уравнений, которая обеспечивает сшивку всех необходимых величин на границе элементов: перемещений, поверхностных сил, а для градиентных уравнений теории упругости еще и производных перемещений, и когезионных моментов. Этот метод нашел свое эффективное применение для задач микромеханики композитных материалов, возникающих при оценке их эффективных характеристик в методе Эшелби-Кристенсена и в методе асимптотического усреднения уравнений с быстроосциллирующими коэффициентами. В результате мы получаем эффективный инструмент для точного, почти аналитического решения задачи на ячейке, который может рассматриваться, как новая технология конечно-элементных аппроксимаций, не предполагающая согласованности конечно-элементной сетки и непрерывности функций формы на границе между элементами.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Батэ К., Вилсон Е. *Численные методы анализа и метод конечных элементов*. – М.: Стройиздат, 1982. – 448с.
2. Toupin R.A. *Elastic materials with couple stresses* // Arch. Rational Mech. Anal. – 1962. – Vol.11. – Pp.385-414.
3. Mindlin R.D. *Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity* // Int. J. Solids Struct. – 1965. – Vol.1. – Pp.417-438.
4. Papkovitch P.F. *Solution générale des équations différentielles fondamentales de l'élasticité, exprimée par trois fonctions harmoniques* // C.R. Acad. Sci., Paris. – 1932. – Vol.195. – Pp.513-515.
5. Neuber H. *Ein neuer ansatz zur losung raumlicher probleme der elastizitatstheorie* // ZAMM. – 1934. – Vol.14. – No.4. – Pp.203-212.
6. Doyle J.M. *A general solution for strain-gradient elasticity theory* // J. Math. Anal. Appl. – 1969. – Vol.27. – Pp.171-180.
7. Михлин С.Г. *Вариационные методы в математической физике*. – М.: Наука, 1970. – 512с.
8. Борисенко А.И., Тарапов И.Е. *Векторный анализ и начала тензорного исчисления*. – М.: Высшая школа, 1966. – 252с.
9. Volkov-Bogorodskiy D.B., Moiseev E.I. *Generalized Trefftz method in the gradient elasticity theory* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2021. – Vol.42. – No.8. – Pp.1944-1953.
10. Волков-Богородский Д.Б. *Аналитико-численный метод оценки эффективных характеристик структурно-неоднородных материалов* // Вестник Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского. – 2011. – №4(2). – С.407-409.
11. Волков-Богородский Д.Б. *Метод радиальных множителей в задачах механики неоднородных сред с многослойными включениями* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2016. – Т.22. – №1. – С.19-39.
12. Lurie S., Volkov-Bogorodskiy D., Moiseev E., Kholomeeva A. *Radial multipliers in solutions of the Helmholtz equations* // Integral Transforms and Special Functions. – 2019. – Vol.30. – No.4. – Pp.254-263.
13. Волков-Богородский Д.Б. *Разработка блочного аналитико-численного метода решения задач механики и акустики* / Сборник трудов школы-семинара «Композиционные материалы». – М.: ИПРИМ РАН, 2000. – С.44-56.
14. Волков-Богородский Д.Б. *Применение блочного аналитико-численного метода мультиполей к задачам акустики* // Вестник МАИ. – 2005. – Т.12. – №3. – С.51-60.
15. Волков-Богородский Д.Б., Харченко С.А. *Параллельная версия аналитико-численного метода блоков для связанных задач волновой виброакустики* // Вестник Нижегородского ун-та им. Н.И.Лобачевского. – 2009. – №5. – С.202-209.
16. Волков-Богородский Д.Б., Сушко Г.Б., Харченко С.А. *Комбинированная MPI+threads параллельная реализация метода блоков для моделирования тепловых процессов в структурно-неоднородных средах* // Вычислительные методы и программирование. – 2010. – Т.11. – С.127-136.
17. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах*. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
18. Победря Б.Е. *Механика композиционных материалов*. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 336 с.

19. Bensoussan A., Lions J.L., Papanicolaou G. *Asymptotic analysis for periodic structures*. – Amsterdam: North-Holland Publ. Comp., 1978. – 700 p.
20. Власов А.Н., Мерзляков В.П. *Усреднение деформационных и прочностных свойств в механике скальных пород*. – М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2009. – 208 с.
21. Кристенсен Р. *Введение в механику композитов*. – М.: Мир, 1982. – 334с.
22. Volkov-Bogorodskiy D.B., Moiseev E.I. *Generalized Eshelby problem in the gradient theory of elasticity // Lobachevskii Journal of Mathematics*. – 2020. – Vol.41. – No.10. – Pp.2083-2089.
23. Соболев С.Л. *Введение в теорию кубатурных формул*. – М.: Наука, 1974. – 808 с.
24. Vlasov A.N., Volkov-Bogorodskiy D.B. *Modeling the effective properties of fibrous composite materials with a functionally graded interphase layer based on the Eshelby problem // AIP Conference Proceedings*. – 2022. – Vol.2611. – 100006. DOI: 10.1063/5.0120421.

