

УДК 531.3

EDN ATPNWH (<https://elibrary.ru/atpnh>)

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ КОМПОЗИТНЫХ РАМНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С УЧЕТОМ ДЕМПФИРОВАНИЯ, НЕЛОКАЛЬНОГО ВО ВРЕМЕНИ*

Сидоров В.Н.^{1,2}, Бадина Е.С.^{1,2,3}, Детина Е.П.¹

¹Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия

²Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, Россия

³ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Статья посвящена задаче конечно-элементного анализа колебательного процесса композитной рамной конструкции с моделированием диссипативных свойств материала, как нелокальных во времени. Внутреннее трение в материале предполагается зависящим не только от значения скорости деформаций материала рамы в текущий момент времени, но и от значений скоростей деформаций на всей истории колебательного процесса. Убывание влияния временных точек друг на друга при увеличении расстояния между ними – а именно, степень нелокальности материала – определяется масштабным параметром. Матрица демпфирования конечно-элементной модели рамной конструкции получена из условия стационарности полной энергии деформирования движущейся механической системы. Решение уравнения движения расчётной модели конструкции методом Ньюмарка реализовано в программном комплексе MATLAB. Рассматривается двумерная расчётная модель, построенная без учета ортотропных свойств материала. В качестве примеров численного расчёта рассматривались две П-образные рамы с разными пролётами верхнего ригеля, выполненные из винил-эфирного стеклопластика. Масштабный параметр временной нелокальности устанавливается методом наименьших квадратов по результатам численного эксперимента, реализованного в верифицированном расчётном комплексе SIMULIA Abaqus в трёхмерной постановке с моделированием ортотропных свойств композитного материала. Результаты, полученные с использованием калибруемой нелокальной во времени модели демпфирования, приводятся в статье в сравнении с данными трёхмерного численного эксперимента. Показано, что нелокальная модель калибруется с адекватной точностью для рамы, обладающей сравнительно невысокой первой частотой собственных колебаний. Результаты, полученные с использованием откалиброванной модели демпфирования нелокальной во времени, могут быть использованы в случаях, когда применение детализированных твердотельных моделей является неэффективным.

Ключевые слова: нелокальное демпфирование; колебания рамных конструкций; композитные материалы; нелокальная механика; метод конечных элементов; метод Ньюмарка

NUMERICAL MODELING FOR OSCILLATIONS OF COMPOSITE FRAMES ACCOUNTING FOR TIME-NONLOCAL DAMPING

Sidorov V.N.^{1,2}, Detina E.P.¹, Badina E.S.^{1,2,3}

* Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (Проект №21-19-00634).

¹*Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia*

²*Russian University of Transport (RUT (MIIT), Moscow, Russia*

³*Institute of Applied Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

ABSTRACT

The paper is devoted to the finite element simulation of composite frame vibrations considering the nonlocal in time damping properties of the material. It is assumed that internal damping of the structure at the current time moment is dependent not only on an instant value of the strain rate at this moment, but also on the values of strain rates of the previous time history. The decrease of the time points influence on each other with the increase of the gap between them depends on the scale parameter. The damping matrix was obtained from the requirement of stationary full energy of the vibrating system. The solution of the equation of motion by the Newmark method is implemented in MATLAB software package. The model is two-dimensional. It is built without a consideration for the orthotropic properties. Two n-shape GFRP frames with the different top girder span were considered as a numerical example. The scale parameter can be determined by the least squares method using the 3D numerical simulation data. This data was obtained in SIMULIA Abaqus considering the orthotropic properties of the material. The results of the calibrated nonlocal model are compared with the 3D numerical simulation data. It is shown that the model can be calibrated with the adequate accuracy for the frame with the relatively low first natural frequency. The calibrated nonlocal 2D model can be applicable in cases when the detailed 3D solid models are inefficient.

Keywords: nonlocal damping; frame vibrations; composite materials; nonlocal mechanics; finite element analysis; Newmark method

ВВЕДЕНИЕ

Задача адекватного моделирования динамического поведения конструктивных элементов, выполненных из структурно-сложных материалов с контролируемыми свойствами, является в известной мере непростой. Построение с этой целью подробных трёхмерных численных моделей, позволяющих учесть особенности работы под нагрузкой таких материалов, может быть неэффективным и ресурсоёмким. По этой причине возникла необходимость построения альтернативных моделей, достаточно гибких для решения описываемой задачи. Целый класс таких моделей построен на принципах нелокальной механики. Модели могут строиться в предположении нелокальности в пространстве или во времени как упругих, так и демпфирующих свойств материала.

В работе [1] была предложена модель упругих свойств материала, нелокальная по пространственной координате. Эта модель была в дальнейшем развита в [2,3]. В статье [4] сочетание нелокальной модели, подобной модели Эрингена, и модели, построенной с использованием дробного исчисления, применяется для решения задачи об изгибе балок Эйлера-Бернулли, выполненных из пористых вязкоупругих материалов.

Впервые модель демпфирования, нелокальная по пространственной координате, была, по-видимому, предложена Д. Расселом [5] для динамического анализа композитной балки.

В статье [6] для анализа балок Эйлера-Бернулли и пластин Кирхгофа используется модель нелокального демпфирования, включающая в себя пространственный и временной гистерезис. Демпфирующие силы вычисляются

здесь как среднее от поля скоростей на некоторой области, определяемой ядровой функцией. Результирующее интегро-дифференциальное уравнение движения в частных производных решается методом Бубнова-Галеркина. В [7] исследуется динамическое поведение балок Эйлера-Бернулли с отдельными участками нелокальности. В работе [8] нелокальные модели используются для решения задачи устойчивости стержней, подверженных детерминированным и стохастическим воздействиям. В исследовании [9] описывается методика калибровки этой модели по результатам численного моделирования колебаний композитной балки в трёхмерной постановке с учетом её ортотропных свойств. Приведённые в статье результаты указывают на то, что одномерная нелокальная модель может быть вполне обоснованно использована вместо подробной классической пространственной вычислительной модели.

В статье [10] рассматриваются четыре модели демпфирования на примере колебаний композитной консольной балки с сосредоточенной массой на свободном конце. Рассматриваемая балка выполнена из пластика, армированного стекловолокном. Модель, называемая в статье временным гистерезисом, похожа на теорию среды с наследственностью, где отклик системы на внешние воздействия, имевшие место в прошлом, влияет на её динамическое поведение в настоящем.

Для того чтобы сделать нелокальную модель применимой при решении практических задач, нелокальная во времени модель демпфирования была интегрирована в алгоритм метода конечных элементов [11]. Такой подход расширяет возможности численного моделирования с применением нелокальных гипотез. В настоящей статье это показано на примере П-образных рамных конструкций, выполненных из композитного материала.

1. НЕЛОКАЛЬНАЯ ВО ВРЕМЕНИ МОДЕЛЬ ДЕМПФИРОВАНИЯ КОЛЕБАНИЙ РАМНОГО ЭЛЕМЕНТА

Уравнение движения деформируемой системы в алгоритме метода конечных элементов с учетом рассеяния энергии колебаний представляется в матричном виде [12]

$$M\ddot{V}(t) + D\dot{V}(t) + KV(t) = F(t), \quad (1)$$

где $V(t)$ – вектор узловых перемещений (точкой обозначена производная по времени), K – глобальная матрица жесткости конечно-элементной модели, D – матрица демпфирования, M – матрица масс, $F(t)$ – вектор внешних нагрузок.

В настоящей работе использовалась матрица жесткости рамного конечного элемента с тремя степенями свободы в каждом из двух его узлов

$$K_i = \begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Здесь E – модуль упругости материала, A , I и l – площадь поперечного сечения, момент инерции, и длина конечного элемента, соответственно. Рассматриваемая модель является плоской, ортотропные свойства материала не учитываются, модуль упругости принимается равным модулю упругости материала в направлении оси элемента.

Матрица демпфирования получена из условия стационарности полной энергии колебаний конструкции [11].