## REFERENCES

1. Bathe K., Willson E. *Chislennye metody analiza i metod konechnykh ehlementov [Numerical methods of analysis and finite element method]*. Moskva, Strojizdat, 1982, 448 p.
2. Toupin R.A. *Elastic materials with couple stresses*. Arch. Rational Mech. Anal., 1962, Vol.11, Pp.385-414.
3. Mindlin R.D. *Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity*. Int. J. Solids Struct., 1965, Vol.1, Pp.417-438.
4. Papkovitch P.F. *Solution générale des équations différentielles fondamentales de l'élasticité, exprimée par trois fonctions harmoniques*. C.R. Acad. Sci., Paris, 1932, Vol.195, Pp.513-515.
5. Neuber H. *Ein neuer ansatz zur losung raumlicher probleme der elastizitatstheorie // ZAMM*. – 1934. V. 14, No. 4. P. 203-212.
6. Doyle J.M. *A general solution for strain-gradient elasticity theory*. J. Math. Anal. Appl., 1969, Vol.27, Pp.171-180.
7. Mihlin S.G. *Variatsionnyye metody v matematicheskoy fizike [Variational methods in mathematical physics]*. Moskva, Nauka, 1970, 512 p.
8. Borisenko A.I., Tarapov I.E. *Vektornyj analiz i nachala tenzornogo ischisleniya [Vector analysis and the beginnings of tensor calculus]*. Moskva, Vysshaya shkola, 1966, 252 p.
9. Volkov-Bogorodskiy D.B., Moiseev E.I. *Generalized Trefftz method in the gradient elasticity theory*. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, Vol.42, No.8, Pp.1944-1953.
10. Volkov-Bogorodskii D.B. *Analitiko-chislennyj metod otsenki ehffektivnykh kharakteristik strukturno-neodnorodnykh materialov [Analytical-numerical method for estimating the effective characteristics of structurally heterogeneous materials]*. Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo, 2011, No.4(2), Pp.407-409.
11. Volkov-Bogorodskii D.B. *Metod radial'nykh mnozhitelej v zadachakh mekhaniki neodnorodnykh sred s mnogoslownymi vklyuchenyami [Method of radial multipliers in problems of mechanics of inhomogeneous media with multilayered*

- inclusions*]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2016, Vol.22, No.1, Pp.19-39.
12. Lurie S., Volkov-Bogorodskiy D., Moiseev E., Kholomeeva A. *Radial multipliers in solutions of the Helmholtz equations*. *Integral Transforms and Special Functions*, 2019, Vol.30, No.4, Pp.254-263.
  13. Volkov-Bogorodskii D.B. *Razrabotka blochnogo analitiko-chislennogo metoda resheniya zadach mekhaniki i akustiki [Development of a block analytic-numerical method for solving problems of mechanics and acoustics]*. *Sbornik trudov shkoly-seminara "Kompozitsionnye materialy"*. Moskva, IPRIM RAN, 2000, Pp.44-56.
  14. Volkov-Bogorodskii D.B. *Primenenie blochnogo analitiko-chislennogo metoda mul'tipolej k zadacham akustiki [Application of block analytic-numerical method of multipoles to problems of acoustics]*. *Vestnik MAI*, 2005, Vol.12, No.3, Pp.51-60.
  15. Volkov-Bogorodskii D.B., Kharchenko S.A. *Parallel'naya versiya analitiko-chislennogo metoda blokov dlya svyaznykh zadach volnovoj vibroakustiki [Parallel version of the analytic-numerical block method for connected problems of wave vibroacoustics]*. *Vestnik Nizhegorodskogo un-ta im. N.I. Lobachevskogo*, 2009, No.5, Pp.202-209.
  16. Volkov-Bogorodskii D.B., Sushko G.B., Kharchenko S.A. *Kombinirovannaya MPI+threads parallel'naya realizatsiya metoda blokov dlya modelirovaniya teplovykh protsessov v strukturno-neodnorodnykh sredakh [Combined MPI+threads parallel realization of the block method for modeling thermal processes in structurally inhomogeneous media]*. *Vychislitel'nye metody i programmirovaniye*, 2010, Vol.11, Pp.127-136.
  17. Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh [Averaging processes in periodic media]*. Moskva, Nauka, 1984, 352 p.
  18. Pobedria B.E. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov [Mechanics of composite materials]*. Moskva, Izdatel'stvo MGU, 1984, 336 p.
  19. Bensoussan A., Lions J.L., Papanicolaou G. *Asymptotic analysis for periodic structures*. Amsterdam, North-Holland Publ. Comp., 1978, 700 p.
  20. Vlasov A.N., Merzliakov V.P. *Usrednenie deformatsionnykh i prochnostnykh svoystv v mekhanike skal'nykh porod [Averaging of deformation and strength properties in rock mechanics]*. Moskva, Izdatel'stvo Assotsiatsii stroitel'nykh vuzov, 2009, 208 p.
  21. Kristensen R. *Vvedenie v mekhaniku kompozitov [Introduction to the mechanics of composites]*. Moskva, Mir, 1982, 334 p.
  22. Volkov-Bogorodskiy D.B., Moiseev E.I. *Generalized Eshelby problem in the gradient theory of elasticity*. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2020, Vol.41, No.10, Pp.2083-2089.
  23. Sobolev S.L. *Vvedenie v teoriyu kubaturnykh formul [Introduction to the theory of cubature formulas]*. Moskva, Nauka, 1974, 808 p.
  24. Vlasov A.N., Volkov-Bogorodskiy D.B. *Modeling the effective properties of fibrous composite materials with a functionally graded interphase layer based on the Eshelby problem*. *AIP Conference Proceedings*, 2022, Vol.2611, 100006. DOI: 10.1063/5.0120421.

Поступила в редакцию 02 сентября 2022 года.

---

Сведения об авторе:

Волков-Богородский Дмитрий Борисович – к.ф.-м.н., в.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: [volkov-bogorodskij@iam.ras.ru](mailto:volkov-bogorodskij@iam.ras.ru)