При переходе к нелокальной во времени модели демпфирования материала (модели демпфирования с памятью) предполагается, что диссипативные силы в конструкции зависят не только от текущего значения скорости деформаций конечных элементов, но и от значений скоростей деформаций на всей истории колебательного процесса. При этом уравнение (1) принимает вид

$$M\ddot{V}(t) + D \int_0^t G(t-\tau) \dot{V}(\tau) dt_1 + KV(t) = F(t). \quad (3)$$

Ядровая функция $G(t-t_1)$ характеризует убывание влияния моментов колебательного процесса друг на друга по мере увеличения временного промежутка между ними, причём соблюдается условие нормирования

$$\int_0^t G(t-\tau) d\tau = 1. \quad (4)$$

В настоящей работе в качестве ядра оператора внутреннего демпфирования использована функция ошибок

$$G(t-\tau) = \frac{2\mu}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\mu^2(t-\tau)^2}. \quad (5)$$

Здесь μ – масштабный параметр, характеризующий степень нелокальности демпфирования материала. Чем меньше значение μ , тем более нелокальной является модель. Приняв достаточно высокое значение μ можно свести модель к классической локальной. Таким образом, локальная модель внутреннего трения является частным случаем нелокальной.

2. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

В качестве численных примеров рассматривались две П-образные рамы с различными пролётами верхнего ригеля. Их геометрия и нагрузки приведены на рис. 1а,б.

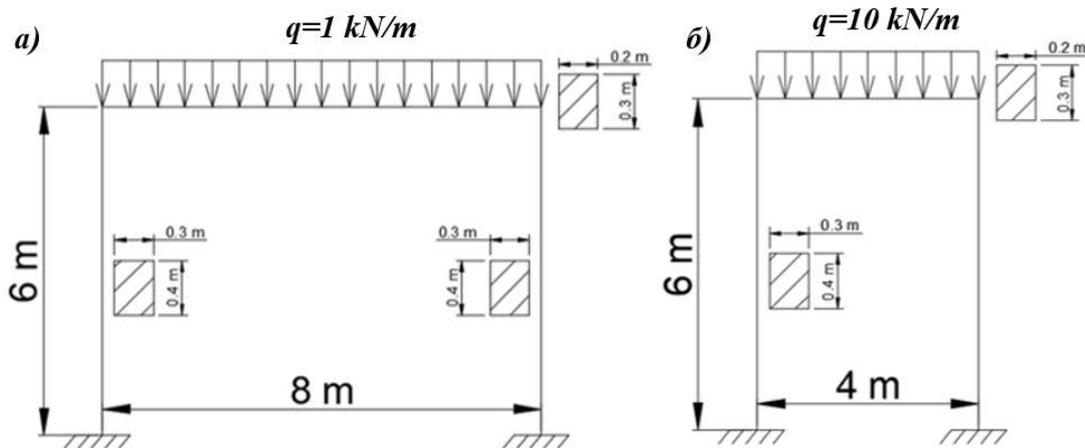


Рис.1. Расчётные схемы рассматриваемых рамных конструкций.

Рама выполнена из винилэфирного стеклопластика, характеристики которого, полученные в исследовании [13], приведены в табл.1.

Таблица 1.

Физические характеристики материала рам
Модуль Юнга в продольном (осевом) направлении $E_l = 17.2$ GPa
Модуль Юнга в поперечном направлении $E_{tr} = 12.2$ GPa
Коэффициент Пуассона в продольном направлении $\mu_l = 0.32$
Коэффициент Пуассона в поперечном направлении $\mu_{tr} = 0.15$
Плотность материала $\rho = 1900$ кг/м ³
Коэффициент демпфирования в долях от критического $\gamma = 0.042$

Для решения уравнения динамического равновесия конструкции (3) использовался метод Ньюмарка [12]. Первая и вторая производные вектора перемещений $\mathbf{V}(t)$ были представлены в виде

$$\dot{\mathbf{V}}_{i+1} = \frac{\mathbf{V}_{i+1} - \mathbf{V}_i}{\Delta t}, \quad \ddot{\mathbf{V}}_{i+1} = \frac{2}{\Delta t^2}(\mathbf{V}_{i+1} - \mathbf{V}_i - \dot{\mathbf{V}}_i \Delta t) - \ddot{\mathbf{V}}_i, \quad (6)$$

где Δt – шаг по времени.

После подстановки соотношений (6) в уравнение (3) и некоторых преобразований, получим

$$\mathbf{M} \left[\frac{2}{\Delta t^2}(\mathbf{V}_{i+1} - \mathbf{V}_i - \dot{\mathbf{V}}_i \Delta t) - \ddot{\mathbf{V}}_i \right] + \mathbf{D} \frac{1}{\Delta t} \sum_{j=1}^{i+1} G(t_{i+1}, \tau_j) \dot{\mathbf{V}}_j + \mathbf{K} \mathbf{V}_i = \mathbf{F}_i. \quad (7)$$

$G(t_{i+1}, \tau_j)$ в (7) представляет собой дискретный аналог интегрального ядра (4), для функции ошибок имеющий вид

$$G(t_{i+1}, \tau_j) = \Delta t \left[\frac{2\mu}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\mu^2 \left(t - \tau + \frac{\Delta t}{2} \right)^2} \right], \quad (8)$$

где $t = (i+1)\Delta t$, $\tau = j\Delta t$, а $j = 1, 2, \dots, i+1$.

При использовании метода Ньюмарка интегральное ядро «накладывается» на все значения скоростей колебаний конструкции, начиная от момента времени $i+1$. По этой причине ядро было разделено на две отдельные части

$$\mathbf{M} \left[\frac{2}{\Delta t^2} (\mathbf{V}_{i+1} - \mathbf{V}_i - \dot{\mathbf{V}}_i \Delta t) - \ddot{\mathbf{V}}_i \right] + \beta \mathbf{D} + \alpha \mathbf{D} + \mathbf{K} \mathbf{V}_i = \mathbf{F}_i. \quad (9)$$

Часть, умноженная в выражении (9) на α , относится к $i+1$ шагу, а часть, умноженная на β , ко всем предыдущим шагам колебательного процесса

$$\beta = \sum_{j=1}^i \frac{2\mu}{\sqrt{\pi}} e^{-\mu^2(t_j - t_{j-1})^2} (\mathbf{V}_j - \mathbf{V}_{j-1}), \quad \alpha = \frac{2\mu}{\sqrt{\pi}} e^{-\mu^2(t_{i+1} - t_i)^2} (\mathbf{V}_{i+1} - \mathbf{V}_i). \quad (10)$$

Окончательное выражение для вычисления вектора перемещений имеет вид

$$\mathbf{Z} \mathbf{V}_{i+1} = \mathbf{F}_{i+1} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{V}}_i + \mathbf{Q}_1 \dot{\mathbf{V}}_i + \mathbf{Q}_2 \mathbf{V}_i + \beta \mathbf{D}, \quad (11)$$

где

$$\mathbf{Z} = \left(\frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{\Delta t} \alpha \mathbf{D} + \mathbf{K} \right), \quad \mathbf{Q}_1 = \frac{2}{\Delta t} \mathbf{M}, \quad \mathbf{Q}_2 = \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{2}{\Delta t} \mathbf{M} + \alpha \mathbf{D} \right). \quad (12)$$

3. КАЛИБРОВКА МОДЕЛИ ДЕМПФИРОВАНИЯ, НЕЛОКАЛЬНОГО ВО ВРЕМЕНИ, ПО ДАННЫМ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Степень нелокальности демпфирования материала определяется масштабным параметром μ . В [9] показана методика подбора значения масштабного параметра методом наименьших квадратов по данным численного или натурального эксперимента.

В настоящей работе калибровка нелокальной модели демпфирования производилась по результатам численного моделирования в программном комплексе SIMULIA Abaqus. Трёхмерные твердотельные модели рассматриваемых рам были построены с учётом ортотропных свойств композитного материала.

На рис.2 приведено сравнение колебательных процессов срединного сечения верхнего ригеля рамы (рис.1а), полученных в Abaqus и с использованием плоской конечно-элементной модели с классическим локальным демпфированием, смоделированным с использованием гипотезы Кельвина-Фойгта.

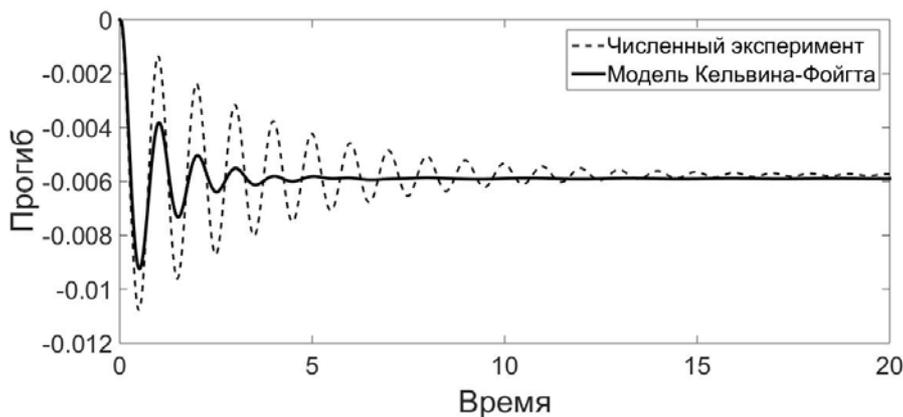


Рис.2. Сравнение результатов численного эксперимента с результатами, полученными с использованием локальной модели демпфирования.

Прогиб и время на рис.2 представлены в безразмерном виде

$$\tilde{t} = t\omega_0, \quad \tilde{d} = \frac{d}{L}. \quad (13)$$

Здесь L – пролет верхнего ригеля в свету, а ω_0 – первая собственная частота колебаний конструкции, которая для рамы с пролётом ригеля 8 м составляет 2,56 1/с, а для рамы с пролётом ригеля 4 м – 12,5 1/с.

В результате калибровки нелокальной модели для рамы, представленной на рис.1а с пролётом ригеля 8 м, получено значение масштабного параметра $\mu = 0.22$. Плоская конечно-элементная модель, построенная с использованием нелокальной гипотезы, не позволяет учесть ортотропные свойства стеклопластика. Несмотря на это, в отличие от гипотезы Фойгта, она является достаточно гибкой для того, чтобы добиться достаточно близкого совпадения с результатами численного эксперимента (рис.3).

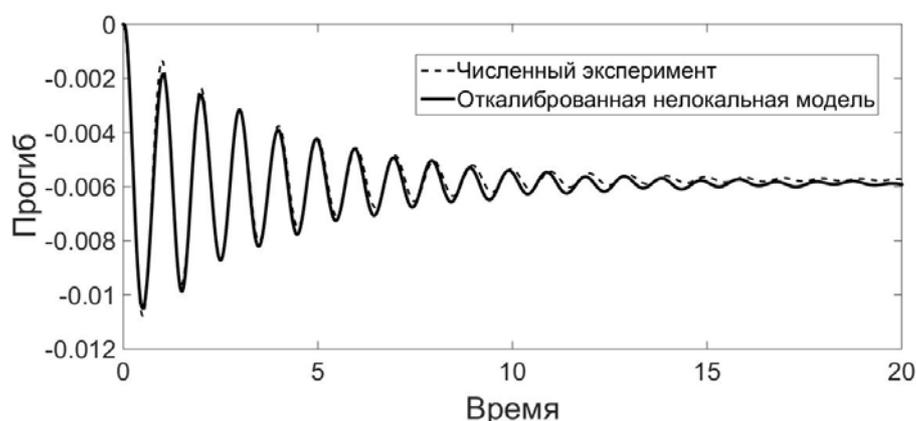


Рис.3. Сравнение результатов численного эксперимента с результатами, полученными с использованием откалиброванной нелокальной модели демпфирования для рамы с пролётом ригеля 8 м.

Рама с пролётом ригеля 4 м является более жёсткой, и первая частота её колебаний почти в пять раз больше, чем у рамы, которую мы рассмотрели выше. Наилучшие результаты, которые удалось получить для такой конструкции с использованием нелокальной во времени модели демпфирования, приведены на рис.4.

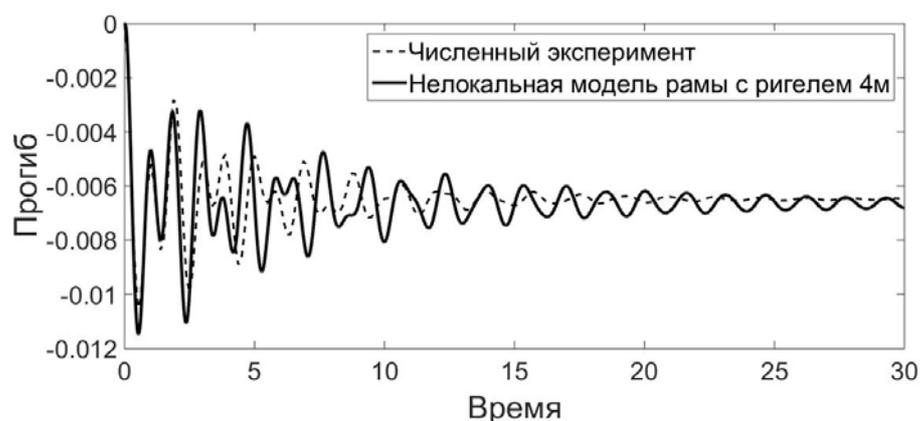


Рис.4. Сравнение результатов численного эксперимента с результатами, полученными с использованием откалиброванной нелокальной модели демпфирования для рамы с пролётом ригеля 4 м.

Очевидно, что для расширения области применимости нелокальной во времени модели демпфирования требуется её дальнейшее совершенствование, повышение её гибкости, устойчивости и достоверности. В частности, для более жёстких конструкций и их элементов, возможный путь решения этой проблемы заключается в учете влияния сдвиговых деформаций.

ВЫВОДЫ

Модель нелокального во времени демпфирования материала может быть сравнительно легко интегрирована в алгоритм метода конечных элементов, что делает её применимой для моделирования рамных конструкций различной геометрии. Возможность управлять степенью нелокальности модели за счёт изменения значения масштабного параметра позволяет использовать откалиброванную плоскую модель, построенную с учётом демпфирования с памятью, в качестве альтернативы подробным трёхмерным моделям конструкций, выполненных из материалов с развитой внутренней структурой. Такой подход является менее ресурсоёмким и может быть эффективен, к примеру, при решении задач оптимизации, при необходимости выбора из большого количества вариантов конструкции. Калибровка модели с использованием метода наименьших квадратов позволяет добиться удовлетворительного совпадения с результатами численного эксперимента для конструкций, обладающих сравнительно невысокими первыми частотами собственных колебаний. Для анализа колебаний более жёстких конструкций необходимо дальнейшее совершенствование модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. Eringen A.C., Edelen D.G.B. *Nonlocal elasticity* // Intern. J. of Engineering Science. – 1972. – Vol.10. – No.3. – Pp.233-248.
2. Pisano A.A., Fuschi P. *Closed form solution for non-local elastics bar in tension* // International Journal of Solids and Structures. – 2003. – Vol.40. – No.1. – Pp.13-23.
3. Polizzotto C. *Non-local elasticity and related variational principles* // Intern. J. of Solids and Structures. – 2001. – Vol.38. – Pp.42-43.
4. Barretta R., Marotti de Sciarra F., Pinnola F.P. *On the nonlocal bending problem with fractional hereditariness* // Meccanica. – 2022. – Vol.57. – Iss.4. – Pp.807-820.
5. Russell D.L. *On mathematical models for the elastic beam with frequency-proportional damping* / In book: Control and Estimation in Distributed Parameter Systems. – SIAM, Philadelphia, PA, 1992. – Pp.125-169.
6. Lei Y., Friswell M.I., Adhikari S. *A Galerkin method for distributed systems with non-local damping* // Intern. J. of Solids and Structures. – 2006. – Vol.43. – Pp.3381-3400.
7. Gonzalez-Lopez S., Fernandez-Saez J. *Vibrations in Euler–Bernoulli beams treated with non-local damping patches* // Computers and Structures. – 2012. – Vol.108-109. – Pp.125-134.
8. Potapov V.D. *On the Stability of a Rod under Deterministic and Stochastic Loading with Allowance for Nonlocal Elasticity and Nonlocal Material Damping* // J. of Machinery Manufacture and Reliability. – 2015. – Vol.44. – No.1. – Pp.6-13.

9. Shepitko E.S., Sidorov V.N. *Defining of nonlocal damping model parameters based on composite beam dynamic behaviour numerical simulation results* / IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2019. – Vol.675(1). – 012056.
10. Banks H.T., Inman D.J. *On damping mechanisms in beams* // J. of Applied Mechanics. – 1991. – Vol.58. – No.3. – Pp.716-723.
11. Sidorov V.N., Badina E.S., Detina E.P. *Nonlocal in time model of material damping in composite structural elements dynamic analysis* // Intern. J. for Computational Civil and Structural Engineering. – 2021. – Vol.17. – No.4. – Pp.14-21.
12. Bathe K.J., Wilson E.L. *Numerical methods in finite element analysis*. – Prentice-Hall, Inc, 1976. – 528 p.
13. Landherr J.C. *Dynamic analysis of a FRP deployable box beam*. – Kingston: Queen's University, 2008.

REFERENCES

1. Eringen A.C., Edelen D.G.B. *Nonlocal elasticity*. International Journal of Engineering Science, 1972, Vol.10, No.3, Pp.233-248.
2. Pisano A.A., Fuschi P. *Closed form solution for non-local elastics bar in tension*. International Journal of Solids and Structures. 2003, Vol.40, No.1, Pp.13-23.
3. Polizzotto C. *Non-local elasticity and related variational principles*. International Journal of Solids and Structures, 2001, Vol.38, Pp.42-43.
4. Barretta R., Marotti de Sciarra F., Pinnola F.P. *On the nonlocal bending problem with fractional Hereditariness*. Meccanica, 2022, Vol.57, Iss.4, Pp.807-820.
5. Russell D.L. *On mathematical models for the elastic beam with frequency-proportional damping*. In book: Control and Estimation in Distributed Parameter Systems. SIAM, Philadelphia, PA, 1992, Pp.125-169.
6. Lei Y., Friswell M.I., Adhikari S. *A Galerkin method for distributed systems with non-local damping*. International Journal of Solids and Structures, 2006, Vol.43, Pp.3381-3400.
7. Gonzalez-Lopez S., Fernandez-Saez J. *Vibrations in Euler–Bernoulli beams treated with non-local damping patches*. Computers and Structures, 2012, Vol.108-109, Pp.125-134.
8. Potapov V.D. *On the Stability of a Rod under Deterministic and Stochastic Loading with Allowance for Nonlocal Elasticity and Nonlocal Material Damping*. Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2015, Vol.44, No.1, Pp.6-13.
9. Shepitko E.S., Sidorov V.N. *Defining of nonlocal damping model parameters based on composite beam dynamic behaviour numerical simulation results*. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2019, Vol.675(1), 012056.
10. Banks H.T., Inman D.J. *On damping mechanisms in beams*. Journal of Applied Mechanics, 1991, Vol.58, No.3, Pp.716-723.
11. Sidorov V.N., Badina E.S., Detina E.P. *Nonlocal in time model of material damping in composite structural elements dynamic analysis*. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2021, Vol.17, No.4, Pp.14-21.
12. Bathe K.J., Wilson E.L. *Numerical methods in finite element analysis*. Prentice-Hall, Inc, 1976, 528 p.

13. Landherr J.C. *Dynamic analysis of a FRP deployable box beam*. Kingston, Queen's University, 2008.

Поступила в редакцию 28 октября 2022 года.

Сведения об авторах:

Сидоров Владимир Николаевич – д.т.н., проф., Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия; e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

Бадина Елена Сергеевна – к.т.н., Российский университет транспорта (РУТ (МИИТ)), г. Москва, Россия; e-mail: shepitko-es@mail.ru

Детина Елена Петровна – н.с., преподаватель, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия; e-mail: detinaep@mgsu.ru